This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

The Gift of

WILLIAM H. BUTTS, Ph.D.

A.B. 1878 A.M. 1879

Teacher of Mathematics

1898 to 1922

Assistant Dean, College of Engineering

1908 to 1922

Professor Emeritus

1922

RADCLIFFE
OBSERVATORY
OXFORD

QA
803
.A1
1760

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA;

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, EQ. AURATO;

Perpetuis Commentariis illuſtrata, communi ſtudio

PP. THOMÆ LE SEUR & FRANCISCI JACQUIER,

Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ,

Matheſeos Profeſſorum.

Editio altera longè accuratior & emendatior.

TOMUS SECUNDUS.

COLONIÆ ALLOBROGUM,

Sumptibus CL. & ANT. PHILIBERT Bibliop.

MDCCLX.

RADCLIFFE
OBSERVATORY
OXFORD.

ILLUSTRISSIMÆ
SOCIETATI REGALI
A
SERENISSIMO REGE
CAROLO II.
AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM
FUNDATÆ,
ET
AUSPICIIS
SERENISSIMI REGIS
GEORGII II.
FLORENTI,

COMMENTARIUM PERPETUUM IN HUNC
CELEBERR. IS. NEWTONI TRACTATUM
D. D. D.

Thomas LE SEUR & *Franciſcus* JACQUIER.

Gen. Lib.
Gift
Professor William H. Butts
10-14-1935

MONITUM.

ALtera tandem PRINCIPIORUM MATHEMATICORUM Pars in lucem prodit. De motibus corporum in medio reſiſtente agitur potiſſimùm in hoc ſecundo NEWTONI Libro. Rem difficultatis plenam norunt omnes; ita tamen noſtra ſtuduimus accommodare commentaria ut iis qui in primi Libri lectione eâ quâ par eſt diligentiâ & attentione fuerint verſati, facilia planaque omnia futura eſſe ſperemus. Nec ſatis nobis fuit præclara Clariſſ. Autoris inventa explicare, nos ipſi quoque uſu didicimus nonnulla interdùm invenire quæ hùc & illùc in noſtris commentariis inſerere auſi ſumus. Sed quod maximum eſt hujuſce operis decus & ornamentum, nova quamplurima doctiſſimi EULERI problemata, quæ in egregio Mechanices Opere leguntur, addidimus. Noſtros etiam abundè locupletant commentarios pretioſa monumenta quibus *Acta Eruditorum* Lipſienſia exornarunt Clariſſ. Viri JOANNES & DANIEL BERNOULLIUS. Silentio tandem prætermittendus non eſt Illuſtriſſ. doctiſſimuſque POLENUS, cujus elegans de Logarithmicæ conſtructione Epiſtola, nonnullaque de motu aquarum experimenta nobis plurimùm profuêre. Sed longè majora ſunt

quàm verbis exprimi poſſint, de hoc univerſo opere Clariſſ. Viri JOAN. LUDOVICI CALANDRINI merita, qui, eâdem quam primi Libri initio laudavimus, diligentiâ indefeſſâque curâ huic ſecundæ parti invigilavit.

Reprehendendum multis fortaſſe videbitur quod oblatam frequenter occaſionem quaſi è manibus dimittentes, celeberrimas Philoſophorum controverſias vel omninò omittamus vel leviter duntaxat perſtringamus. Verùm ſciant eum fuiſſe NEWTONI ſcopum à quo ne latum unguem maximè vellemus diſcedere, ut ingenioſa quoque Syſtematum commenta è phyſicâ eliminaret atque profligaret. Nos itaque à Philoſophicis litibus maximè averſi, altercationes ſummo ſtudio declinavimus. Tot inſuper nova his de rebus ſcripta quotidiè circumferuntur ut juſti operis molem excederet hic ſecundus Liber, ſi recentiora explicare aggrederemur Philoſophorum placita.

Hanc ſecundam laboris noſtri partem benignè excipiant mathematicarum diſciplinarum Candidati, tertiamque tandem & ultimam anno proximè futuro expectent.

ROMÆ *in Regio Conventu SS*[æ]. *Trinitatis.*
Anno 1740.

IN-

INDEX SECTIONUM
DE MOTU CORPORUM,
TOMI II.

SECT. I. *De motu corporum quibus reſiſtitur in ratione velocitatis.* Pag. 1
SECT. II. *De motu corporum quibus reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatis.* 46
SECT. III. *De motu corporum quibus reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicatâ.* 121
SECT. IV. *De corporum circulari motu in mediis reſiſtentibus.* 142
SECT. V. *De denſitate & compreſſione fluidorum, deque hydroſtaticâ.* 165
SECT. VI. *De motu & reſiſtentiâ corporum funependulorum.* 189
SECT. VII. *De motu fluidorum & reſiſtentiâ projectilium.* 250
SECT. VIII. *De motu per fluida propagato.* 340
SECT. IX. *De motu circulari fluidorum.* 397

Index ſpecialis Propoſitionum hujuſce Tomi, ſeu Libri Secundi, ad calcem Tomi quarti reperietur.

ADMO-

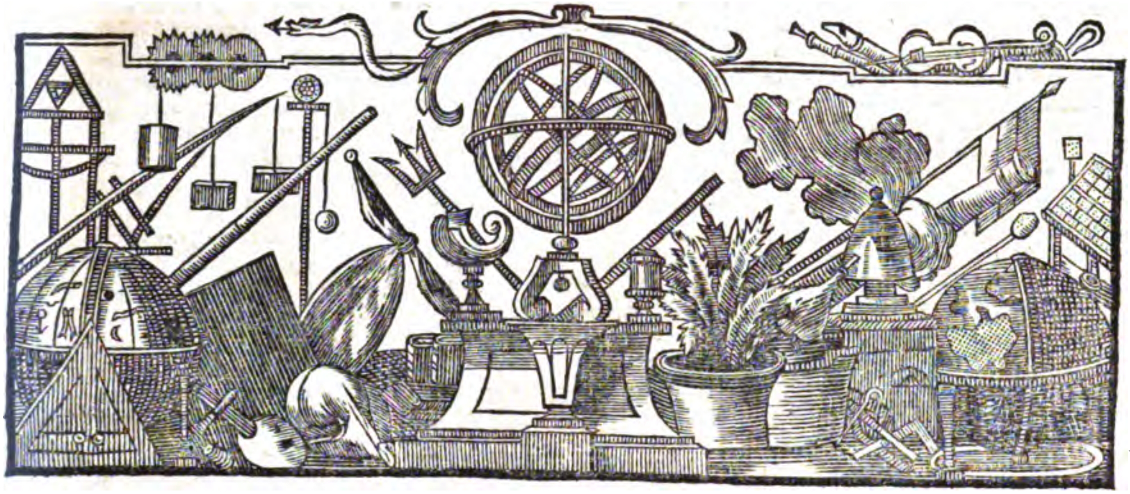
ADMONITIO.

In initio ſingularum notarum quibus numerus præfixus non fuit, ejus loco aſteriſcus * depictus eſt : à pagina verò 130 alter aſteriſcus ſubinde reperietur, cujus alius non eſt uſus quàm ut diſtinguat ea quæ inſerta ſunt ab Editore (eo jure ſibi ab Autoribus Commentarii conceſſo); idem etiam deſignat ſignum (†) quibuſdam notis præfixum, ne ſcilicet turbaretur ordo litterarum ab Autoribus ipſis adhibitus.

Quid in novâ hac ſecundi, necnon prioris Tomi Editione præſtitum ſit, dicetur in limine tertii qui unà cum quarto, ſecundâ vice, Deo dante, lucem videbit anno proximo.

Datum GENEVÆ 30. *Aug.* 1759.

Le prix des 4. Volumes ſera de 36 Liv. de France, pour ceux qui payeront d'avance avant le mois de Novembre prochain, & enſuite 50 Liv.



DE MOTU CORPORUM LIBER SECUNDUS.

SECTIO I.

(*) *De motu corporum quibus reſiſtitur in ratione velocitatis.*

(*) LEMMA

generales reſiſtentiæ notiones exponens.

1. Non poteſt corpus in medio fluido moveri atque in illud agere, quin ex fluidi reactione vim ſeu reſiſtentiam aliquam patiatur. Vis illa reſiſtentiæ, proportionalis eſt decremento motûs, quod dato tempore generat, & illius directio directioni mobilis ſemper oppoſita eſt (*per mot. Leg.* 2. & 3.) Quapropter datâ corporis maſsâ, reſiſtentia eſt ut velocitatis decrementum quod dato tempore producit ; datâ enim mobilis maſsâ, motûs decrementum eſt ut decrementum velocitatis (6. *Lib.* 1.). 1.

2. Vis reſiſtentiæ quam momento quolibet temporis experitur corpus, eſt ut motûs decrementum directè & temporis momen-

mentum inverſè. Nam reſiſtentia dato temporis momento eſt ut motûs decrementum directè (1) & dato motûs decremento eſt inverſè ut momentum temporis quo motûs decrementum generatur. Si enim ſubduplo vel ſubtriplo temporis momento, idem motûs incrementum vel decrementum generetur, vis generans dupla aut tripla eſt.

2. 3. Hinc datâ corporis maſsâ, reſiſtentia eſt ut velocitatis decrementum directè & momentum temporis inverſè.

4. Quoniam directio vis reſiſtentiæ, directioni mobilis contraria eſt (1), corpus ſolâ vi inſitâ in medio reſiſtente motum, per rectam lineam continuò fertur, quod etiam evenire debere manifeſtum eſt, ſi corpus vi quâlibet acceleratrice vel retardatrice, ſecundum vel contrà directionem motûs inſiti urgeatur

5. Reſiſtentia conſiderari poteſt tanquam vis retardans, & cum vi gravitatis, quâ corporum aſcendentium motus perpetuò minuitur, conferri. Vis enim reſiſtentiæ ſicut vis gravitatis infinitè parva eſt, ſi conferatur cum vi illâ quâ corpus motu finito cietur, ſeu quâ ſpatium finitum finito tempore deſcribit. Nam ſi reſiſtentiæ quam omni temporis momento patitur corpus, vis eſſet finita, ſive ejuſdem generis cum vi finitâ corporis motu finito acti, infinita multitudo reſiſtentiarum momentanearum finito quovis tempore producta, totum corporis motum finito quolibet exiguo tempore extingueret, quod eſt contra hyp., quâ ſupponimus corporis motum tempore aliquo finito in medio reſiſtente perſeverare.

6. Hinc corporis in medio reſiſtente moti velocitas finita per ſpatium infinitè parvum, atque etiam tempore infinitè parvo æquabilis cenſeri poteſt, neglecto nimirum infinitè parvo velocitatis decremento.

7. JAM verò reſiſtentia corporum in fluidis, cæteris paribus, oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, & partim ex reactione partium medii, treſque ſunt celebriores circà hujus reſiſtentiæ legem hypotheſes, quarum Mathematicas conſequentias NEWTONUS hoc libro exponit. 1ª. Hypotheſis reſiſtentiam ponit velocitati corporis dati proportionalem, ſecunda velocitatis quadrato, & tertia partim velocitati, & partim velocitatis quadrato. Præterea cùm experimentis ſit cognitum partem quamdam reſiſtentiæ fluidorum uniformem eſſe, conſiderandæ ſunt quatuor aliæ hypotheſes, in quarum primâ reſiſtentia fingatur uniformis; in ſecundâ partim uniformis & partim velocitati proportionalis; in tertiâ partim uniformis & partim ut quadratum velocitatis, & in quartâ denique partim uniformis, partim ut velocitas, & partim ut velocitatis quadratum. Prima ex his quatuor hypotheſibus nihil habet difficultatis, cùm uniformis reſiſtentia conſiderari poſſit tanquam gravitas conſtans cùm motum aſcendentis corporis retardat; quâ de re ſatis actum eſt *lib.* 1. tres verò quæ ſequuntur hypotheſes non ægrè referri plerumque poſſunt ad determinationes motuum quas aliæ priores hypotheſes (de quibus ab initio actum eſt) ſuppeditant, quod deinceps oſtendemus.

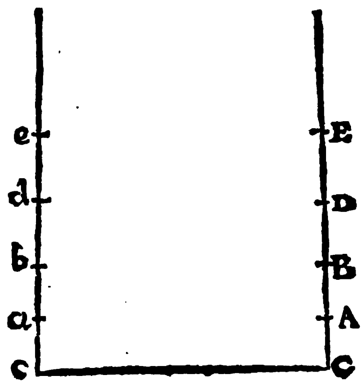
8. Si medium in quo corpus movetur perfectè fluidum ſit, hoc eſt, partibus conſtet optimè lævigatis nullâque tenacitate cohærentibus, quæ proindè vi cuicumque illatæ cedant, & cedendo facillimè moveantur inter ſe, ſola ea conſideranda eſt reſiſtentia quæ ex medii reactione ortum ducit, eſtque illa ut denſitas medii & quadratum velocitatis mobilis dati conjunctim. Hæc enim reſiſtentia (*per motûs leg.* 2. *&* 3. *lib.* 1.) eſt ut quantitas motûs dato tempuſculo communicati; ſed datâ mobilis velocitate, quantitas motûs communicati eſt ut quantitas fluidi tempuſculo dato movenda, hoc eſt, ut denſitas medii; datâ autem medii denſitate, quantitas motûs communicati eſt ut quantitas fluidi dato tempuſculo dimovenda, & ut velocitas quâ quantitas illa fluidi movetur conjunctim, & quantitas fluidi dato tempuſculo dimovenda velocitati mobilis proportionalis eſt, corpus enim duplo velocius altero, duplo majus ſpatium in fluido percurret, ſicque duplo pluribus particulis occurret. Quare datâ denſitate medii, reſiſtentia eſt ut quadratum celeritatis mobilis, atque adeò ſi neque fluidi denſitas, neque mobilis celeritas data ſit, erit reſiſtentia ut medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim, atque hæc eſt reſiſtentia quæ ortum ducit ab inertiâ particularum fluidi quas corpus motum

è lo-

è locò dimovet, & quæ in velocioribus motibus ſola ferè obſervatur.

9. Altera reſiſtentia quæ ex tenacitate partium fluidi uniformis naſcitur, conſtans eſt, aut quod idem eſt, temporis momento proportionalis, eamque in tardiſſimis motibus ſenſibilem faciunt experimenta. Si enim partium fluidi cohæſio ſit ubique eadem, vi quâdam determinatâ opus eſt ut partes illæ ſeparentur, corporique tranſitum præbeant, quâcumque demum velocitate illud feratur, & ideò vis illa reſiſtentiæ cum vi gravitatis uniformi, quæ corporis aſcendentis motum retardat, conferri poteſt. Nam corpora duo ſimilia & æqualia cùm pari velocitate è locis C & c per lineas C E, c e, ad rectam C c normales projiciantur, & in locis æque altis A & a, B & b, D & d &c. æqualem patiantur reſiſtentiam; corpus quidem C reſiſtentiam experiatur à vi gravitatis conſtante (quæ in locis A, B, D, E, &c. tantùm agat) oriundam, corpus verò c reſiſtentiam ex tenacitate datâ, vi illi gravitatis æquali, in locis tantùm a, b, d, &c. reagente ortam; in ſpatiis verò intermediis A B & a b, B D & b d, &c. nullum ſit motibus obſtaculum; dum corpora perveniunt in A & a, æqualem habent velocitatem, & deindè victis æqualibus in A & a obſtaculis, pari adhuc velocitate per ſpatia minime reſiſtentia A B & a b, feruntur, & ſimili modo, ob æquales reſiſtentias in locis B & b per ſpatia B D & b d ſimul moventur, & ità deinceps eandem ſemper velocitatem in locis æque altis habent. Minuantur jam æqualia illa ſpatia A B & ab, B D & b d, &c. & eorum numerus augeatur in infinitum, ut vis gravitatis & reſiſtentiæ actio vel reactio continua reddatur, & corpora duo eandem ubique reſiſtentiam patientur, & in locis æquè altis eandem velocitatem habebunt. Quarè reſiſtentia quæ ex fluidi tenacitate ortum ducit, poteſt cum vi gravitatis uniformis comparari, licet medii tenacitas in corpus quieſcens (quod quidem vi gravitatis ſemper urgeretur) agere nullo modo poſſit.

10. In fluidis igitur tenacitate aliquâ præditis, reſiſtentia eſt partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis (8. 9.).



11. LEMMA. In quâcunque reſiſtentiæ hypotheſi, corporis tam in medio reſiſtente quàm in vacuo moti velocitas finita in ſingulis locis eſt ut elementum ſpatii deſcripti directè & momentum temporis quo deſcribitur inversè. Velocitas enim uniformis eſt ut ſpatium quodcunque deſcriptum directè & tempus quo id ſpatium deſcribitur inversè. In medio autem ſive reſiſtente ſive vacuo velocitas per ſpatium infinitè parvum æquabilis eſt (6.)

12. *Coroll.* 1. Hinc temporis momentum eſt ut momentum ſeu elementum ſpatii directè & velocitas inversè; momentum verò ſpatii ut velocitas & momentum temporis conjunctim.

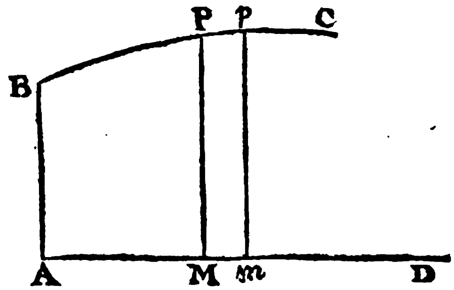
13. *Coroll.* 2. Si igitur velocitas dicatur v, ſpatium deſcriptum s, tempus quo deſcriptum eſt t erit $v=\frac{ds}{dt}$, $v\,dt=ds$ & $dt=\frac{ds}{v}$, ſumptiſque fluentibus $S.\,v\,dt=s$ & $t=S.\,\frac{ds}{v}$.

14. 14. *Coroll.* 3. Si ità deſcripta fuerit curva B P C ut ejus applicatæ M P, m p, axi A D, normales, exponant velocitatem v, & abſciſſæ à puncto fixo A ſumptæ A M, A m tempus t, erectumque ſit perpendiculum A B curvæ occurrens in B, area A B P M exponit ſpatium tempore t deſcriptum. Sit enim applicata p m, priori P M infinitè propinqua, & erit M m $= dt$, adeóque areæ A B P M elementum M P p m $= v\,dt = ds$ (11) & proindè area A B P M $=$ S. $v\,dt = s$. Recta A D dicatur linea temporum & curva B P C linea celeritatum. Eodem modo ſi abſciſſa A M exponeret ſpatium deſcriptum s & applicata M P velocitatem inverſam, ità ut eſſet A M $= s$, & M P $= \frac{1}{v}$, area A B P M exponeret tempus quo ſpatium AM deſcriptum eſt; eſſet enim M P p m $= \frac{ds}{v} = dt$, & hinc area A B P M $=$ S. $\frac{ds}{v} = t$.

15. LEMMA. Si corpus datæ maſſæ ſolâ vi inſitâ in medio reſiſtente moveatur, *decrementum velocitatis*, erit ut *reſiſtentia* & *momentum temporis* conjunctim. *Incrementum* verò *ſpatii* erit ut *velocitas & velocitatis decrementum* directè & *reſiſtentia* inversè. Datâ enim corporis maſsâ, reſiſtentia eſt ut velocitatis decrementum directè & momentum temporis inversè (2) ideóque decrementum velocitatis eſt ut reſiſtentia & momentum temporis conjunctim. Quod erat 1um. Sed incrementum ſpatii eſt ut velocitas & momentum temporis conjunctim (12) momentum verò temporis eſt ut decrementum velocitatis directè & reſiſtentia inversè (2); Quarè incrementum ſpatii eſt ut velocitas & illius decrementum directè & reſiſtentia inversè. Quod erat 2um.

16. *Coroll.* 1. Hinc reſiſtentia eſt ut velocitas & illius decrementum directè ac ſpatii incrementum inversè, & velocitas in ſuum decrementum ducta, eſt ut reſiſtentia & incrementum ſpatii conjunctim.

17. *Coroll.* 2. Quare ſi ſpatium dicatur s, tempus t, velocitas v, reſiſtentia r, erit $r\,dt = -dv$, & $r\,ds = -v\,dv$.



18. LEMMA. Si corpus datæ maſſæ in medio reſiſtente urgeatur vi centripetâ in directione motûs corporis agente; corpore aſcendente, erit *velocitatis decrementum* ut *momentum temporis* & *ſumma vis centripetæ & reſiſtentiæ conjunctim*. Et *velocitas* in *ſuum decrementum* ducta erit ut *incrementum ſpatii* & *ſumma vis centripetæ & reſiſtentiæ* conjunctim.

At corpore deſcendente, *velocitatis incrementum* erit ut *momentum temporis*, & *differentia inter vim centripetam & vim reſiſtentiæ* conjunctim. Et *velocitas* in *ſuum incrementum* ducta, erit ut *incrementum* ſive elementum *ſpatii* & *differentia inter vim centripetam ac reſiſtentiam* conjunctim.

Reſiſtentia enim conſiderari poteſt tanquam vis continuò retardans (5), & vis centripeta corporis aſcendentis motum etiam retardat, ideóque vis tota retardatrix eſt ſumma ipſa vis centripetæ & reſiſtentiæ, dum corpus aſcendit; ſed vis retardatrix in temporis momentum ducta eſt ut decrementum velocitatis quod producit (2); ergò corpore aſcendente, decrementum velocitatis eſt ut temporis momentum & ſumma vis centripetæ ac reſiſtentiæ conjunctim. Quod erat 1um.

Sed momentum temporis eſt ut incrementum ſive elementum ſpatii directè & velocitas inversè (12). Quarè ſi corpus aſcendat, decrementum velocitatis eſt ut elementum ſpatii & ſumma vis centripetæ ac reſiſtentiæ directè, & velocitas inversè, adeóque velocitas in ſuum decrementum ducta eſt ut elementum ſpatii & ſumma vis centripetæ ac reſiſtentiæ conjunctim. Quod erat 2um.

Deſcendente corpore vis centripeta mo-

tum

tum corporis accelerat dum reſiſtentia retardat, & ideò ſi vis centripeta major ſit vi reſiſtentiæ, exceſſus vis centripetæ ſuprà reſiſtentiam eſt vis tota accelerans; Si vis centripeta minor eſt vi reſiſtentiæ, vis tota retardans erit exceſſus reſiſtentiæ ſuprà vim centripetam. Quarè differentia inter reſiſtentiam & vim centripetam, in temporis momentum ducta, erit in primo caſu ut incrementum velocitatis, & in ſecundo caſu, ut illius decrementum. Quod erat 3um. Sed momentum temporis eſt, ut elementum ſpatii directè & velocitas inversè (12), quarè velocitas in ſuum elementum (ſive incrementum ſit, ſive decrementum) ducta, eſt ut elementum ſpatii, & differentia inter vim centripetam ac reſiſtentiam conjunctim. Quod erat 4um.

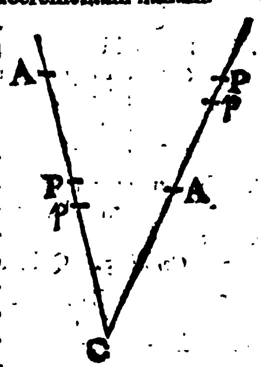
19. *Coroll.* 1. Undè ſi vis centripeta dicatur g, reſiſtentia r, ſpatium s, tempus t, velocitas v: erit pro corporis aſcenſu $g\,dt + r\,dt = -dv$, & $g\,ds + r\,ds = -v\,dv$; & pro corporis deſcenſu, ſi vis centripeta vi reſiſtentiæ ſit major $g\,dt - r\,dt = dv$, & $g\,ds - r\,ds = v\,dv$; at ſi vis centripeta vi reſiſtentiæ ſit minor $r\,dt - g\,dt = -dv$, & $r\,ds - g\,ds = -v\,dv$.

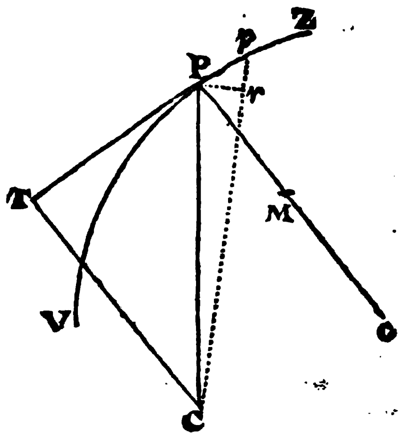
20. *Coroll.* 2. Si in his formulis ponatur $r = 0$, mutabuntur illæ in formulas, quibus motus corporis in medio non reſiſtente determinantur. Quâ ratione motus corporis in medio reſiſtente conferri poſſunt cum ejuſdem motibus in medio non reſiſtente.

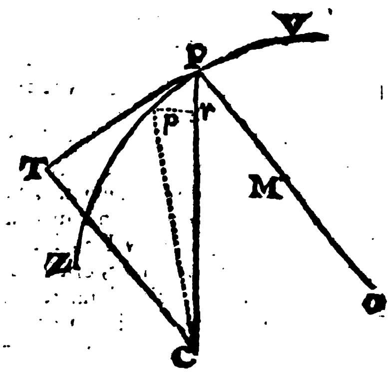
21. *Coroll.* 3. Si corpore deſcendente; reſiſtentia vi centripetæ æqualis fuerit, corporis celeritas æquabilis manet; nam in formulis $g\,dt - r\,dt = dv$, & $r\,dt - g\,dt = -dv$, poſitâ $g = r$, fit $dv = 0$, hoc eſt, velocitatis incrementum vel decrementum nullum.

22. *Coroll.* 4. Si corpus in lineâ rectâ A C vi centripetâ urgeatur ad punctum datum C, & de loco dato A ſurſum vel deorſum projiciatur cum velocitate datâ in medio reſiſtente, & ſpatium A P quod aſcendendo vel deſcendendo deſcribit tempore t dicatur s, data A C dicatur b; & tam in aſcenſu quam in deſcenſu ſcribatur $CP = x$, adeóque in aſcenſu $x - b = s$, & $dx = ds$, in deſcenſu $b - x = s$, & $-dx = ds$; ſi loco ds ſubſtituatur ipſius valor in formulis coroll. 1. (19) erunt illæ pro aſcenſu $g\,dx + r\,dx = -v\,dv$, quarum una in alteram abit, mutato ſigno + vel −, quantitati r præfixo.

22







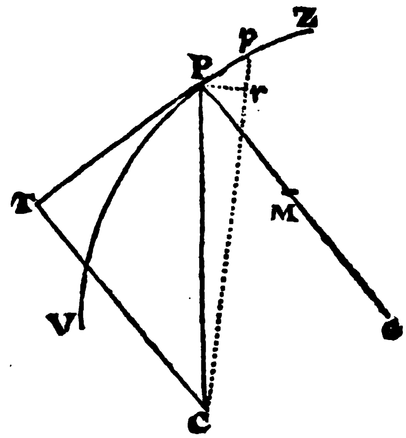
23. LEMMA. Si corpus vi quâlibet centripetâ ſollicitatum curvam VPZ in medio reſiſtente aut etiam in vacuo deſcribat; viſque centripeta in loco quovis P dividatur in vires duas, quarum altera directionem habeat P O tangenti P T per P ductæ normalem, altera directionem cum tangente congruentem, quadratum velocitatis corporis

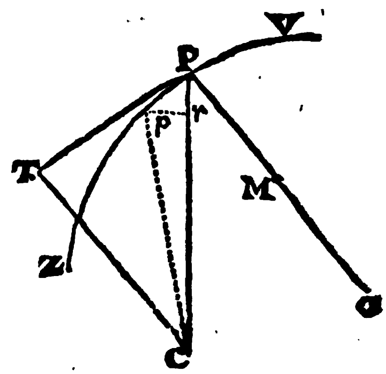
poris in loco P, exponi poterit per factum ex vi normali ductæ in radium circuli curvam V P Z oſculantis in P.

Sit P C, totius vis centripetæ directio, P O radius oſculi, P p arcus curvæ infinitè parvus qui uſurpari poteſt pro arcu circuli centro O & radio O P deſcripti. Velocitas corporis in P dicatur v, quæ per arcum P p tam in medio reſiſtente quam in vacuo æquabilis eſt,
23. (6) & totius vis centripetæ pars illa quæ ſecundum directionem P O agit, ſeu vis normalis dicatur N & quia vis reſiſtentiæ ut potè ſemper contraria directioni mobili P T, (1) vim normalem N non afficit, erit vis illa N quâ corpus in arcu P p retinetur in medio reſiſtente æqualis vi centripetæ quâ corpus idem cum eâdem velocitate æquabili v, in medio non reſiſtente circulum deſcriberet cujus centrum O, & radius O P. Corpus autem vi conſtante N, ſollicitatum in vacuo de loco P cadat per radii partem P M ita ut eo lapſu acquirat celeritatem v quâ in medio non reſiſtente circulum deſcriberet cujus centrum eſt O & radius eſt O P; ſitque P M $= s$, velocitas eo lapſu acquiſita in M erit ergo $= v$, & erit (20. 19.) $N\,ds = v\,dv$, ſumptiſque fluentibus $Ns = \frac{1}{2}vv$, & $2\,Ns = vv$. Sed altitudo ex quâ corpus vi conſtante N ſollicitatum in vacuo cadere debet ut velocitatem acquirat æqualem illi cum quâ circulum ipſum deſcribit, eſt æqualis dimidio radii PO, (119. *lib.* 1.) ergo $2s = PO$ & $2\,Ns = vv = N \times PO$. Q. E. D.

24. *Coroll.* 1. Iiſdem poſitis, totius vis centripetæ juxtà directionem P C urgentis ea pars quæ ſecundum directionem tangentis P T agit, ſeu vis tangentialis in P dicatur T reſiſtentia ibidem r, arcus V P s, ideoque P q $= ds$, & ſi corpus deſcendit, erit $T\,ds - r\,ds = v\,dv$ (18. 19.) quia vis tangentialis motum accelerat & vis reſiſtentiæ eundem retardat, vis autem normalis nec accelerat nec retardat. Sed ſi corpus aſcendit, erit $T\,ds + r\,ds = -v\,dv$ (18. 19.) vi tangentiali & reſiſtentiâ motum corporis ſimul retardantibus.

25. *Coroll.* 2. Sit C virium centrum, vis tota centripeta in directione P C urgens $= g$, C P $= y$, C T tangenti perpendicularis $= p$, ideoque P T $= \sqrt{yy - pp}$. Ex puncto p, alteri P infinitè propinquo demiſſum ſit ad C P perpendiculum p r,



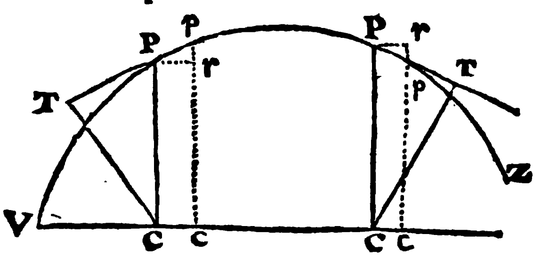


ut ſit p r $= dy$, & triangulum P r p, ſimile triangulo P T C, & erit P p (ds) : p r (dy) $=$ P C : P T $= g : T = \frac{g\,dy}{ds}$, ubi obſervandum eſt dy, eſſe affirmativam, quando creſcente arcu V P ſive s, creſcit etiam recta C P, ſeu y, id eſt, quando corpus aſcendit, & contrà dy eſſe negativam, dum corpus deſcendit, adeóque in hoc caſu fieri $T = -\frac{g\,dy}{ds}$. Hi valores vis tangentialis T, ſubſtituantur in formulis corollarii 1. & ambæ in hanc mutabuntur, $g\,dy + r\,ds = -v\,dv$.

26. *Coroll.* 3. Quia P p (ds) : p r ($\pm dy$) $=$ P C (y) : PT ($\sqrt{yy - pp}$) erit $ds = \pm \frac{y\,dy}{\sqrt{yy - pp}}$, (ſigno ſuperiori pro aſcenſu & inferiori pro deſcenſu uſurpato);

pato). Quarè fiet $g\,dy + r\,ds = g\,dy \pm \frac{r\,y\,dy}{\sqrt{yy - pp}} = -v\,dv$.

27. *Coroll.* 4. Si radius oſculi P O dicatur R, eſt (23) $R \times N = v^2$, & quia $y : p = g : N$, adeóque $\frac{pg}{y} = N$, fiet $\frac{Rpg}{y} = v^2$; ſed radius oſculi $R = \frac{y\,dy}{dp}$ (214. lib. 1.) quarè erit $\frac{gp\,dy}{dp} = v^2$, & $g = \frac{v^2\,dp}{p\,dy}$. Subſtituatur hic valor in formulâ corollarii 23. & fiet $g\,dy + r\,ds = \frac{v^2\,dp}{p} + r\,ds = -v\,dv$, & ideò $v\,dv + \frac{v^2\,dp}{p} = -r\,ds$.



28. *Coroll.* 5. Vis centripetæ directio PC, ſibi ſemper parallela maneat, ut hic aſſumitur vis gravitatis, & per punctum V, in curvâ V P Z datum, ducatur recta V C directioni gravitatis P C perpendicularis, dicanturque ut ſuprà V P $= s$, Pp $= ds$, CP $= y$, pr $= dy$, vis tota gravitatis in P $= g$, reſiſtentia r, velocitas corporis ibidem $= v$, & erit ut in corollario 2. $g\,dy + r\,ds = -v\,dv$.

29. *Coroll.* 6. Si in Hypotheſi corollarii 51. dicantur radius oſculi in P $= R$, vis normalis $= N$, abſciſſa V C $= x$, & C c ſeu Pr $= dx$, erit ob triangulorum P p r, C P T ſimilitudinem, P p : Pr = PC : TC $= g : N$, ſive $ds : dx = g : N = \frac{g\,dx}{ds}$; ſed (23) $N = \frac{v^2}{R}$, ergò $\frac{g\,dx}{ds} = \frac{v^2}{R}$, & hinc $v^2 = \frac{Rg\,dx}{ds}$.

30. *Coroll.* 7. Eſt autem (216. Lib. 1.) $R = \frac{ds^2\,dy}{ds\,ddx - dx\,dds} = -\frac{ds^2\,dy}{dx\,dds}$, ſi ponatur dx, conſtans, & ideò $ddx = 0$; Et quia $ds^2 = dy^2 + dx^2$, ſumptiſque fluxionibus, factâ dx, conſtante $ds\,dds = dy\,ddy$, & $dds = \frac{dy\,ddy}{ds}$, fiet $R = -\frac{ds^3}{dx\,ddy}$; quarè (29) $v^2 = \frac{Rg\,dx}{ds} = -\frac{g\,ds^2}{ddy}$, ideòque $g = -\frac{v^2\,ddy}{ds^2}$, & hinc (28) $g\,dy + r\,ds = -\frac{v^2\,dy\,ddy}{ds^2} + r\,ds = -v\,dv$, hoc eſt, ob $dy\,ddy = ds\,dds$; $v\,dv = \frac{v^2\,dds}{ds} - r\,ds$.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sectio I.

31.

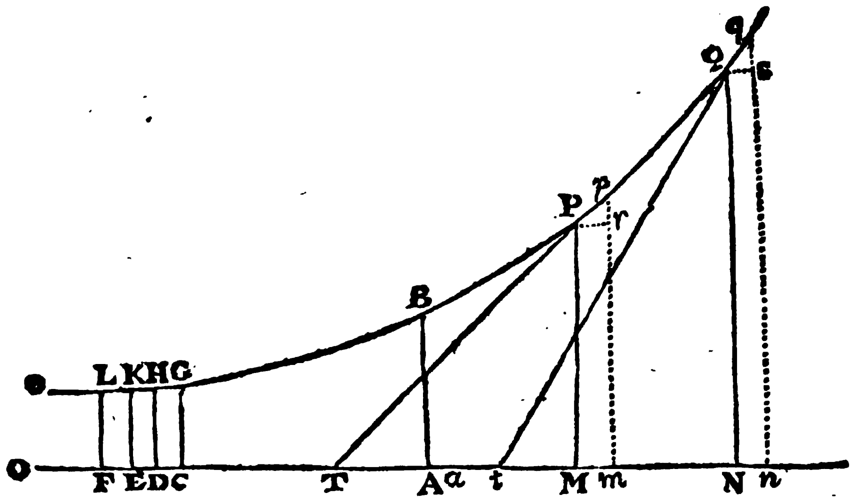
31. *Scholium.* In ſuperioribus quinque lemmatis ipſorumque corollariis, fere complexi ſumus principia omnia, quibus & ad inventionem & ad demonſtrationem motuum in mediis reſiſtentibus uſi ſunt Clariſſ. viri Newt. in hoc Libro; *Varignonius* in Monumentis Academiæ Regiæ an. 1707. 1708. 1709. 1710. 1711. Joannes *Bernoulli* ibid. an. 1711. & in Actis Eruditorum Lipſ. an. 1713. & 1719. *Hermannus* Lib. 2. *Phoronomiæ* & in Commentariis Academiæ Petropolitanæ, ac *Eulerus* in opere exquiſito quod de *Mechanicâ* ſcripſit analyticè. Nunc alia nonnulla de Logarithmicæ proprietatibus, & de methodo maximorum & minimorum quæ ad doctrinam motuum in mediis reſiſtentibus explicandam ſpectant, ſubjungenda ſunt.

LEMMA

præcipuas Logarithmicæ proprietates exponens.

III. *Hugenius* de hac ipsâ *Newtoniani* operis parte loquens, in quâ agitur de corporibus in mediis reſiſtentibus motis, (quam ſummâ cum voluptate ſe vidiſſe teſtatur) ait ſe notaſſe lineam curvam quam Logarithmicam aut Logiſticam nuncupat, ſummæ utilitatis eſſe in hoc negotio, & quædam de eâ Theoremata indicat quorum demonſtrationem *Guido Grandus* poſtea evulgavit; Hujus ergo curvæ proprietates ab initio explicare à ſcopo noſtro alienum non duximus.

32. De-



32. *Defin.* Sit linea recta N A O ſecundum quam feratur perpendicularis M P motu uniformi & ſibi parallelo, dum in ea perpendiculari M P mobile P velocitate variabili movetur ſecundum hanc Legem, ut ejus velocitas ſit ſemper proportionalis diſtantiæ ejus à rectâ N A O, curva ab illo puncto P deſcripta dicetur *Logarithmica* vel *Logiſtica*.

Linea N A O ſecundum quam perpendicularis P M motu uniformi & ſibi parallelo fertur, dicitur *Axis Logarithmicæ*, & lineæ P M, Q N perpendiculares in Axem ſunt ejus ordinatæ.

Si quædam ex ordinatis Logarithmicæ, ut A B, ſit æqualis unitati, punctum axeos A cui inſiſtit cenſetur abſciſſarum origo, & abſciſſæ à parte A M ſumptæ, ſunt poſitivæ, à parte A O negativæ & abſciſſa pertinens ad ordinatam A B ſive ad unitatem eſt ipſum o.

Coroll. 1. *Differentiæ quamminimæ ordinatarum Logarithmicæ æqualibus tempuſculis genitæ, ſunt ut illæ ordinatæ.*

In quovis enim puncto Logarithmicæ velocitas axi perpendicularis quâ ordinatæ creſcunt vel decreſcunt, eſt ordinatæ proportionalis (*ex Def.*), ſed durante tempuſculo infinitè parvo illa velocitas uniformis eſt cenſenda, & æqualibus tempuſculis incrementa vel decrementa linearum ſunt ut velocitates uniformes quibus generantur, ergo incrementa vel decrementa ordinatarum h. e. earum differentiæ æqualibus tempuſculis genitæ ſunt ut illæ ordinatæ.

Coroll. 2. *Sint ordinatæ quævis P M, Q N, ducantur duæ aliæ ordinatæ p m, q n ipſis quamproximæ & ab iis æqualiter diſtantes, p m & q n erunt prioribus ordinatis proportionales*: Velocitas enim quâ ordinata motu ſibi parallelo fertur, eſt uniformis, ideoque eodem tempore ordinata P M ad p m perveniet ac Q N ad q n ob æquales diſtantias, ergo, per Cor. I. differentiæ ordinatarum P M & Q N dum perveniunt ad p m & q n erunt iis ipſis ordinatis proportionales, ſed adjectis vel detractis iis differentiis à lineis P M & Q N fiunt ordinatæ p m, q n, & adjectis vel detractis ex terminis rationis cujuſvis, correſpondentibus terminis rationis ipſi æqualis non mutatur prior ratio, ergo ordinatæ p m & q n erunt inter ſe ut P M ad Q N, & etiam alternando P M : p m = Q N : q n.

Coroll. 3. *Si ſumantur in axe puncta C, D, E, F ad diſtantias æquales & quamminimas, in iiſque punctis erigantur ordinatæ, illæ ordine conſtituent Progreſſionem Geometricam.* Nam quia ex Hyp. ordinatæ G C & H D, H D & K E ſunt quamproximæ & æqualiter diſtantes, eſt per Corollarium præcedens G C : H D = H D : K E, eadem ratione eſt H D : K E = K E : L F, ſicque deinceps, unde liquet ordi-

ordinatas G C : H D : K E : L F &c. eſſe in progreſſione Geometricâ.

33. Theor. I. *Sumantur in axe Logariſhmicæ quatuor puncta, ita ut duo priora æque à ſe mutuò diſtent ac duo poſteriora, ordinata in iis punctis erectæ erunt in proportione Geometricâ.*

Et ſi ſumantur in axe quotlibet puncta æque diſtantia ordine continuo, ordinatæ iis inſiſtentes erunt in progreſſione Geometricâ.

Sumantur in axe duo puncta quævis A & E, & alia duo H & K talia ut ſit A E = H K, eriganturque in illa puncta ordinatæ A L, E P, H S, K T; dico illas ordinatas fore in proportione Geometricâ.

Dividatur tam A E quam H K, in partes infinitè parvas æquales inter ſe, totidem erunt diviſiones in utroque intervallo; erigantur in illa puncta ordinatæ, fient duæ progreſſiones Geometricæ, in quibus totidem erunt termini, & rationes terminorum ſucceſſivorum æquales erunt, quia ordinatæ in utrâque progreſſione æqualiter diſtant; Ergo ex æquo, primus terminus A L prioris progreſſionis erit ad E P ultimum terminum ejus progreſſionis, ut H S primus terminus alterius progreſſionis ad ejus ultimum terminum K T. Q. E. D.

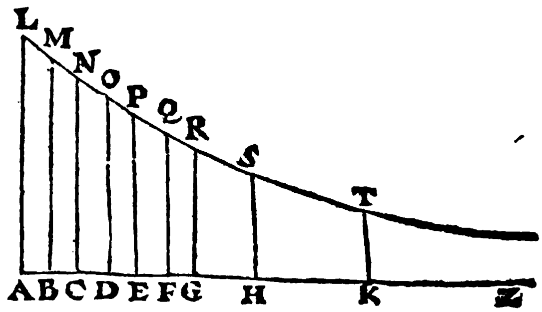
Et ſi ſumantur in axe plura puncta æquè diſtantia ordine continuo ſibi ſuccedentia, ordinatæ in iis punctis erectæ erunt in progreſſione geometricâ: Probatur ut in Cor. 3. defin.

Coroll. *E converſo, ſi in lineâ quâvis ſumantur plura puncta, æquè diſtantia ordine continuo, & in iis erigantur perpendiculares quæ ſint in progreſſione Geometricâ, Logarithmica aliqua per earum perpendicularium extremitates tranſibit.*

Sint enim A, D, G &c. ea puncta æquè diſtantia dividanturque eorum intervalla in partes æquales quamminimas, totidem erunt in quovis intervallo, aſſumantur mediæ proportionales inter perpendiculares A L & D O, D O & G R, &c. tot quot ſunt diviſionum puncta, & in ſingulis punctis erigantur perpendiculares iis mediis proportionalibus ordine ſumptis æquales; Denique curva tangat tam perpendiculares datas A L, D O, G R quam haſce medias, dico eam curvam eſſe Logarithmicam.

Facilè enim liquet ex naturâ progreſſionum, quod cùm ſit A L : D O = D O : G R &c. & totidem mediæ proportionales aſſumantur inter A L & D O, quot aſſumantur inter D O & G R, ſicque deinceps, formari progreſſionem continuam conſtantem ex omnibus illis perpendicularibus tam datis quàm inventis, ideo quamlibet ex illis, ut A L, eſſe ad ſibi proximam B M, ut alia quævis D O, eſt ad proximam P E, unde 33.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECTIO I.



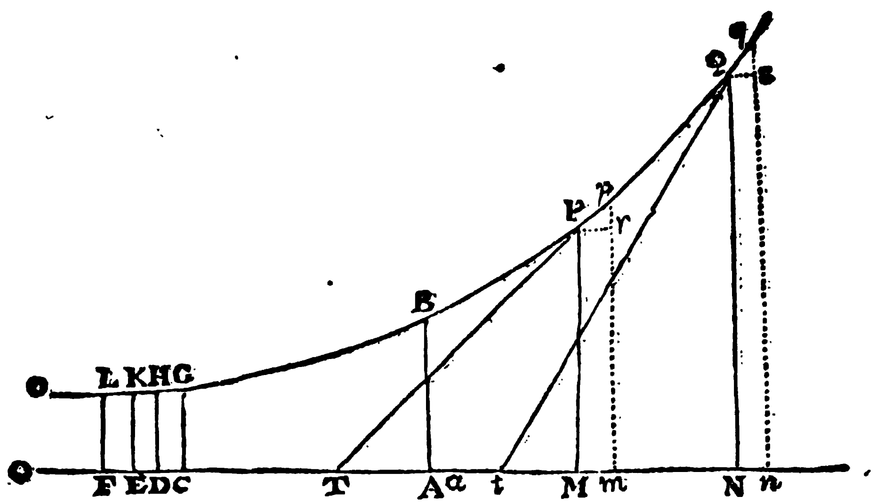
dividendo, eſt A L ad ſuam differentiam à proximâ, ut eſt etiam D O ad ſuam differentiam à proximâ, ideóque perpendicularium proximarum differentiæ erunt ubique eis perpendicularibus proportionales; Evaneſcentibus ergo punctorum in axe ſumptorum intervallis, & perpendicularibus ad vicinas æquali ubique celeritate latis & æquali tempuſculo (ob æqualitatem intervallorum), velocitates quibus creſcunt vel decreſcunt perpendiculares erunt iis ipſis perpendicularibus proportionales; Ergo (ex definitione Logarithmicæ) ea curva quæ tanget eas perpendiculares erit Logarithmica.

34. Theor. II. *Abſciſſæ axis Logarithmicæ, ſunt Logarithmi ordinatarum in earum extremo inſiſtentium.* Ferantur hinc inde ab origine axis partes æquales quamminimæ, in extremo ſingularum erigantur ordinatæ, illæ omnes ordinatæ conſtituent progreſſionem Geometricam inter cujus terminos occurrit unitas, earum verò abſciſſæ erunt in progreſſione Arithmeticâ propter partium in axe ſumptarum æqualitatem, & abſciſſa quæ unitati reſpondet eſt o; Jam autem cùm termini progreſſionis Arithmeticæ inter quos eſt o ita aptantur terminis progreſſionis Geometricæ ut o reſpondeat unitati, & reliqui

liqui termini ſibi reſpondeant, tum termini progreſſionis Arithmeticæ ſunt Logarithmi terminorum correſpondentium progreſſionis Geometricæ; Ergo abſciſſæ Logarithmicæ, ſunt Logarithmi ordinatarum correſpondentium.

Corol. 1. *Portio axis quæ intercipitur inter duas Ordinatas eſt Logarithmus rationis quæ intercedit inter illas Ordinatas.* Quotiens enim duarum quantitatum exprimit rationem quæ inter illas intercedit, & differentia Logarithmorum earum quantitatum, eſt logarithmus quotientis earum, ſed abſciſſæ ſunt Logarithmi ordinatarum, & portio axis quæ intercipitur inter duas ordinatas eſt differentia abſciſſarum ſive Logarithmorum ad eas ordinatas pertinentium, ergo illa portio eſt Logarithmus quantitatis quæ exprimit rationem quæ inter Ordinatas intercedit.

Coroll. 2. *Si dentur duarum aut plurium quantitatum Logarithmi, & à puncto dato recta alicujus ſumantur longitudines eis Logarithmis æquales, & in earum extremo erigantur perpendiculares quantitatibus quarum ſumuntur Logarithmi æquales, Logarithmica aliqua per earum perpendicularium extremitates tranſibit.*



In recta O A N ſumatur punctum A in quod erigatur perpendicularis A B unitati æqualis, ſitque A M logarithmus quantitatis cui æqualis eſt perpendicularis M P, ſit A a differentia progreſſionis Arithmeticæ ex quâ deſumuntur logarithmi, quæ ideò accuratè continebitur in intervallo A M toties quot ſunt termini in progreſſione Geometrica ex qua deſumuntur quantitates quarum habentur Logarithmi, quærantur tot mediæ proportionales inter A B & M P quot ſunt diviſionum puncta inter A & M, & in illa puncta erigantur perpendiculares illis mediis proportionalibus ordine æquales; fiet progreſſio Geometrica, quæ eſt ipſa progreſſio quantitatum quarum abſciſſæ lineæ O A N quantitate A a ſucceſſivè auctæ ſunt Logarithmi, ſiquidem in utrâque progreſſione occurrunt termini A B & M P eodem intervallo in utraque diſſiti: ſed ſi in punctis æquidiſtantibus lineæ cujuſvis erigantur perpendiculares in progreſſione Geometricâ, Logarithmica aliqua earum vertices tanget (*Cor. Theor.* I.) Ergo ſi dentur numeri cum ſuis Logarithmis, concipi ſemper poterit Logarithmica cujus abſciſſæ ſint illi Logarithmi & cujus ordinatæ ſint quantitates quibus reſpondent.

31. Theor. III. *Axis logarithmicæ eſt ejus Aſymptotus ad quam ab unâ parte accedit propius datâ quâvis quantitate, nunquam tamen eam attingit, & à qua ab alterâ parte longius recedit datâ quâvis quantitate.*

Sint

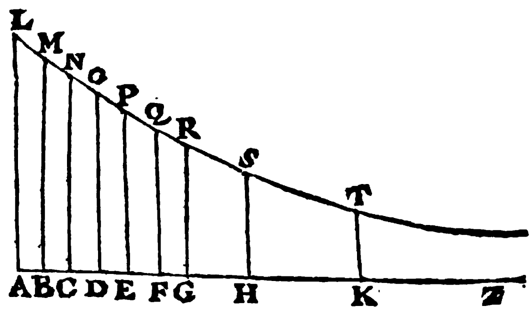
Sint duæ ordinatæ A B, M P quarum una ſit alterius dupla vel pluſquam dupla, feratur portio axis A M hinc inde ſecundum axem ſine fine, ordinatæ in ea puncta erecta creſcent ab unâ parte, & ab alterâ decreſcent in ratione duplâ vel pluſquam duplâ (*per Cor. Theor. I.*) ſed ex Principiis *Archimedeis* quantitas creſcens in progreſſione duplâ vel pluſquam duplâ omnem quantitatem datam tandem excedet, & ex Principiis *Euclideis* quantitas quævis decreſcens in ratione duplâ vel pluſquam duplâ minor ſit quâvis quantitate datâ; Ergo Logarithmicâ longius ab axe recedit, aut propiùs ad eum accedit quâvis quantitate datâ, numquam tamen eum attinget, attingat enim eum ſi fieri poteſt in quodam puncto X, ferendo diſtantiam A M ſecundum axem, fiet tandem ut cadat proximè citra X, putà in Y, tum proximè ultra, ut in Z; in puncto Y nondum attinget axem ex Hypotheſi, & aliquo intervallo Y V ab eo diſtabit, ſed quia Y Z = A M debebit eſſe A B : MP = Y V ad ordinatam in Z, qua ideò dabitur, ac per conſequens Logarithmica nondum attinget axem in Z, nedum eum attigerit in X. Q. E. D.

36. Theor. IV. *Subtangens Logarithmicæ eſt conſtans.* Capiantur enim ubivis in axe particulæ æquales quamminimæ M m, N n, erectiſque ordinatis M P, m p, & NQ, n q, per puncta P & Q concipiantur tangentes P T, Q t axi occurrentes in T, t; ducantur etiam rectæ P r, Q s, ordinatis m p, n q perpendiculares. Evaneſcentibus ordinatarum diſtantiis M m, N n, triangulum P p r ſit ſimile triangulo T P M, & Triangulum Q q s ſimile triangulo t Q N, ideoque eſt p r : P M = P r (ſive M m) : M T, & q s : Q N = N n (ſive M m) : N t, ſed ob diſtantias M m, N n æquales eſt p m : PM = qn : QN & dividendo eſt p r : PM = qs : QN, quare P r (ſive M m) : M T = N n (ſive M m) : N t, adeoque M T = N t. Q. E. D.

Cor. *Hinc cùm ordinata ſit ad ſubtangentem conſtantem ut fluxio ordinatæ ad fluxionem abſciſſæ, obtinetur Logarithmicæ æquatio fluxionalis.* Abſciſſa A M dicatur x, ordinata M P y, ſubtangens M T, s, fluxio M m erit dx, p r = dy, cùmque ſit $y : s = dy : dx$, eſt $y\,dx = s\,dy$ æquatio ad Logarithmicam.

37. PROBL. I. *Datâ ſubtangente & duabus ordinatis Logarithmicæ, invenire portionem axis inter eas ordinatas interceptam.* 37.

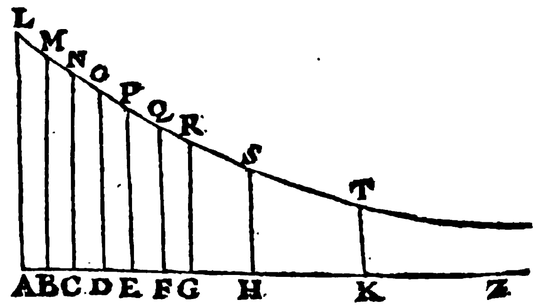
I*us* *Caſus.* Minor è duabus ordinatis ſit ipſa unitas G R, altera verò ordinata L A dicatur y, &, ad vitandum ſeries minus commodas, fingatur quantitas $z =$



$\frac{y-1}{y+1}$, ita ut ſit $yz + z = y - 1$, unde habetur $y = \frac{1+z}{1-z}$; ſumptiſque fluxionibus, fit $y\,dz + z\,dy + dz = dy$, & invenitur $dy = \frac{y+1}{1-z}\,dz$, ſive, inſerto valore ipſius y, fit $dy = \frac{\frac{1+z}{1-z}+1}{1-z}\,dz$, reductiſque fractionibus $\frac{2}{\overline{1-z}\times\overline{1-z}}\,dz = dy$. Cùm ergo æquatio ad Logarithmicam ſit (*per Theor. IV.*) $y\,dx = s\,dy$, inſertis in hac æquatione valoribus y & dy, iila evadit $\frac{1+z}{1-z}\,dx = \frac{2s}{\overline{1-z}\times\overline{1-z}}\,dz$, ex quâ deducitur $dx = \frac{2s\times\overline{1-z}}{1\times z\times\overline{1-z}\times\overline{1-z}}\,dz$ ſive $dx = \frac{2s}{\overline{1+z}\times\overline{1-z}}\,dz = \frac{2s}{1-z^2}\,dz$; reducatur in ſeriem iſte

 valor,

valor, obtinebitur $dx = 2s \times dz + z^2 dz + z^4 dz + z^6 dz + z^8 dz$ &c. & ſumptis fluentibus $x = 2s + z. + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9}$ &c. & loco z ſcripto ejus valore $\frac{y-1}{y+1}$ pro valore portionis G A axis interceptæ inter G R & A L $x = 2s \times \frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3} \times \frac{\overline{y-1}^3}{\overline{y+1}^3} + \frac{1}{5} \times \frac{\overline{y-1}^5}{\overline{y+1}^5} + \frac{1}{7} \frac{\overline{y-1}^7}{\overline{y+1}^7}$ &c.



2us Caſus. Quæratur valor portionis axis interceptæ inter ordinatas O D & M B, ſit O D $= n$ & M B $= m$ hæcque ſit major ordinata; fiat $n : m :: 1 : y$, erit $y = \frac{m}{n}$, quæratur per hujus Problematis caſum primum portio axeos intercepta inter ordinatam G R unitati æqualem & ordinatam y ſive $\frac{m}{n}$, & erit ea portio æqualis B D ſive portioni axeos interceptæ inter ordinatas O D & M B, propter proportionem Geometricam quæ eſt inter O D, M B, unitatem & ordinatam y, ut patet ex *Theor. I. n°.* 33.

3us Caſus. Si ordinata S H ſit unitate minor & quæratur portio axeos intercepta inter illam & unitatem G R, dicatur ea ordinata S H $= p$, fiatque ut $p : 1 = 1 : y$, erit $y = \frac{1}{p}$ quantitas unitate major; quæratur per primum caſum hujuſce Problematis valor portionis axeos interceptæ inter G R & ordinatam y, & ex præcedentis caſûs demonſtratione, liquet eum ipſum fore valorem abſciſſæ G H, ſed quoniam punctum G unitati reſpondens, cenſetur axeos origo, portio axis inter G & ordinatam y intercepta poſitiva eſt, dum portio axis a puncto G ad ordinatam S H, negativa cenſeri, & negativo ſigno affici debet.

4us Caſus. Si denique duæ ordinatæ S H, T K ſint ſingulæ unitate minores, quæraturque portio axeos inter ambas intercepta, fiat ut prius S H : T K $= 1 : y$, & portio axeos intercepta inter G R & ordinatam y erit æqualis illi quæ intercipitur inter S H & T K.

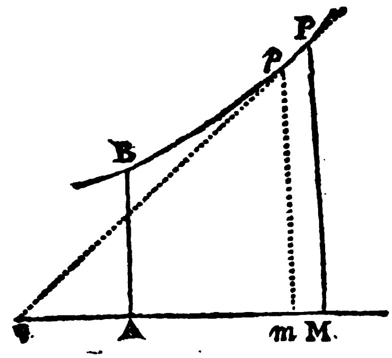
Cor. 1. *Si una ex ordinatis ſit unitas portio axis quæſita* x *erit alterius ordinatæ abſciſſa, ideoque ejus erit Logarithmus*, poſitivus quidem ſi ea ordinata ſit unitate major, negativus verò ſi unitate ſit minor.

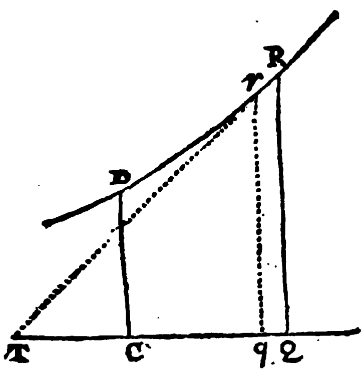
Si verò duæ ordinatæ ab unitate differant, portio axis intercepta x, *erit rationis inter eas ordinatas exiſtentis Logarithmus*: poſitivus quidem, ſi major ordinata numeratorem, fractionis rationem exprimentis, conſtituat; negativus verò ſi minor ordinata numeratoris ſedem occupare cenſeatur.

Cor. 2. *Sit ut in primo caſu ordinata G R* $= 1$, *ordinata L A* $= y$ *ſit* 2; *ſubtangens Logarithmicæ L R T ſit etiam unitas; invenitur G A, ſive* x, *Logarithmus nempe numeri binarii* $= .6931471$ &c. Nam in valore $x = 2s \times \frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3} \times \frac{\overline{y-1}^3}{\overline{y+1}^3} + \frac{1}{5} \times \frac{\overline{y-1}^5}{\overline{y+1}^5}$ &c. ſcripto 1 loco s; & 2 loco y ſeries fit $x = 2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{27} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{243} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{2187}$ &c. quorum terminorum calculus facilis eſt, & ſi per Decimales inſtituatur, invenietur abſciſſa quæſita x, ſive numeri binarii Logarithmus, $= .6931471$ &c.

Similiter ſi fiat $y = \frac{3}{2}$ ideoque $y - 1$

$= \frac{1}{2}$





$= \frac{1}{2}$ & $y + 1 = \frac{5}{2}$ fractio $\frac{y-1}{y+1} = \frac{1}{5}$ ſive 0. 2 & ſeries fit $x = 2 \times 0.2 + \frac{0.008}{3} + \frac{0.00032}{5} + \frac{0.0000128}{7} + \frac{0.000000512}{9}$ &c. $= .4054651$ quod additum Logarithmo numeri binarii, habetur Logarithmus numeri ternarii, 1.0986122 &c.

Si fiat $y = \frac{5}{4}$ ideoque fit $y - 1 = \frac{1}{4}$, & $y + 1 = \frac{9}{4}$, eſt fractio $\frac{y-1}{y+1} = \frac{1}{9}$ & ſeries fit $x = 2 \times \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{729} + \frac{1}{5} + \frac{1}{59049}$ &c. quæ ſeries citiſſimè convergit eſtque $x = .2231433$ &c. cui ſi addatur duplum Logarithmi numeri binarii, habetur Logarithmus quinarii, 1.6094378, & addito iterum Logarithmo binarii, habetur Logarithmus denarii, 2.3025849.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECTIO I.

38. Theor. V. *Sint duæ diverſæ Logarithmicæ, in utrâque ſumantur ordinatæ æquales, abſciſſæ illis ordinatis correſpondentes in utrâque Logarithmicâ erunt ut earum Logarithmicarum ſubtangentes, adeoque in conſtanti ratione.*

Sint duæ Logarithmicæ P B, R D prioris ſubtangens ſit M S $= s$, ſubtangens alterius ſit Q T $= t$; Ordinatæ P M, R Q in utrâque ſumptæ ſint æquales dicanturque y; ſint ordinatæ B A & D C æquales unitati; abſciſſa A M dicatur x, & C Q, z; dico fore $s : t = x : z$. 38.

Id enim patet ex formâ ſeriei quæ exhibet abſciſſæ valorem; Nam, ſi in Logarithmicâ P B quæratur valor x pro ordinatâ y, habebitur, per caſum primum Problematis primi, $x = 2s \times \frac{y-z}{y+1} + \frac{1}{3}\frac{\overline{y-1}^3}{\overline{y+1}^3} + \frac{1}{5}\frac{\overline{y-1}^5}{\overline{y+1}^5}$ &c. Et ſi in Logarithmicâ R D quæratur valor abſciſſæ z pro ordinatâ y habebitur, per eundem caſum Probl. I. $z = 2t \times \frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3}\frac{\overline{y-1}^3}{\overline{y+1}^3} + \frac{1}{5}\frac{\overline{y-1}^5}{\overline{y+1}^5}$ &c. Cùm ergo duæ ſeries quæ exprimunt valorem abſciſſarum x & z iiſdem terminis conſtent, ductis in priori ſerie per $2s$, in alterâ ſerie per $2t$; liquet eſſe x ad z ut $2s$ ad $2t$, ſive $s : t = x : z$. Q. E. D.

Cor. 1. Hinc liquet quod (manente unitate) logarithmicæ quarum eædem erunt Subtangentes, in omnibus erunt æquales, quippe ſi ſumantur in iis æquales ordinatæ, abſciſſæ etiam æquales erunt.

Cor. 2. Logarithmicæ verò diverſæ ſpeciei dicentur, quarum ſubtangentes erunt diverſæ; & Logarithmi diverſæ ſpeciei dicentur, ubi eiſdem quantitatibus Logarithmi diverſi reſpondebunt, unde etiam Logarithmicæ ad quas pertinent diverſæ illæ Logarithmorum ſpecies, habebunt diverſas ſubtangentes (*per hoc Theor.*) ideoque erunt diverſæ ſpeciei.

Cor. 3. *Datis Logarithmis cujuſvis ſpeciei; Logarithmi alius ſpeciei eiſdem numeris reſ-*

reſpondentes inveniri poſſunt, ſi dentur ſubtangentes utriuſque ſpeciei; Hinc ſi dentur Logarithmi quorum ſubtangens eſt unitas (qui Hyperbolici dicuntur), ſitque data ſubtangens alius ſpeciei .4342944 multiplicentur Logarithmi dati per hunc numerum, habebunturque eorumdem numerorum Logarithmi in hac alterâ ſpecie, ut liquet ex hoc Theor. Ideoque in poſterum per hanc expreſſionem L. x, intelligemus Logarithmum Hyperbolicum quantitatis x, qui ſi multiplicetur per quantitatem quamlibet ut a, a L. x exprimet Logarithmum x ex eâ ſpecie depromptum quæ habet a pro ſubtangente, eſt enim $1 : a =$ L. x ad eum Logarithmum qui ergo erit a L. x.

39. Probl. II. *Datâ ordinatâ Logarithmicæ & ejus abſciſſâ, invenire ejus ſubtangentem, dummodo alterius cujuſlibet Logarithmicæ ſubtangens ſit data.*

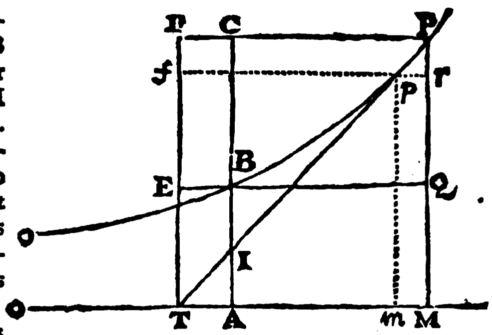
Data ſit ſubtangens Logarithmicæ P B, Logarithmicæ verò R D data ſit abſciſſa C Q & ordinata Q R, quæritur hujus Logarithmicæ ſubtangens: Quæratur primùm abſciſſa quæ in Logarithmica P B reſponderet ordinatæ æquali Q R, per Probl. I. ſitque ea A M, fiatque ut A M ad C Q ita ſubtangens data ad quæſitam.

Exempl. In tabulis Logarithmorum, Logarithmus numeri 2. eſt .3010300. ſi ergo concipiatur Logarithmica cujus abſciſſæ ſint Logarithmis tabularum æquales, & cujus ordinatæ ſint æquales numeris eis Logarithmis correſpondentibus, quæraturque ejus Logarithmicæ ſubtangens; invenitur in altera Logarithmica cujus ſubtangens eſt unitas abſciſſa reſpondens ordinatæ quæ ſit unitatis dupla (*per Cor. 2. Prob. I.*) quæ eſt .6931472. fiatque ut .6931472. ad .3010300. Ita unitas ad ſubtangentem Logarithmicæ tabularum quæ invenietur. 4342944.

Coroll. Hinc dato Logarithmo alicujus numeri deſumpto ex Logarithmica cujus ſubtangens data eſt, habebitur ejus numeri Logarithmus in tabulis, dicendo ut ſubtangens data ad .4342944. ita Logarithmus datus ad ejuſdem numeri Logarithmum in Tabulis.

40. Probl. III. *Sit quantitas variabilis, cujus Logarithmus etiam variabilis eſt, ex ejus quantitatis variabilis fluxione, fluxionem ejus Logarithmi determinare.* Concipiatur Logarithmica ad quam pertinet ſpecies Logarithmi quæ aſſumitur; ſit a ejus ſubtangens, ſitque y variabilis propoſita, quæ conſideretur ut ejus Logarithmicæ ordinata, ſitque x ejuſdem Logarithmicæ abſciſſa ei ordinatæ y reſpondens, erit per naturam Logarithmicæ (n. 36) $y\,dx = a\,dy$ & $dx = \frac{a\,dy}{y}$, ſed x eſt Logarithmus ordinatæ y, ergo dx eſt ejus fluxio, ergo $d\,\text{L.}\,y = \frac{a\,dy}{y}$ hoc eſt, fluxio Logarithmi eſt æqualis fluxioni variabilis propoſitæ diviſæ per ipſam variabilem, & ductæ in conſtantem quæ ſit ſubtangens Logarithmicæ ad quam pertinet ſpecies Logarithmi aſſumpti.

Et è converſo, ſi habeatur hæc fluxio $\frac{a\,dy}{y}$, ejus fluens eſt Logarithmus ipſius quantitatis y ex eâ Logarithmicâ deſumptus, cujus ſubtangens eſt a.



41. Theor. VI. *Spatium Logarithmicum A B P M duabus ordinatis A B, P M, & arcu B P & abſciſſâ A M comprehenſum, æquale eſt rectangulo ſubtangentis & differentiæ ordinatarum.*

Ductâ enim per punctum P tangente P T, compleatur rectangulum T F P M, agatur per B recta E Q, parallela T M, ſecans T F in E & M P in Q; per m ordinata m p alteri M P infinitè propinqua; & per p recta f r parallela T M, occurrens T F in f & M P in r; His poſitis (ob triangula P r p, P M T ſimilia) erit P r : p r = P M : M T, ſeu P F, ideóque rectangulum M m p r æquale erit rectangulo P F f r. Quarè ſi area logarithmica A B P M diviſa intelligatur in rectangula innumera ut

M p,

Mp; rectangulum EFPQ diviſum erit in totidem rectangula ut Fr correſpondentibus Mp, æqualia, & proinde area logarithmica ABPM æqualis eſt rectangulo EFPQ. Q. E. D.

Hinc *ſpatium Logarithmicum ABPM eſt ut ordinatarum AB, PM differentia PQ*, ob datam ſubtangentem TM (36.)

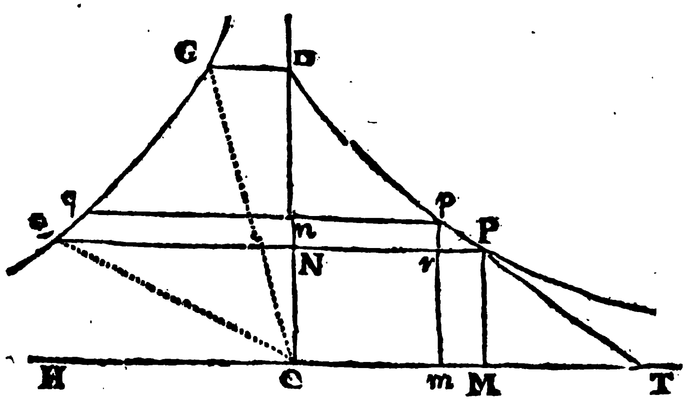
Trilineum verò logarithmicum $BPQ = PQ \times MT - AM \times BA$; & producta AB ut rectæ FP occurrat in C, erit trilineum logarithmicum $BPC = AC \times CP - CB \times MT$.

42. Coroll. 1. *Hinc ſpatium logarithmicum infinitè protenſum OOPM, quâ parte logarithmica ad aſymptotum MO continuò accedit, duplum eſt trianguli PTM.* Nam ob diſtantiam infinitam MO evaneſcit ordinata AB, fitque ſpatium OoPM, æquale rectangulo TFPM, ſub ordinatâ PM & ſubtangente MT contento.

43. Cor. 2. *Tangens PT (producta ſi opus eſt) ſecet ordinatam AB in I, & ſpatium logarithmicum BPC erit ut BI inter logarithmicam & tangentem intercepta.* Nam ob triangulorum TFP, ICP, ſimilitudinem, eſt TF ad FP, (ſeu AC ad MT) ut CI ad CP, & ideò $AC \times CP = MT \times CI$. Quarè (41) trilineum $BPC = AC \times CP - MT \times CB = MT \times CI - MT \times CB = MT \times BI$. Eſt igitur, ob datam MT, trilineum BPC ut BI. 44.

44. Theor. VII. *Aſymptotis orthogonalibus CH, CD deſcripta ſit hyperbola Qq G, & per punctum D in aſymptoto CD datum, logarithmica DpP axem habens CH productum; per punctum D agatur ad hyperbolam ordinata DG, & per punctum alterum quodvis N ordinata NQ quæ producta logarithmicæ occurrat in P; erit area hyperbolica NQGD, ad dignitatem hyperbolæ ſeu ad rectangulum CD × DG, in ratione rectæ NP ad ſubtangentem logarithmicæ.*

Agatur enim altera qp ipſi QP infini-

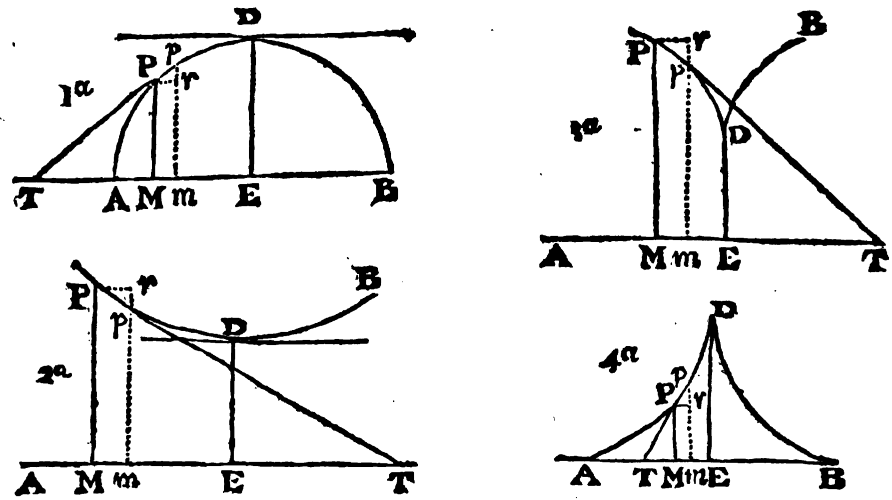


tè propinqua, ex punctis p, P demittantur ad axem CT perpendiculum pm ſecans QP in r & perpendiculum PM; PT tangat logarithmicam in P; erit ob triangula prP, PMT ſimilia, pr (ſeu Nn) : Pr = PM (ſeu CN) : MT, & (ex naturâ hyperbolæ *per theor. 4. de hyp. lib. 1.*) NQ : DG = CD : CN; ideóque per compoſitionem rationum & ex æquo $NQ \times Nn : Pr \times DG = CD : MT$; Quarè ob datas CD & MT, ſumma omnium rectangulorum $NQ \times Nn$, in quæ dividi poteſt area NQGD, hoc eſt, hæc area ipſa eſt ad rectangulum ſub datâ GD, & ſummâ omnium Pr, ſeu totâ rectâ NP, ut CD ad MT, proindèque $NQGD \times MT = NP \times GD \times CD$, & hinc $NQGD : GD \times CD = NP : MT$. Q. E. D.

45. Coroll. *Hinc* (ob datas MT, GD, CD) *area hyperbolica NQGD & proindè ſector CGQ ipſi æqualis* (377. lib. 1.) *eſt ut recta NP productio ordinatæ QN, inter aſymptotum hyperbolæ CD & logarithmicam intercepta.*

46. *Scholium.* Cùm Ill. Marchio *Polenus* in Epiſtolâ ad *Hermannum* Patavii an. 1729. editâ,

editâ, ità facilem & expeditam logarithmicæ deſcriptionem organicam, pro ingenii ſui ſagacitate invenerit, ut curva illa ſectionibus conicis haud difficilius conſtruatur, cùmque logarithmica per lineas rectas id præſtet quod hyperbola per ſectores vel quadrilatera ſua, in problematum conſtructionibus quæ per areas hyperbolicas abſolvuntur, loco hyperbolæ non malè uſurparetur logarithmica, quamvis ſi problema ad merum calculum reducatur, æquè benè poſſint uſurpari ſpatia hyperbolica, quàm abſciſſæ logarithmicæ. Quomodo autem conſtructiones quæ per ſpatia hyperbolica fiunt, ad logarithmicam transferantur, pluribus exemplis oſtendemus deinceps.



De Maximis & Minimis.

47. Theor. *Si quantitas variabilis,* (quam exponat recta P M curvæ P D B ordinata) *ad certum uſque terminum D continuò creſcat & poſteà decreſcat, vel contrà decreſcat primùm & deindè creſcat.* Actaque ſit altera ordinata p m priori P M infinitè propinqua, & per punctum P recta P r abſciſſæ A P parallela ſecans p m in r, *ratio incrementi vel decrementi evaneſcentis p r ordinatæ P M, ad incrementum evaneſcens M m abſciſſæ A M in puncto D ubi ordinata M P omnium maxima vel minima evadit, infinita eſt vel nulla.*

Per punctum P ducatur P T tangens curvam in P, & abſciſſæ occurrens in T, & propter ſimilitudinem triangulorum p r P P M T, erit p r ad P r, ſeu M m ut P M ad M T. Sed ſi coincidente puncto P cum D, tangens P T evadat abſciſſæ A E parallela & proindè M P fiat maxima vel minima ordinata E D ut in figurâ 1a. & 2a. punctum T in infinitum abit, & ideò ratio P M ad M T ſeu ratio p r ad M m nulla eſt. Contrà verò ſi coincidente P cum D, tangens P T cum ordinatâ maximâ vel minima D E conveniat, ut in figurâ 3. & 4. evaneſcit ſubtangens M T & ratio P M ad M T, ſive p r ad M m infinita evadit.

48. *Coroll.* 1. Ut ex datâ æquatione inter abſciſſam A M & ordinatam M P, inveniatur valor abſciſſæ A E cui maxima vel minima applicata E D ordinatur, ſumenda eſt æquationis fluxio, & ratio fluxionis ordinatæ ad fluxionem abſciſſæ, ſeu ratio p r ad M m, eaque vel infinito vel nihilo æquanda eſt, aut quod idem eſt, factâ M m conſtante, fluxio ordinatæ vel infinito vel nihilo æqualis ſupponenda.

49. *Corol.* 2. Si quantitas variabilis cujus maximum vel minimum quæritur non ſit ordinata curvæ, poteſt illa ſupponi æqualis ordinatæ curvæ alicujus in datam quantitatem ductæ, uti ſi propoſi-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. I. PROP. I. THEOR. I.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Corporis, cui reſiſtitur in ratione velocitatis, motus ex reſiſtentiâ amiſſus, eſt ut ſpatium movendo confectum.

NAM cùm motus ſingulis temporis particulis æqualibus amiſſus ſit ut velocitas, hoc ([a]) eſt, ut itineris confecti particula, erit, componendo, motus toto tempore amiſſus, ut iter totum. *Q. E. D.*

Corol. Quare ſi corpus, gravitate omni deſtitutum, in ([b]) ſpatiis liberis ſolâ vi inſitâ moveatur; ac detur tum motus totus ſub initio, tum etiam motus reliquus poſt ſpatium aliquod confectum: ([c]) dabitur ſpatium totum quod corpus infinito tempore deſcribere poteſt. Erit enim ſpatium illud ad ſpatium jam deſcriptum, ut motus totus ſub initio ad motûs illius partem amiſſam.

LEMMA I.

Quantitates differentiis ſuis proportionales ſunt continuè proportionales.

Sit A ad A — B ut B ad B — C & C ad C—D, &c. & convertendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D, &c. *Q. E. D.*

PRO-

ta eſſet quantitas variabilis $ax^2 - x^3$ in quâ a data eſt, x indeterminata, poneretur $ax^2 - x^3 = bby$, quæ eſt æquatio ad curvam cujus abſciſſa eſt x, & ordinata y, & hinc, ſumptis fluxionibus, foret $2axdx - 3x^2dx = bbdy$, & $2ax - 3x^2 = \frac{bbdy}{dx} = 0$ adeòque $2ax - 3xx = 0$ & $x = \frac{2}{3}a$. Si itàque loco x ſubſtituatur $\frac{2}{3}a$ in quantitate propoſitâ, obtinebitur maximum ejus $\frac{4}{9}a^3 - \frac{8}{27}a^3 = \frac{4}{27}a^3$. Idem inventum fuiſſet brevius, ſi nullâ factâ ſuppoſitione, fluxio variabilis propoſitæ videlicet $2axdx - 3x^2dx$, nihilo fuiſſet æquata.

(a) * *Hoc eſt, ut itineris confecti particula* (12) ob datum temporis momentum (ex hyp.)

(b) * *In ſpatiis liberis*, id eſt, in quibus nullum aliud eſt obſtaculum præter medii reſiſtentiam velocitati proportionalem. 49.

(c) * *Dabitur ſpatium totum quod corpus infinito tempore deſcribere poteſt*, hoc eſt, uſque ad motus exſtinctionem. (Oſtendetur autem infra, in nota f, infinitum tempus requiri ut motus omnis extinguatur, quando reſiſtitur motui in ratione velocitatis). Cùm ergo motus ad exſtinctionem uſque amiſſus, ſit ipſe motus totus, & motus amiſſi ſint ut ſpatia movendo confecta (*per Theor.*) erit motus totus ad motûs partem amiſſam poſt datum ſpatium deſcriptum, ut ſpatium ad exſtinctionem uſque motûs deſcriptum ad illud datum ſpatium. Unde liquet, ſpatium, quod corpus ad motûs uſque exſtinctionem deſcribit, finitum eſſe, cùm datam habeat rationem ad ſpatium finitum.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. I. Prop. II. Theor. I.

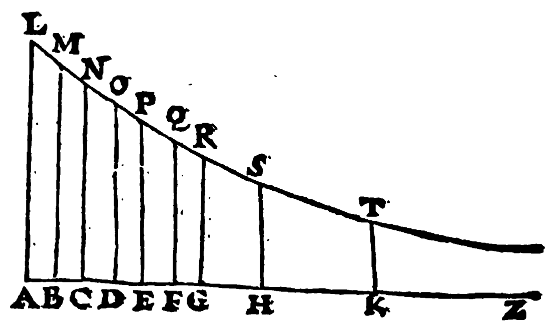
PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Si corpori reſiſtitur in ratione velocitatis, & idem ſolâ vi inſitâ per medium ſimilare moveatur, ſumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis ſingulorum temporum ſunt in progreſſione geometricâ, & ſpatia ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitates.

Caſ. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; & ſi ipſis particularum initiis agat vis reſiſtentiæ impulſu unico, quæ ſit ut velocitas: (d) erit decrementum velocitatis ſingulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis ſuis proportionales, & propterea (*per lem.* 1. *lib.* II.) continuè proportionales. (e) Proinde ſi ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipſis temporum initiis, ut termini in progreſſione continuâ, qui per ſaltum capiuntur omiſſo paſſim æquali termino-

(d) * *Erit decrementum velocitatis.* (15) ut reſiſtentia ob datum temporis momentum, ideoque (*per hyp.*) ut velocitas.

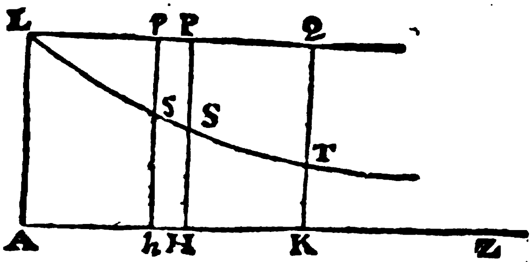
(e) 50. *Proinde ſi ex æquali* &c. Linea recta A Z in particulas æquales A B, B C, C D &c. diviſa, exponat tempus, & perpendicula A L, B M, C N &c. exponant velocitates ipſis ſingulorum temporum A B, B C, C D &c. initiis; erunt (ex Dem.) velocitates illæ in continuâ progreſſione geometricâ decreſcente. Proindè ſi ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, ut A E, E H, H K &c. erunt velocitates AL, E P, H S &c., ipſis temporum initiis ut termini qui è progreſſione geometricâ per ſaltum capiuntur, omiſſo paſſim æquali terminorum intermediorum B M, C N &c. & F Q, G R &c. numero. Componuntur autem horum terminorum A L, E P, H S &c., rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediorum æqualiter repetitis; nimirum ratio A L ad E P, componitur ex rationibus A L ad B M, B M ad C N &c., quæ tum magnitudine, tum numero æquales ſunt rationibus E P ad F Q; F Q ad G R &c. ex quibus componitur ratio E P ad S H, & ita porrò. Quarè ratio A L ad E P æqualis eſt rationi E P ad H S, & hæc æqualis rationi H S ad K T. Manifeſtum autem eſt (33) curvam L M N S T, ad quam terminantur perpendicula omnia A L, B M, C N &c., eſſe Logarithmicam.



norum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex rationibus inter ſe iiſdem terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea eæ quoque rationes compoſitæ inter ſe eædem ſunt. Igitur velocitates, his terminis proportionales, ſunt in progreſſione geometricâ. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ; & augeatur earum numerus in infinitum, eò ut reſiſtentiæ impulſus reddatur continuus; & velocitates in principiis æqualium temporum, ſemper continuè proportionales, erunt in hoc etiam caſu continuè proportionales. *Q. E. D.*

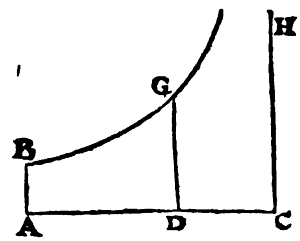
Caſ. 2. Et diviſim velocitatum differentiæ, hoc eſt, earum partes ſingulis temporibus amiſſæ, ſunt ut totæ: ſpatia autem ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitatum partes amiſſæ (*per prop.* 1. *lib.* 11.) & propterea etiam ut totæ. *Q. E. D.*

Corol.



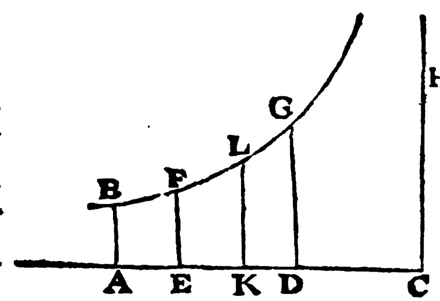
51. Si aſymptoto A Z deſcripta ſit Logarithmica quævis L S T, ad aſymptotum verſus Z accedens, & ordinata A L exponat velocitatem corporis initio motûs, abſciſſæque A H, A K, exponant tempora; erunt (50) ordinatæ H S, K T, ut velocitates reſiduæ elapſis temporibus A H, A K, & ideò ductâ per punctum L rectâ L Q, aſymptoto A Z parallelâ, & ordinatas productas H S, K T ſecante in P, Q, erunt P S, Q T ut velocitates amiſſæ, atque etiam ut ſpatia deſcripta, temporibus A H, A K, vel L P, L Q. Ductâ ordinatâ, h s, alteri H S, infinitè propinquâ, ſpatium velocitate uniformi A L, tempuſculo h H deſcriptum in vacuo, erit ad ſpatium eodem tempore cum velocitate H S, confectum in medio reſiſtente, ut rectangulum H P × H h, ad rectangulum S H × H h, ſeu aream H S s h (12) & ideò ſi totum tempus A H in particulas innumeras ut h H diviſum ſit, erit ſpatium cum velocitate A L, in vacuo deſcriptum toto tempore A H, ad ſpatium eodem tempore percurſum in medio reſiſtente ut rectangulum A P ad aream Logarithmicam A L S H; ſed area A L S H, æqualis eſt rectangulo ſubtangentis Logarithmicæ in P S, (39) & ideò ſi aſſumpta ſit A L ſubtangenti æqualis, eſt area A L S H, æqualis rectangulo A L × P S; Quarè in hâc hypotheſi, erit ſpatium prius ad poſterius ut L P, ad P S. 50.

Corol. Hinc ſi aſymptotis rectangulis *A C*, *CH* deſcribatur hyperbola *B G*, ſintque *A B*, *D G* ad aſymptoton *A C* perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum reſiſtentia medii, ipſo motus initio, per lineam quamvis datam *A C*, elapſo autem tempore aliquo per



lineâm indefinitam *DC*: exponi poteſt tempus per aream *ABGD*, & ſpatium eo tempore deſcriptum per lineam *AD*. (f) Nam ſi area illa per motum puncti *D* augeatur uniformiter ad modum temporis, decreſcet recta *D C* in ratione geometricâ ad modum velocitatis, & (g) partes rectæ *A C* æqualibus temporibus deſcriptæ decreſcent in eâdem ratione.

PRO-



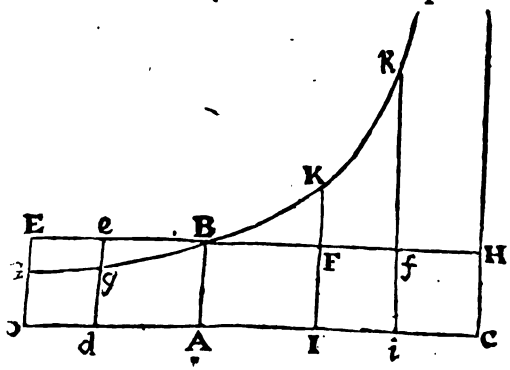
(f) * *Nam ſi area illa per motum puncti* D ſive ordinatæ D G *augeatur uniformiter ad modum temporis*, exhibeatque proindè tempus, *decreſcet recta* D C, *in ratione geometricâ* (380. lib. 1.) *ad modum velocitatis*, & ideò velocitatem poterit exponere (*per Caſ.* 1. *Dem.*) & quia recta A C exponit velocitatem ipſo motûs initio, & D C, velocitatem reſiduam elapſo tempore A B G D erit A D ut velocitas amiſſa, atque ideò ut ſpatium deſcriptum (*per prop.* 1. *hujus*). Quia verò coincidentibus punctis D & C, area ABGD infinita evadit, manifeſtum eſt tempore infinito finitum ſpatium A C deſcribi.

(g) * *Et partes rectæ* A C *æqualibus temporibus deſcriptæ decreſcent in eâdem ratione &c.* Nam ſi area A B G D ductis ordinatis F E, L K in partes æquales A B F E, E F L K, K L G D diviſa ſit, erunt lineæ CA, C E, C K, C D in progreſſione geometricâ decreſcente (380. *lib.* 1.) hoc eſt CA : CE = CE : CK = CK : CD, & dividendo A E : E K = E K : K D = C A : C E. Decreſcunt ergo partes rectæ A C in ratione velocitatis. Exponent igitur rectæ A E, E K, K D &c., ſpatia temporibus A B F E, E F L K, K L G D, deſcripta, & tota recta A D ſpatium toto tempore A B G D deſcriptum.

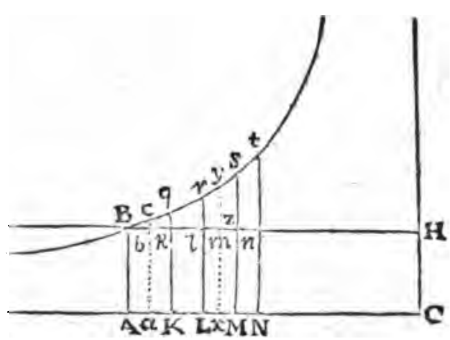
PROPOSITIO III. PROBLEMA I.

Corporis, cui, dum in medio ſimilari rectà aſcendit vel deſcendit, reſiſtitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.

Corpore aſcendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum *BACH*, & reſiſtentia medii initio aſcenſus per rectangulum *BADE* ſumptum ad contrarias partes rectæ *AB*. Aſymptotis rectangulis *AC*, *CH*, per punctum *B* deſcribatur hyperbola ſecans perpendicula *DE*, *de* in *G*, *g*, & corpus aſcendendo tempore *DGgd* deſcribet ſpatium *EGge*, tempore *DGBA* ſpatium aſcenſus totius *EGB*; tempore *ABKI* ſpatium deſcenſus *BFK*, atque tempore *IKki* ſpatium deſcenſus *KFfk*; & velocitates corporis (reſiſtentiæ medii proportionales) in horum temporum periodis erunt *ABED*, *ABed*, nulla, *ABFI*, *ABfi* reſpectivè; atque maxima velocitas, quam corpus deſcendendo poteſt acquirere, erit *BACH*.



(h) Reſolvatur enim rectangulum *BACH* in rectangula innumera *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn*, &c. quæ ſint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, *Ak*, *Al*, *Am*, *An*, &c. ut velocitates totæ, atque ideo (per hypotheſin) ut reſiſtentiæ medii principio ſingulorum temporum



(h) * *Reſolvatur enim &c.* Demonſtratio quæ ſequitur eſt pro corporis deſcenſu.

porum æqualium. (i) Fiat *AC* ad *AK* vel *ABHC* ad *ABkK* ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in principio temporis ſecundi, deque vi gravitatis ſubducantur reſiſtentiæ, & manebunt *ABHC*, *KkHC*, *LlHC*, *MmHC*, &c. ut vires abſolutæ quibus corpus in principio ſingulorum temporum urgetur, atque ideo (*per motûs legem* II.) ut incrementa velocitatum, id eſt, ut rectangula *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn*, &c. & (k) propterea (*per lem.* I. *lib.* II.) in progreſſione geometricâ. Quare ſi rectæ *Kk*, *Ll*, *Mm*, *Nn*, &c. productæ occurrant hyperbolæ in *q*, *r*, *s*, *t*, &c. erunt areæ *ABqK*, *KqrL*, *LrsM*, *MstN*, &c. (l) æquales, ideoque tum temporibus tum viribus gravitatis ſemper æqualibus analogæ. (m) Eſt autem area *ABqK* (*per corol.* 3. *lem.* VII. & *lem.* VIII. *lib.* I.) ad aream *Bkq* ut *Kq* ad $\frac{1}{2}$ *kq* ſeu *AC* ad $\frac{1}{2}$ *AK*, hoc eſt, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in medio temporis primi.

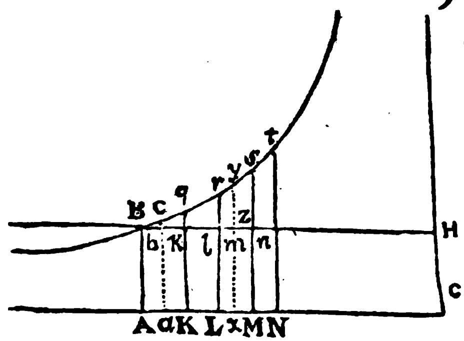
Et

(i) * *Fiat AC ad AK &c.* Cùm enim ſit AKkB, proportionalis reſiſtentiæ principio temporis ſecundi, ſi fiat AKkB ad ABHC ſeu AK ad AC, ut reſiſtentia illa ad gravitatem, rectangulum AH exponet vim gravitatis datam; & ſimili modo, cum ſit Al, ad Ak, ut reſiſtentia initio temporis tertii ad reſiſtentiam initio temporis ſecundi, erit, ex æquo perturbare Al ad AH, ſeu AL ad AC, ut reſiſtentia in principio temporis tertii ad gravitatem, & ità deinceps. Quoniam verò gravitas motum corporis cadentis accelerat quem reſiſtentia retardat, de vi gravitatis auferenda eſt vis reſiſtentiæ ut habeatur vis abſoluta quâ corpus deorſum urgetur.

(k) * *Et propereà.* Rectangula ABHC, KkHC, LlHC &c. differentiis ſuis Ak, Kl &c., proportionalia, erunt in progreſſione geometricâ (*per Lem.* I. *lib.* 2.)

(l) * *Æquales.* (380) lib. I.)

(m) *Eſt autem area ABqK* (*per cor.* 3. *Lem. VII. & lem. VIII. lib.* I.) *ad aream Bkq ut Kq ad* $\frac{1}{2}$ *kq ſeu ut AC ad* $\frac{1}{2}$ *AK.* Etenim per ea Lemmata has areas pro rectilineis ſumi poſſe conſtat, erigatur in medio partis AK perpendicularis ac ad Hyperbolam uſque, facile conſtabit ex Elementis trapezium ABqK fore ad Triangulum Bkq ut tota ea perpendicularis ac (pro quâ Kq ſumi poterit) ad portionem ejus bc intrà Triangulum comprehenſam, quæ erit (*ex conſt. & 2â. 6ti. Elem.*) $= \frac{1}{2}$ kq, eſt verò ex natura Hyperboles ea perpendicularis ac ad AB, ut AC ad Ca ſive AC $- \frac{1}{2}$ AK & dividendo, eſt ea perpendicularis ac ad ac $-$ ab ſive bc quæ eſt $\frac{1}{2}$ kq ut AC ad AC $-$ AC $+ \frac{1}{2}$ AK ſive $\frac{1}{2}$ AK; Ergo area ABqK eſt ad aream Bqk ut AC ad $\frac{1}{2}$ AK, ſive ut Rectangulum ABCH ad Rect. $\frac{1}{2}$ ABkK, ſeu *ut vis gravitatis* quam exponit Rectang. AH ad *reſiſtentiam in medio temporis primi* quam exponit rectang. Ak. Cùm enim ſit AK ut velocitas toto primo tempore acquiſita, erit $\frac{1}{2}$ AK ut velocitas in medio temporis primi acquiſita; reſiſtentiæ autem ſunt velocitatibus analogæ.



Et (n) ſimili argumento areæ *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. ſunt ad areas *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. ut vires gravitatis ad reſiſtentias in medio temporis ſecundi, tertii, quarti, &c. Proindè cùm areæ æquales *BAKq*, *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. ſint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ *Bkq*, *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. reſiſtentiis in mediis ſingulorum temporum, hoc eſt (per hypotheſin) velocitatibus, atque (o) ideo deſcriptis ſpatiis analogæ. Sumantur analogarum ſummæ, & erunt areæ *Bkq*, *Blr*, *Bms*, *Bnt*, &c. ſpatiis totis deſcriptis analogæ; necnon areæ *ABqK*, *ABrL*, *ABsM*, *ABtN*, &c. temporibus. Corpus igitur inter deſcendendum, tempore quovis *ABrL*, deſcribit ſpatium *Blr*, & tempore *LrtN* ſpatium *rlnt*. *Q.E.D.*

Et (p) ſimilis eſt demonſtratio motûs expoſiti in aſcenſu, *Q.E.D.*

Co-

(n) *Et ſimili argumento areæ.* Sumptis enim iſtis areis pro Trapeziis rectilineis: ducantur perpendiculares x z y in medio partium A K, K L, L M, M N ad Hyperbolam uſque, & (*ex elementis*) facile conſtabit quod area tota ſinguli trapezii (v. gr. r L M s) eſt ad ejus areæ portionem ſupra B H poſitam (nempe r l m s) ut linea tota x y per medium trapezii ducta ad ejus partem z y ſupra B H, ſed ex naturâ Hyperbolæ eſt ea perpendicularis x y ad A B ſive x z, ut A C ad abſciſſam C x illi perpendiculari reſpondentem (quæ eſt C L — $\frac{1}{2}$ L M), & dividendo, eſt ea perpendicularis x y ad ejus partem z y ſupra B H, ut A C ad A x portionem abſciſſæ inter A & eam perpendicularem (hoc eſt, in exemplo aſſumpto, ut A C ad A L + $\frac{1}{2}$ L M). Ergo area tota ſinguli trapezii ad ejus areæ portionem ſupra B H, ut A C ad A x portionem abſciſſæ inter A & medium partis cujuſvis aſſumptæ, ſive (aſſumpta communi altitudine A B) ut Rectangulum A H, ad Rectangulum ſub A B & lineâ inter A & medium partis aſſumptæ comprehenſa; ſed illud eſt ut vis gravitatis, hoc ut velocitas ac proinde ut reſiſtentia in medio temporis cui reſpondet pars aſſumpta, ergo alternando, area ſinguli trapezii eſt ad vim gravitatis ut portio trapezii ſupra B H ad reſiſtentiam ſive ad velocitatem in medio temporis cui reſpondet trapezium, ſed areæ totæ trapeziorum ſunt ubique æquales, & vis gravitatis ſemper eadem, conſtans ergo eſt eorum ratio; ergo, portiones trapeziorum ſuper B H, ut r l m s ſunt ſicut reſiſtentiæ ſive ut velocitates, adeóque ut ſpatia ſingulis tempuſculis quibus reſpondent deſcripta.

(o) * *Atque ideò deſcriptis ſpatiis analogæ.* Spatia enim ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitates per Prop. II. hujuſce libri.

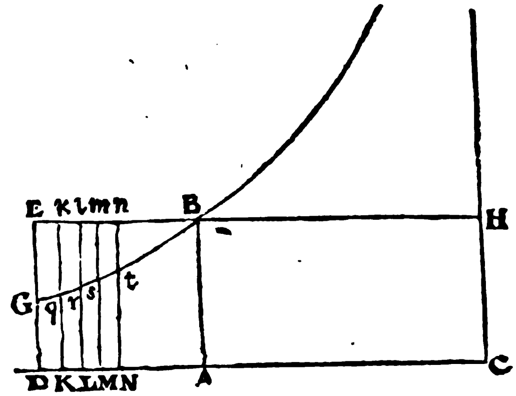
(p) *Et ſimilis eſt demonſtratio.* Reſolvatur enim rectangulum D B in rectangula innumera D k, K l, L m, M n &c. quæ ſint ut decrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta, & erunt, nihil D k, D l, D m, D n &c., ut velo-

ſo.

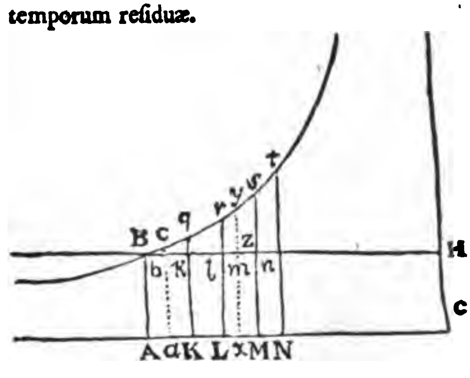
Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo poteſt acquirere, eſt ad velocitatem dato quovis tempore acquiſitam, ut vis data gravitatis, quâ corpus illud perpetuò urgetur, ad vim reſiſtentiæ, quâ (q) in fine temporis illius impeditur. *Co-*

citates totæ amiſſæ in principio ſingulorum temporum æqualium. Quia igitur totum rectangulum D B, exponit (*per hyp.*) velocitatem corporis & reſiſtentiam medii velocitati proportionalem initio aſcenſus, rectangula A E, A k, A l, A m, A n &c., exponent velocitates reſiduas, reſiſtentiaſque medii initio ſingulorum temporum æqualium. Fiat A C, ad A k, ſive Rectang. A H ad Rectang. A k, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam principio temporis ſecundi, & vi gravitatis addatur reſiſtentia (quod gravitas & reſiſtentia corporis aſcendentis motum retardent) & erunt D E H C, K k H C, L l H C, M m H C &c., ut vires abſolutæ quibus corpus in principio ſingulorum temporum retardatur, atquè ideò (*per mot. leg.* 2.) vel *per not.* 18.) ut decrementa velocitatum, id eſt, ut rectangula D k, K l, L m, M n &c., & propterea (*per Lem.* 1. *Lib.* 2.) in progreſſione geometricâ. Quarè ſi rectæ K k, L l, M m, N n &c., occurrant hyperbolæ in q, r, s, t, &c. erunt areæ D G q k, k q r L, L r s M, M s t N &c. æquales, ideóque tum temporibus, tum viribus gravitatis ſemper æqualibus analogæ.

Erigatur in medio partis D K perpendicularis uſque ad E B, erit area D G q K ad aream G E k q ut pars ejus perpendicularis ad Hyperbolam ordinata ad ejus partem reliquam uſque ad E B, ſed (*per Theor.* 4. *de Hyperbola*, ea ordinata ad Hyperbolam eſt ad A B ſive ad totam perpendicularem, ut A C ad ejus ordinatæ abſciſſam, ideoque dividendo, eſt ea ordinata ad perpendicularis partem reliquam uſque ad lineam E B, ſive eſt area D G q K ad aream G E k q ut A C ad portionem abſciſſæ inter A & perpendicularem, & aſſumptâ communi altitudine A B, ut Rectangulum A H ad Rectangulum ſub A B & portione abſciſſæ inter A & perpendicularem, ideoque area D G q K ad aream G E k q ut vis gravitatis ad reſiſtentiam ſi-



ve velocitatem reſiduam in medio temporis primi, cùmque vis gravitatis ſit ubique eadem & areæ D G q K, q K L r, ubique æquales, areæ G E k q, k q r l, &c. erunt ſemper ut reſiſtentiæ in ſingulis temporibus ſive ut velocitates, ideoque ut ſpatia ſingulis tempuſculis deſcripta, ac per conſequens areæ totæ G E n t, erunt ut ſpatia toto tempore G D N t deſcripta, dum areæ A B N n erunt ut velocitates in fine eorum temporum reſiduæ.



(q) * *In fine temporis illius impeditur.* Eſt enim velocitas dato tempore, A B r L acquiſita, ad velocitatem aliò quovis tempore A B t N acquiſitam, ut rectangulum A l ad re-

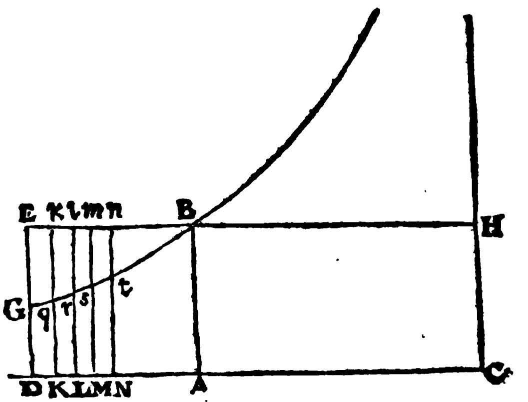
Corol. 2. Tempore autem aucto in progreſſione arithmeticâ, ſumma velocitatis illius maximæ ac velocitatis in aſcenſu, atque etiam earundem differentia in deſcenſu (r) decreſcit in progreſſione geometricâ.

Corol. 3. (ſ) Sed & differentiæ ſpatiorum, quæ in æqualibus

rectangulum A n, ſivè ut linea data A L, ad lineam A N, (ex dem.), & ideò velocitas corporis cadentis cum areâ A B t N, ſeu cum tempore continuò creſcit. Sed coincidentibus puncto N cum puncto C & ordinatâ N t cum aſymptoto C H, area A B t N infinita evadit, hoc eſt, tempus fit infinitum & velocitas maxima; Quarè velocitas maxima quæ etiam *terminalis* dicitur, eſt ad velocitatem dato quovis tempore A B r L, acquiſitam ut A C ad A L, ſeu ut rectangulum A H, ad rectangulum A I, hoc eſt, (*ex dem.*) ut vis gravitatis ad vim reſiſtentiæ in fine temporis A B r L.

(r) * *Decreſcit in progreſſione geometricâ.* In aſcenſu corporis temporibus D G q k, D G r l, D G s M &c. in arithmeticâ progreſſione creſcentibus, abſciſſæ C D, C K, C L, &c. in progreſſione geometricâ decreſcunt (380. *lib.* 1.) ſed ſingulæ abſciſſæ illæ ſunt (*ex dem.*) ut ſumma velocitatis maximæ quam exponit linea C A, & velocitatis reſiduæ quam exponit linea A K vel A L, vel A M &c., in fine temporis D G q k, vel D G r l, vel D G s M &c. Quarè tempore aucto in progreſſione arithmeticâ, ſumma velocitatis maximæ ac velocitatis in aſcenſu reſiduæ decreſcit in progreſſione geometricâ. Simili modo in deſcenſu corporis patet quod creſcentibus temporibus (vid. fig. notæ ſuper.) A B q k, A B r L, ABsM &c., in progreſſione arithmeticâ, abſciſſæ C A, C K, C L, C M &c., decreſcunt in progreſſione geometricâ (380. *lib.* 1.), ſed abſciſſæ illæ ſunt ut differentiæ velocitatis maximæ quam exhibet linea A C & velocitatis acquiſitæ quam exponit linea A K, vel A L, vel A M &c., creſcente igitur tempore in progreſſione arithmeticâ, differentia velocitatis maximæ, & velocitatis dato quovis tempore in deſcenſu acquiſitæ, decreſcit in progreſſione geometricâ: Hinc ſi ſumma illa in aſcenſu & differentia in deſcenſu numeris exprimantur, erunt tempora ut eorum numerorum Logarithmi.

(ſ) * *Sed & differentiæ ſpatiorum.* Nam ſi in aſcenſu corporis capiantur tempora D G q K, K q r L, L r s M, M s t N &c. æqualia, erit ſpatium primo tempore deſcriptum ut G E k q = D K × D E — D G q K; ſpatium tempore ſecundo deſcriptum ut q k l r = K L × D E — K q r L (ſive quia K q r L = D G q K) = KL×DE — D G q K, & ità de cæteris. Quarè differentia ſpatiorum primo & ſecundo tempore deſcriptorum eſt ut D K × D E — K L × D E, id eſt, ob datam D E, ut D K — K L; & ſimili argumento differentia ſpatiorum ſecundi & tertii temporis eſt ut



K L — L M; differentia ſpatiorum tertii & quarti temporis ut L M — M N. Erunt igitur differentiæ ſpatiorum quæ in æqualibus temporum differentiis deſcribuntur ut differentiæ D K — K L, K L — L M, L M — M N &c., ſed (*ex dem.*) termini D K, K L, L M, M N &c., decreſcunt ut termini progreſſionis geometricæ D C, K C, L C, M C &c. Ergò differentiæ D K — K L, K L — L M, L M — M N &c., decreſcunt ut D K, K L, L M, M N &c., ſeu ut termini progreſſionis geometricæ D C, K C, L C, M C &c. Eadem eſt demonſtratio pro deſcenſu.

temporum differentiis deſcribuntur, decreſcunt in eâdem progreſſione geometricâ.

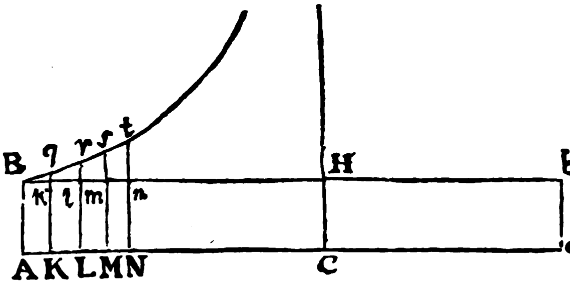
Corol. 4. Spatium verò à corpore deſcriptum differentia eſt duorum ſpatiorum quorum alterum eſt ut tempus ſumptum ab initio deſcenſus, & (t) alterum ut velocitas, quæ etiam ipſo (u) deſcensûs initio æquantur inter ſe. PRO-

(t) * *Alterum ut velocitas.* Nam ſpatium tempore quovis A B t N, in deſcenſu deſcriptum, eſt ut area B t n, eſt autem area B t n = A B t N — A B n N, & eſt A B n N ut velocitas tempore A B t N acquiſita.

(u) * *Deſcensûs initio æquantur.* Deſcensûs initio eſt area naſcens A B q K æqualis rectangulo A B K k.

52. *Scholium.* Ex demonſtratis non ſolùm corporis aſcendentis aut è quiete deſcendentis motus determinatur, ſed etiam motus ejuſdem datâ cum velocitate deorſum projecti facilè inveniri poteſt. Nam velocitas projectionis vel æqualis eſt velocitati maximæ, quam in figuris ſuperioribus exponit linea A C, ſive rectangulum A H, aut velocitate maximâ minor eſt, aut eâ major. Si 1um. motus corporis deorſum verticaliter projecti æquabilis eſt, ob reſiſtentiam gravitati æqualem & contrariam. Si 2um. in lineâ A C (*vid. fig. prop.* 3.) capiatur A L, ad A C, ut velocitas projectionis data ad maximam, ſive ut reſiſtentia ad gravitatem, & tempore quovis L r t N, corpus deſcribet, ſpatium l r t n, & in fine illius temporis habebit velocitatem L l n N, eodem modo ac ſi è quiete cadendo tempore A B r L, acquiſiviſſet datam projectionis velocitatem A B l L, & deindè in motu perſeveraſſet.

53. Verùm ſi velocitas projectionis major ſit velocitate maximâ quam corpus cadendo acquirere poteſt, mutanda erit NEWTONI conſtructio. Cæteris enim manentibus ut in conſtructione pro corporum deſcenſu, producantur rectæ A C, & B H, ad a & b, ut ſit rectangulum A B b a ad rectangulum C H b a, ut reſiſtentia tota initio motus ad vim gravitatis: velocitas projectionis exponi poterit per rectangulum A B b a, cùm reſiſtentia ſit ipſi ſemper proportionalis, & corpus deſcendendo tempore quovis A B t N, deſcribet ſpatium

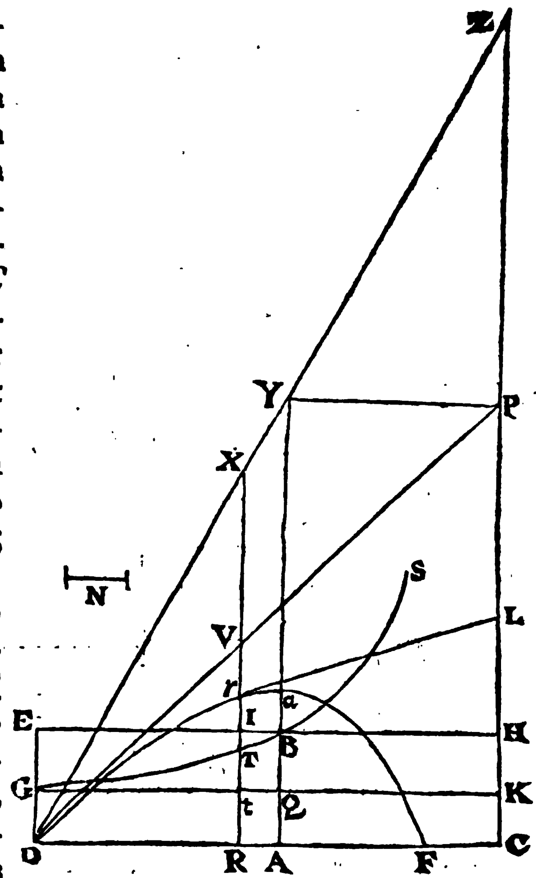


A B b a × A N + C a × B t n, & velocitatem habebit N n b a, & tempore infinito deſcribet ſpatium infinitum, velocitatemque habebit æqualem terminali ſive maximæ velocitati quam corpus è quiete cadendo acquirere poteſt. Reſolvatur enim rectangulum A H in rectangula innumera A k, K l, L m, M n, &c. quæ ſint ut decrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta. (cùm enim reſiſtentia gravitatem ſuperet, velocitas decreſcit) & erunt, nihil A k, A l, A m, A n, &c. ut velocitates amiſſæ, & ideò rectangula a B, a k, a l, a m, a n, &c., ut velocitates reſiduæ reſiſtentiis proportionales, principio ſingulorum temporum æqualium. Quoniam verò gravitas motum accelerat quem reſiſtentia retardat, de vi reſiſtentiæ ſubducatur gravitas C H b a, & manebunt rectangula A B H C, K k H C, L l H C, M m H C, &c. ut vires abſolutæ quibus corpus in principio ſingulorum temporum æqualium retardatur; atque ideò ut decrementa velocitatum, id eſt, ut rectangula A k, K l, L m, M n, & proptereà per Lem. 1. Lib. 2. in progreſſione geometricâ. Quarè (380. lib. 1.) erunt areæ A B q K, K q r L, L r s M, M s t N, &c. æquales, ideóque temporibus ſemper æqualibus analogæ. Elapſo igitur tempore quovis A B t N, corporis velocitas reſidua erit ut rectangulum N n b a, ſive ut recta N a, ſed ſpatia ſunt ut velocitas & tempus conjunctim, ergo

PROPOSITIO IV. PROBLEMA II.

Poſito quòd vis gravitatis in medio aliquo ſimilari uniformis ſit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis; definire motum projectilis in eodem, reſiſtentiam velocitatis proportionalem patientis.

Et loco quovis *D* egrediatur projectile ſecundum lineam quamvis rectam *DP*, & per longitudinem *DP* exponatur ejuſdem velocitas ſub initio motus. A puncto *P* ad lineam horizontalem *DC* (x) demittatur perpendiculum *PC*, & ſecetur *DC* in *A*, ut (y) ſit *DA* ad *AC* ut reſiſtentia medii, ex motu in altitudinem ſub initio orta, ad vim gravitatis; vel (z) (quod perinde eſt) ut ſit rectangulum ſub *DA* & *DP* ad rectangulum ſub *AC* & *CP* ut reſiſtentia tota ſub initio motus ad vim gravitatis. Aſymptotis *DC*, *CP* deſcribatur hyperbola quævis *GTBS* ſecans



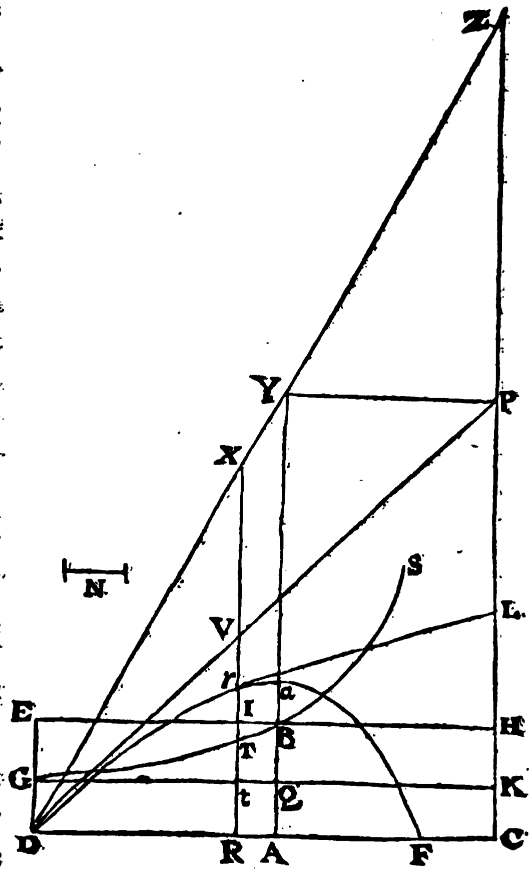
ergo ſpatia ſingulis tempuſculis deſcripta; ſunt ut ea velocitas Na ducta in tempus MstN, id eſt ut NC×tN×MN+Ca×tN×MN=ABHC×MN+Ca×MstN, (ob NC×tN=AB×CA, per theor. 4. de Hyp.) Quarè (componendo) ſpatium totum tempore ABtN deſcriptum, erit ut ABHC×AN+Ca×ABtN= ABba×AN+Ca×Btn, ob ABtN =AB×AN+Btn. Q.E.D.

(x) * *Demittatur perpendiculum PC*, & quoniam DP exponit velocitatem projectionis, CP exponet velocitatem verticalem, & DC velocitatem horizontalem, *per leg. motûs cor.* 1. & 2. 733

(y) * *Ut ſit DA ad AC ut reſiſtentia &c.*, aut, quod idem eſt (*per cor.* 1. *prop.* III.) ut ſit DA ad AC ut velocitas verticalis CP ad velocitatem maximam ſeu terminalem.

(z) * *Vel* (*quod perinde eſt*) *ut ſit rectangulum &c.* Nam cùm ſit DP ad CP

perpendicula DG, AB in G & B; & compleatur parallelogrammum $DGKC$ cujus latus GK ſecet AB in Q. Capiatur linea N in ratione ad QB quâ DC ſit ad CP; & ad rectæ DC punctum quodvis R erecto perpendiculo RT, quod hyperbolæ in T, & rectis EH, GK, DP in I, t & V occurrat; in eo cape Vr æqualem $\frac{tGT}{N}$, vel (a) quod perinde eſt, cape Rr æqualem $\frac{GTIE}{N}$; & projectile tempore $DRTG$ perveniet ad punctum r, deſcribens curvam lineam $DraF$, quam punctum r ſemper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem a in perpendiculo AB, & poſtea ſemper appropinquans ad aſymptoton PC. Eſtque velocitas ejus in puncto quovis r ut curvæ tangens rL. *Q. E. I.*



Eſt

ut velocitas tota projectionis ad velocitatem verticalem, ac proinde ex lege reſiſtentiæ ut reſiſtentia tota ſub initio ad reſiſtentiam ex motu in altitudinem, & cùm ſit D A ad A C ut reſiſtentia medii ex motu in altitudinem ad vim gravitatis (*per hypotheſim*), erit per compoſitionem rationum & ex æquo D A × D P ad A C × C P ut reſiſtentia tota ex motu projectionis ad vim gravitatis.

(a) * *Vel quod perinde eſt*, *cape R r æqualem &c.* Cùm enim ſit (per hyp.) N : QB = DC : CP, & DC : CP = DR : RV, ob triangula ſimilia DRV, DCP; erit N : QB = DR : RV, & ideo $RV = \frac{DR \times QB}{N}$. Sed rectangulum $GEIt = Gt \times GE = DR \times QB = GTIE + tGT$; & ideo $\frac{GTIE}{N} = \frac{DR \times QB - tGT}{N} = RV - \frac{tGT}{N}$. Quare ſi capiatur $Vr = \frac{tGT}{N}$, erit $\frac{GTIE}{N} = RV - Vr = Rr$.

Eſt enim N ad QB ut DC ad CP ſeu DR ad RV, ideoque RV æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, & Rr (id eſt $RV - Vr$ ſeu $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$) (b) æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream $RDGT$, & (*per legum corol.* 2.) diſtinguatur motus corporis in duos, unum aſcenſus, alterum ad latus. Et cùm reſiſtentia ſit ut motus, (c) diſtinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoque longitudo, à motu ad latus deſcripta, erit (*per prop.* II. hujus) ut (d) linea DR, (e) altitudo verò (*per prop.* III. hujus) ut area $DR \times AB - RDGT$, (f) æqualis eſt rectangulo $DR \times AQ$, ideoque linea illa Rr (ſeu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) tunc eſt ad DR ut $AB - AQ$ ſeu QB ad N, id eſt, ut CP ad DC; atque ideo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem ſub initio. Cùm igitur Rr ſemper ſit ut altitudo, ac DR ſemper ut longitudo, atque Rr ad DR ſub initio ut altitudo ad longitudinem: neceſſe eſt ut Rr ſemper ſit ad DR ut altitudo ad longitudinem, & prop-

(b) * *Æqualis* $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$ &c. Eſt enim $\frac{DR \times AB - RDGT}{N} = \frac{DR \times RI - RDGT}{N} = \frac{GTIE}{N} = RV - Vr$.

(c) * *Diſtinguetur etiam hæc &c.* In eâ, quam tractamus, reſiſtentiæ hypotheſi motus componere ac dividere licet eodem modo quo componuntur & dividuntur in vacuo; quod in aliis reſiſtentiæ hypotheſibus fieri non poteſt. Cùm enim reſiſtentia velocitati proportionalis eſt, ſpatia velocitatibus ſeparatis & conjunctis eodem temporis momento deſcribenda vi reſiſtentiæ minuuntur in eâdem quam habent inter ſe ratione.

(d) * *Ut linea D R.* Exponitur enim corporis velocitas horizontalis ſub motûs initio per lineam D C. Unde tempus exponi poterit per aream hyperbolicam D R G T, & ſpatium hoc tempore deſcriptum per lineam D R, *per cor. prop.* II. hujus.

(e) * *Altitudo verò* &c. Cùm enim ſit D A ad A C ut reſiſtentia verticalis ad gravitatem (*per hyp.*); area G T I E, ſeu ei æqualis $DR \times AB - RDGT$, erit ut altitudo motu verticali deſcripta (*per prop.* III. *hujus*); & quia (*per conſtruct.*) eſt $Rr = \frac{DR \times AB - RDGT}{N}$, ideoque ob datum N, Rr ut $DR \times AB - RDGT$; erit altitudo ut Rr.

(f) * *Æqualis eſt rectangulo &c.* Nam coincidente puncto t cum G, evaneſcit T t reſpectu R t ſeu A Q, fitque area evaneſcens R D G T æqualis R D G t ſeu $DR \times AQ$.

53.

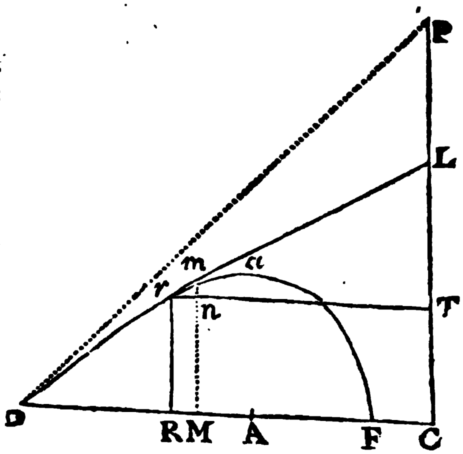
propterea ut corpus moveatur in linea *D r a F*, quam punctum r (g) perpetuò tangit. *Q. E. D.*

Co-

(g) 54. *Perpetuo tangit.* Quoniam autem D A eſt ad A C ut reſiſtentia ex motu verticali ſub initio orta ad vim gravitatis, tempus totius aſcenſûs corporis erit D A B G (*per Prop.* III. hujus), quo etiam tempore percurrit corpus longitudinem D A, & ideo ad maximam ſuam altitudinem a perveniet ubi erit in perpendiculo A B a, & poſtea ſemper appropinquat ad aſymptoton P C (*per* Cor. *Prop.* II). Per punctum quodvis trajectoriæ r agatur r T horizontali D C parallela & verticali C P occurrens in T, verticalis M m ipſi R r infinitè propinqua ſecet r T in n & tangentem r L ſeu curvam in m: & quoniam motus corporis in loco r per arcum r m dividi poteſt in motum horizontalem r n & verticalem n m; erit velocitas horizontalis ad verticalem ut r n ad n m, & ad obliquam ſecundùm tangentem curvæ ut r n ad r m. Sed ob ſimilitudinem triangulorum r n m, r T L, eſt r n : m n = r T vel R C : T L, & r n : r m = R C : r L. Quare cùm R C ſit ut velocitas horizontalis corpori in loco r reſidua ex velocitate D C quam ſub initio motus habebat in loco D (*per Cor. Prop.* II.); erit T L ut velocitas verticalis corpori reſidua ex velocitate initiali C P, & r L ut velocitas obliqua in arcu r m ex duabus r T, & T L compoſita. Eſt itaque velocitas & proinde reſiſtentia corporis in puncto quovis trajectoriæ r ut curvæ tangens r L.

55. Hinc per datum trajectoriæ punctum r duci poteſt tangens r L. Nam velocitas verticalis L T in loco r eſt ad velocitatem verticalem C P in loco D, ut rectangulum R B ad rectangulum D B (*vide figuram textûs*) ſive ut R A ad D A (*per Prop.* III.); ideoque $LT = \frac{CP \times RA}{DA}$.

56. Ex ſuperiori conſtructione facilè deducitur æquatio ad trajectoriam D r a F. Poſitis enim $DP = b$, $DC = e$, $CP = f$, $AC = g$, $AB = h$, $Rr = y$, & $DR = x$, erit (*per theor.* 4um. *de hyperb. lib.* 1.) $DC\,(e) : AC\,(g) = AB\,(h) : GD = \frac{gh}{e}$, & $RC\,(e-x) : AC\,(g) = AB\,(h) : RT = \frac{gh}{e-x}$; ideoque $QB = AB - GD = \frac{eh - gh}{e}$, & areæ hyperbolicæ R D G T elementum naſcens $RT \times dx = \frac{ghdx}{e-x}$, ac proinde area $RDGT = gh.\,S.\frac{dx}{e-x}$, Præterea (per conſtr.) eſt $CP\,(f) : DC\,(e) = QB\,\frac{(eh - gh)}{e} : N = \frac{eh - gh}{f}$, & $Rr = y = \frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Eſt & $DR \times AB = hx$. Quare erit $y = \frac{fx}{e-g} - \frac{fg}{e-g} \times S.\frac{dx}{e-x}$. Eſt etiam (*per conſtr.*) D A ſeu $e - g$ ad A C ſeu g ut reſiſtentia medii ex motu in altitudinem ad vim gravitatis, & ideo per Cor. I. Prop. III. ut *velocitas verticalis*, quam exponit recta C P ſeu f, ad *velocitatem terminalem*; & ideo ſi velocitas terminalis exponatur per lineam a, habebitur $a = \frac{fg}{e-g}$. Unde fit $y = \frac{ax}{g} - a.\,S.\frac{dx}{e-x}$ & ſumptis fluxionibus $dy = \frac{adx}{g} - \frac{adx}{e-x}$. Si ponatur R C ſive $e - x = z$;



erit

Corol. 1. Eſt igitur Rr æqualis $\frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$: ideoque ſi producatur RT ad X ut (h) ſit RX æqualis $\frac{DR \times AB}{N}$; id eſt, ſi compleatur parallelogrammum $ACPY$, jungatur DY ſecans CP in Z, & producatur RT donec occurrat DY in X; erit Xr æqualis $\frac{RDGT}{N}$, & propterea tempori proportionalis.

Co-

erit $-dx = dz$, & $-\frac{adx}{e-x} = \frac{adz}{z}$, ideoque $-a.\,S.\frac{dx}{e-x} = a.\,S.\frac{dz}{z} = a.\,L.\,z = a.\,L.\,e-x$ (40). Quare erit $y = \frac{ax}{g} + a.\,L.\,e-x + Q$ *conſt.* Et quia evaneſcente y, evaneſcit quoque x, invenitur conſtans $Q = -a.\,L.\,e$, & hinc $y = \frac{ax}{g} + a.\,L.\,e-x - a.\,L.\,e = \frac{ax}{g} - a.\,L.\,\frac{e}{e-x}$. Eſt enim $L.\,e - L.\,e-x = L.\,\frac{e}{e-x}$, & ſignis mutatis $L.\,e-x - L.\,e = -L.\,\frac{e}{e-x}$.

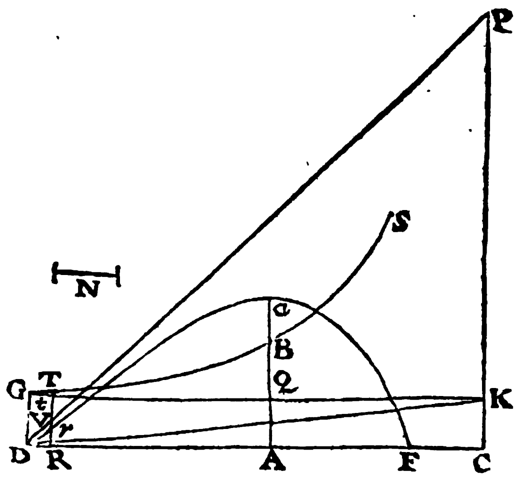
57. Ex hac æquatione alia deducitur inter DV & Vr. Si enim dicantur $DV = v$ & $Vr = z$, erit ob triangula DCP, DRV ſimilia, DP (b) : DV (v) = DC (e) : DR $(x) = \frac{ev}{b}$, & ideo $e - x = \frac{eb - ev}{b}$ & $\frac{e}{e-x} = \frac{b}{b-v}$; ſimiliter erit DC (e) : CP (f) = DR $\left(\frac{ev}{b}\right)$: VR $= \frac{fv}{b}$, ideoque $y = Rr = VR - Vr = \frac{fv}{b} - z$. Quare habebitur $\frac{fv}{b} - z = \frac{aev}{bg} - a.\,L.\,\frac{b}{b-v}$, & $z = \frac{fgv - aev}{bg} + a.\,L.\,\frac{b}{b-v}$. Sed (ex demonſtr.) $a = \frac{fg}{e-g}$, atque ideo $ae - ag = fg$, & $fg - ae = -ag$; quare erit etiam

$z = a.\,L.\,\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b}$. 57

(h) * *Ut ſit* RX *æqualis* $\frac{DR \times AB}{N}$ vel quod idem eſt, *ſi compleatur Parallelogrammum* ACPY erit AY = CP, *ſi jungatur* DY *ſecans* CP *in* Z, *& producatur* RT *donec occurrat* DY *in* X valor RX qui hoc modo reperitur idem erit cum valore $\frac{DR \times AB}{N}$ ipſi aſſignato (*vide fig. text. pag.* 28) erit enim DA : AY (CP) = DR : RX $= \frac{CP \times DR}{DA}$; jam verò $\frac{CP}{DA} = \frac{AB}{N}$, quippe per nat. Hyper. eſt AB : DG (ſive QA) = DC : AC & convertendo AB : AB − AQ (ſive QB) = DC : DA $= \frac{DC \times QB}{AB}$, ergo $\frac{CP}{DA} = \frac{AB \times CP}{DC \times QB}$, ſed $\frac{CP}{DC \times QB} = \frac{1}{N}$ ex conſtruct. ergo $\frac{CP}{DA} = \frac{AB}{N}$, & $\frac{CP \times DR}{DA}$ qui eſt valor RX repertus per conſtructionem, idem eſt ac valor $\frac{AB \times DR}{N}$ ipſi aſſignatus per Hypotheſim. Quoniam igitur $RX = \frac{DR \times AB}{N}$, & $Xr = RX - Rr = \frac{DR \times AB}{N} - \frac{DR \times AB}{N} + \frac{RDGT}{N}$; erit $Xr = \frac{RDGT}{N}$, & prop-

Corol. 2. Unde ſi capiantur innumeræ *C R*, vel, quod perinde eſt, innumeræ *Z X* in progreſſione geometricâ; erunt totidem *X r* in (i) progreſſione arithmeticâ. Et hinc curva *D r a F* (k) per tabulam logarithmorum facile delineatur.

Corol. 3. Si vertice *D*, diametro *D G* deorſum productâ, & latere recto quod ſit ad 2 *D P* ut reſiſtentia tota ipſo motus initio ad vim gravitatis, parabola conſtruatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco *D* ſecundum rectam *D P*, ut in medio uniformi reſiſtente deſcribat curvam *D r a F*, ea ipſa erit quâcum exire debet de eodem loco *D*, ſecundum eandem rectam *D P*, ut in ſpatio non reſiſten-



propterea, ob datam *N*, X r eſt ut area R D G T, ideoque ut tempus quo corpus ex loco D pervenit in locum r.

(i) * *In progreſſione arithmeticâ.* Nam (380. lib. 1.) temporibus ſeu areis R D G T in progreſſione arithmeticâ creſcentibus, abſciſſæ R C in progreſſione geometricâ decreſcunt, & vice versâ. Quare verticalibus X r, quæ ſunt ut areæ R D G T, in progreſſione arithmeticâ creſcentibus, correſpondentes abſciſſæ R D decreſcent in progreſſione geometricâ, & contra. Sed ob triangulorum D R X, D C Z ſimilitudinem, eſt D C ad D Z ut D R ad D X, & diviſim ut R C ad Z X: quare ob datas D C & D Z, eſt Z X ad R C in datâ ratione, & ideo Z X creſcit vel decreſcit in eâdem ratione cum R C.

(k) 58. *Per tabulam Logarithmorum facilè delineatur.* Dicantur enim, ut suprà n. 56. D C $= e$, C P $= f$, A C $= g$, $a = \frac{fg}{e-g}$ D R $= x$, R r $= y$; & erit (56) $y = \frac{ax}{g} - a L. \frac{e}{e-x}$. Ob triangula D A Y, Y P Z ſimilia, eſt D A ſeu $e-g$ ad A Y vel C P ſeu f, ut Y P vel A C ſeu g ad P Z, ideoque P Z $= \frac{fg}{e-g} = a$. Triangula ſimilia D R X, Y P Z dant etiam Y P ſeu g ad P Z ſeu a, ut D R ſeu x ad R X, & propterea R X $= \frac{ax}{g}$. Unde cùm ſit R C $= e - x$, æquatio $y = \frac{ax}{g} - a L. \frac{e}{e-x}$ fiet R r $=$ R X $-$ P Z $\times$ L. $\frac{DC}{RC}$. Verùm cùm P Z. L. $\frac{DC}{RC}$ ſit Logarithmus rationis D C ad R C in Logarithmica cujus ſubtangens eſt a ſive P Z, dicendo ut ſubtangens tabularum ad P Z, ita L. $\frac{DC}{RC}$ è tabulis deſumptus ad ejuſdem quantitatis Logarithmum in Logarithmicâ cujus ſubtangens eſt P Z. Invenietur itaque P Z $\times$ L. $\frac{DC}{RC}$

ope

ſiſtente deſcribat parabolam. Nam (l) latus rectum parabolæ hujus, De Motu Corporum.

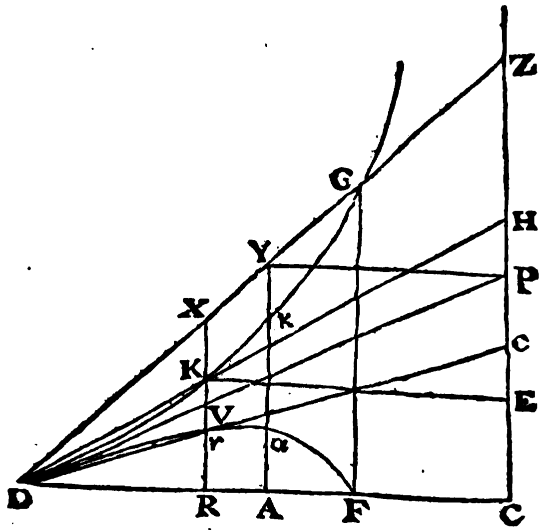
ope tabulæ vulgaris Logarithmorum, & inde obtinebitur R r ordinata ad trajectoriam D r a F, & ſic punctum quodlibet r in illa determinabitur.

59. Ex his ſimpliciſſima deducitur trajectoriæ D r a F per Logarithmicam conſtructio. Iiſdem enim poſitis quæ in corollario 1° hujus præſcripta ſunt, aſymptoto C Z & ſubtangente P Z deſcribatur per punctum D Logarithmica D K k G ſecans R X in K. Capiatur X r = R K, ſeu R r = X K, & punctum r erit in trajectoriâ quæſitâ D r a F. Nam ſi ex puncto K ducatur ad C Z perpendiculum K E, erit C E ſeu R K Logarithmus rationis D C ad K E vel R C (34), ideoque erit (58) R r = R X — R K = X K, & hinc R K = R X — R r = X r. Q. E. D.

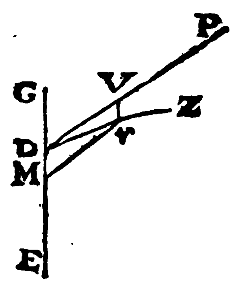
60. Hæc conſtructio hoc etiam commodi habet, quod ſtatim inveniantur altitudo maxima A a & horizontalis amplitudo D F. Eſt enim A a = Y k; & ſi ex puncto G interſectionis Logarithmicæ cum lineâ D Z demittatur ad D C perpendiculum G F, erit D F amplitudo Jactûs: nam coincidente X cum G fit X K ſeu R r = o, & ideo coincidit punctum r cum R in horizontali D C. Pariter punctum r, quo trajectoria D r a F rectam quamlibet D c ex puncto D ad C Z ductam ſecat, invenitur, ſi capiatur C H æqualis c Z, jungatur D H Logarithmicam ſecans in K, & ex puncto K demittatur ad D C perpendiculum K R, quod lineam D c ſecabit in puncto quæſito r; erit enim R K : C H ſeu Z c = D r : D c = X r : Z c, ideoque X r = R K.

61. Quoniam velocitas projectionis eſt ad velocitatem terminalem, quæ data eſt, ut D P ad P Z (58); ſi manet velocitas projectionis & linea D P, manebit quoque Logarithmicæ ſubtangens P Z; & ideo una eademque Logarithmicæ ſpecies deſcribendæ trajectoriæ D r a F ſufficiet, utcumque mutetur projectionis angulus P D C.

(l) 62. *Latus rectum parabolæ hujus &c.* Eſt enim V r ſpatium infinitè parvum quod corpus vi gravitatis deſcendendo deſcribit in medio reſiſtente, quodque eodem tem-

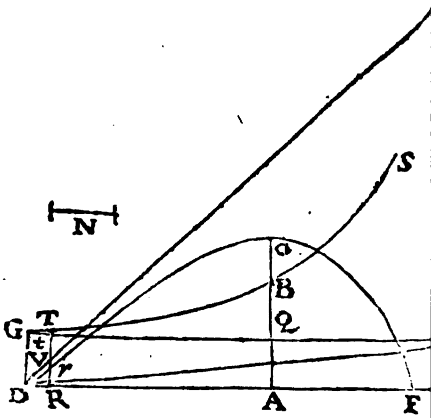


puſculo dato deſcriberet in medio non 62.
reſiſtente (6). Sed corpus in medio non reſiſtente projectum vi gravitatis deſcriberet arcum parabolæ D r, cujus tangens D P, diameter G D E, abſciſſa D M =



V r; ordinata M r æqualis & parallela D V (40. *lib.* 1.), & (*per theor.* 1. *de parabola lib.* 1.) rectangulum ſub latere recto & abſciſſâ D M ſeu V r æquatur quadrato ordinatæ M r ſeu D V. Quare latus rectum parabolæ hujus ipſo motus initio eſt $\frac{DV^2}{Vr}$.

hujus, ipſo motus initio, eſt $\frac{DV\ quad.}{Vr}$; & Vr (^{m}) eſt $\frac{tGT}{N}$ ſeu $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Recta autem quæ, ſi duceretur, hyperbolam *GTS* tangeret in *G*, (^{n}) parallela eſt ipſi *DK*, ideoque *Tt* eſt $\frac{CK \times DR}{DC}$, & N erat $\frac{QB \times DC}{CP}$. Et propterea Vr eſt $\frac{DRq \times CK \times CP}{2DCq \times QB}$, id eſt (ob proportionales *DR* & *DC*, *DV* & *DP*) $\frac{DVq \times CK \times CP}{2DPq \times QB}$ & latus rectum $\frac{DV\ quad.}{Vr}$ prodit $\frac{2DPq \times QB}{CK \times CP}$, id (^{o}) eſt (ob proportionales *QB* & *CK*, *DA* & *AC*) $\frac{2DPq \times DA}{AC \times CP}$, ideoque ad $2DP$, ut $DP \times DA$ ad $CP \times AC$; (^{p}) hoc eſt, ut reſiſtentia ad gravitatem. *Q.E.D.*



Corol. 4. Unde ſi corpus de loco quovis *D*, datâ cum velocitate, ſecundum rectam quamvis poſitione datam *DP* projiciatur; & reſiſtentia medii ipſo motûs initio detur, inveniri poteſt curva *DraF*, quam corpus idem deſcribet. Nam ex datâ velocitate (^{q}) datur latus rectum parabolæ, ut notum eſt.

(m) * Vr eſt $\frac{tGT}{N}$ (*per conſtr.*) *ſeu* $\frac{DR \times Tt}{2N}$; evaneſcente enim DR ſeu Gt, triangulum tGT fit $\frac{1}{2}$ Gt×Tt$=\frac{1}{2}$ DR×Tt, & hinc $\frac{tGT}{N} = \frac{DR \times Tt}{2N}$.

(n) * *Parallela eſt ipſi DK*, ob KC = DG, & ſubtangentem hyperbolæ æqualem abſciſſæ DC (*per theor.* 1. *de hyp. lib.* 1.). Cùm autem evaneſcit GTt, fit Tt ad tG ſeu DR ut ordinata GD ſeu CK ad ſubtangentem, ſive ad DC, & ideo $Tt = \frac{CK \times DR}{DC}$. Et *N* erat $\frac{QB \times DC}{CP}$ (*per conſtr.*). Quare ſi loco *N* & Tt, hi valores ſubſtituantur in quantitate $\frac{DR \times Tt}{2N} = Vr$, invenietur $Vr = \frac{DR^2 \times CK \times CP}{2DC^2 \times QB}$

(o) * *Id eſt, ob proportionales QB & CK, DA & AC &c.* Nam (*per theor.* 4. *de hyp.*) AB eſt ad GD (ſive AQ vel CK) ut DC ad AC, & diviſim QB eſt ad CK ut DA ad AC, id eſt $\frac{QB}{CK} = \frac{DA}{AC}$.

(p) * *Hoc eſt, ut reſiſtentia ad gravitatem*, per conſtruct. Probl. II.

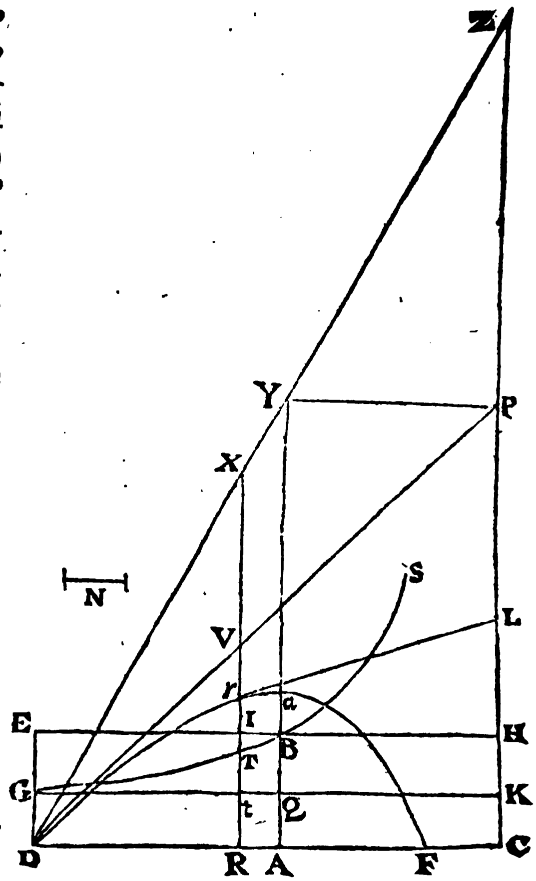
(q) * *Datur latus rectum parabolæ &c.* Datâ velocitate ſecundum directionem tangentis DP, datur tum ſpatium finitum in medio non reſiſtente tempore dato æquabiliter deſcriptum, tum ex effectu cognito gravitatis in tempore dato, habe-

tus

Et ſumendo 2 *D P* ad latus illud rectum, ut eſt vis gravitatis ad vim reſiſtentiæ, datur *D P*. Dein ſecando *D C* in *A*, ut ſit *CP* × *AC* ad *D P* × *D A* in eâdem illâ ratione gravitatis ad reſiſtentiam, dabitur punctum *A*. (r) Et inde datur curva *D r a F*.

Corol. 5. Et contra, ſi datur curva *D r a F*, dabitur & velocitas corporis & reſiſtentia medii in locis ſingulis *r*. (ſ) Nam ex datâ ratione *CP* × *A C* ad *D P* × *D A*, datur tum reſiſtentia medii ſub initio motus, tum latus rectum parabolæ: (t) & inde datur etiam velocitas ſub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis *r L*, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis reſiſtentia in loco quovis *r*.

Corol. 6. Cùm autem longitudo 2 *D P* ſit ad latus rectum parabolæ ut gravitas ad reſiſtentiam in *D*; & ex auctâ velocitate augeatur reſiſtentia



tur ſpatium verticale finitum V r eodem tempore vi gravitatis deſcriptum, id eſt, dantur ordinata & abſciſſa parabolæ, quibus datis datur illius latus rectum (per theor. 1. de parab.)

(r) * *Et inde datur curva* D r a F, non ſolum conſtructione per hyperbolam, ſed etiam conſtructione illâ quæ per Logarithmicam abſolvitur (59.) Nam inventâ D P, ſumenda eſt Logarithmicæ ſubtangens P Z ad D P in ratione gravitatis ad reſiſtentiam ſub initio motûs; & ideò Logarithmicæ ſubtangens P Z erit etiam ad D P ut 2 D P ad latus rectum parabolæ. 62.

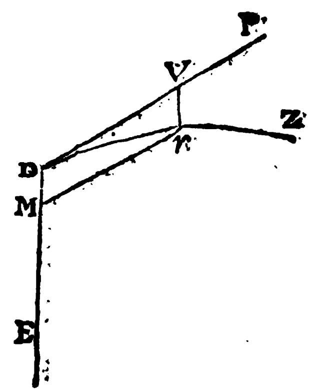
(ſ) * *Nam ex datâ ratione* C P × A C ad D P × D A, id eſt (per conſtr.) ratione gravitatis ad reſiſtentiam totam ſub motus initio, dabitur reſiſtentia, ob datam gravitatem (*per hyp.*); & quia C P × A C eſt ad D P × D A ut 2 D P ad latus rectum parabolæ (*per cor.* 3.), dabitur illud latus rectum.

(t) * 63. *Et inde datur etiam velocitas ſub initio motûs.* Nam dato latere recto

in eâdem ratione, (u) at latus rectum parabolæ augeatur in ratione illâ duplicatâ: (x) patet longitudinem 2 *D P* augeri in ratione illâ ſimplici, ideoque velocitati ſemper proportionalem eſſe, neque ex angulo *CDP* mutato augeri vel minui, niſi mutetur quoque velocitas.

Corol. 7. Unde liquet methodus determinandi curvam *D r a F* ex phænomenis quamproximè, & inde colligendi reſiſtentiam & velocitatem quâcum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia eâdem cum velocitate, de loco *D*, ſecundum angulos diverſos *CDP*, *CDp*, & cognoſcantur loca *F*, *f*, ubi incidunt in horizontale planum *D C*. Tum, aſſumptâ quâcunque longitudine pro *D P* vel *Dp*, fingatur quod reſiſtentia in *D* ſit ad gravitatem in ratione quâlibet, & exponatur

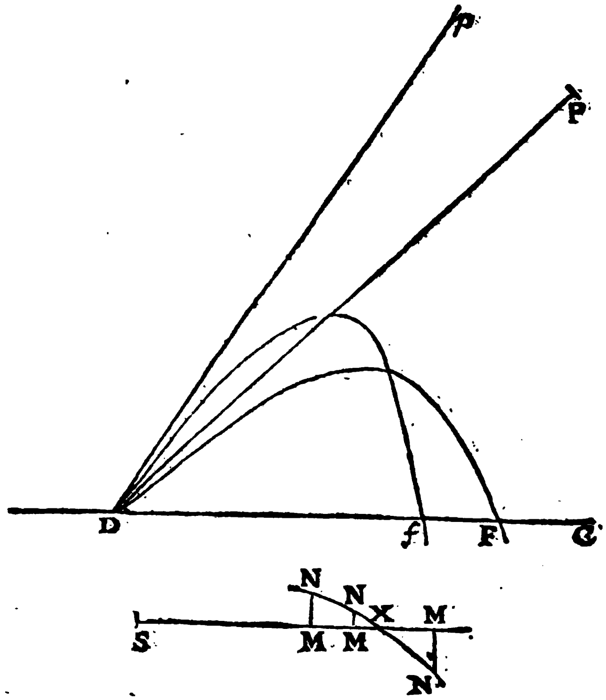
parabolæ D r Z, quam grave in medio non reſiſtente deſcribit, & datâ poſitione tangentis D P cum diametro D E, parabola deſcribi poteſt; datur autem in ſingulis locis velocitas corporis gravis parabolam datam deſcribentis: Sit enim abſciſſa D M verticali V r æqualis & parallela, & ordinata M r etiam æqualis & parallela tangenti D V; datur tum velocitas quam corpus grave è puncto V cadendo per altitudinem datam V r habet in r, tum tempus quo altitudinem illam deſcribit, & hinc datur tempus idem quo motu uniformi deſcribit ſpatium datum D V (40. *lib.* 1.), ideoque datur velocitas uniformis per tangentem D P, quæ eſt ipſa velocitas projectionis in D.



(u) * *At latus rectum parabolæ augeatur.* Nam cùm velocitas ſecundùm tangentem D V uniformis ſupponatur (40. *lib.* 1.); Si, dato tempore quo deſcribitur D V, velocitas illa creſcat, creſcet D V in eadem ratione, manente ſpatio verticali V r hoc eodem tempore dato deſcripto; ſed latus rectum parabolæ D r Z eſt $\frac{DV^2}{Vr}$ (*per cor.* 3.) & quantitas $\frac{DV^2}{Vr}$ manente V r, creſcit ut D V^2: Quare latus rectum parabolæ D r Z augetur in ratione duplicatâ velocitatis.

(x) * *Patet longitudinem* 2 D P *&c.* Gravitas dicatur G, reſiſtentia initio motûs *R*, latus rectum parabolæ, ut ſuprà, $\frac{DV^2}{Vr}$; & erit 2 D P : $\frac{DV^2}{Vr}$ = G : *R*, ideoque 2 D P = $\frac{G \times DV^2}{R \times Vr}$, hoc eſt, datis V r & G, 2 D P eſt ut $\frac{DV^2}{R}$, & quia *R* eſt ut velocitas, ſeu ut D V, erit etiam 2 D P ut D V, ſive ut velocitas (*per notam ſuperiorem*).

tur ratio illa per longitudinem quamvis SM. (y) Deinde per computationem, ex longitudine illâ aſſumptâ DP, inveniantur



longitudines DF, Df, ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per calculum inventâ, (z) auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & expo-

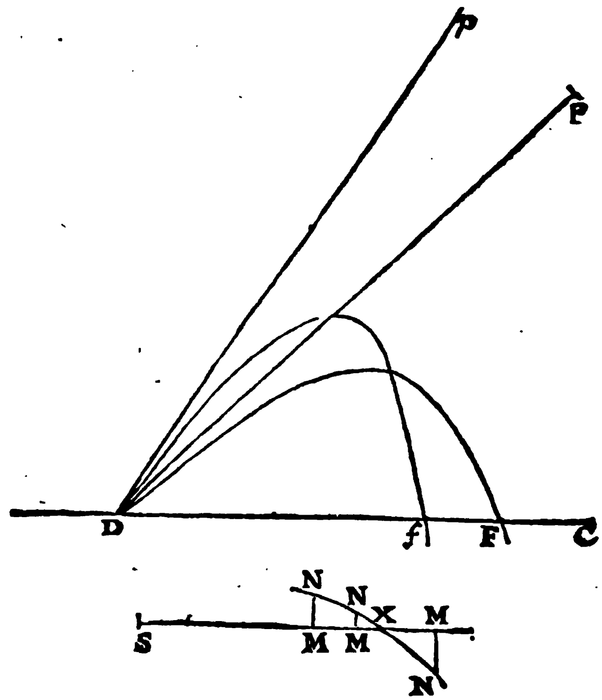
(y) 64. *Deinde per computationem.* Datâ enim D P longitudine & poſitione, dantur C P & D C, & datâ ratione reſiſtentiæ in D ad gravitatem dantur D A & A C per conſtructionem problematis iſtius: His autem datis, curva D r a F (vide figuras ſuperiores) deſcribi poteſt, & hinc invenitur amplitudo horizontalis D F conſtructione per hyperbolam vel per logarithmicam (59). Si autem rem voluerimus calculo tractare, uti poterimus æquatione $y = \frac{ax}{g} - a.L.\frac{e}{e-x}$ (63) in qua ne ſit $x =$ D F, ponenda eſt $y = 0$, & æquatio fiet $\frac{ax}{g} = L.\frac{e}{e-x}$, ex quâ per regreſſum ſerierum, vel per alias approximationes invenietur x per g & e, ſeu D F per A C & D C. 64.

(z) 65. *Auferatur ratio eadem per experimentum inventa*; & ſi nihil eſt reſidui, rectè aſſumpta fuit ratio reſiſtentiæ ad gravitatem; ſi quid reſidui fuerit, *exponatur differentia per M N.* Nam ſi rectè aſſumpta fuit ratio reſiſtentiæ ad gravitatem, curva D r a F per conſtructionem vel per computationem deſcripta ſimilis eſt trajectoriæ quam corpus in medio reſiſten-

 te

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. I. PROP. IV. PROBL. II.

exponatur differentia per perpendiculum *MN*. Idem fac iterum ac tertiò, aſſumendo ſemper novam reſiſtentiæ ad gravitatem rationem *SM*, & colligendo novam differentiam *MN*. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ



SM, & negativæ ad alteram; & per puncta *N*, *N*, *N* agatur curva regularis *NNN* ſecans rectam *SMMM* in *X*, & (a) erit *SX* vera ratio reſiſtentiæ ad gravitatem, quam inve-

te reverâ deſcribit, & hinc homologarum in illis curvis linearum debet eſſe ratio data. Determinatur enim trajectoria vera ex velocitate & angulo projectionis æquali PDC vel pDC, atque ex ratione reſiſtentiæ ad gravitatem datam; & curva per conſtructionem delineata determinatur per longitudinem aſſumptam DP vel Dp, quæ velocitatem datam ſemper poteſt exhibere, per angulum PDC vel pDC, & per rationem linearum DA, AC, ſeu rationem reſiſtentiæ ad gravitatem, ſi recte aſſumpta fuit: quare differentia tota inter veram trajectoriam & curvam hoc modo per conſtructionem deſcriptam eſt in magnitudine linearum homologarum, quarum ratio eſt eadem in utrâque curvâ. Curvæ igitur illæ ſimiles ſunt.

(a) 66. *Et erit* SX *vera ratio reſiſtentiæ ad gravitatem*. Nam ubi MN ſeu differentia rationum $\frac{Ff}{DF}$, quæ per computatio-

invenire oportuit. Ex (b) hac ratione colligenda eſt longitudo *D F* per calculum; & longitudo quæ ſit ad aſſumptam longitudinem *D P*, ut longitudo *D F* per experimentum cognita ad longitudinem *D F* modò inventam, erit vera longitudo *D P*. Quâ inventâ, habetur tum curva linea *D r a F* quam corpus deſcribit, tum corporis velocitas & reſiſtentia in locis ſingulis.

Scholium.

Cæterùm, reſiſtentiam corporum eſſe in ratione velocitatis; (†) hypotheſis eſt magis mathematica quàm naturalis. In mediis, quæ rigore omni vacant, reſiſtentiæ corporum ſunt in dupli-

tionem & per experimentum inventæ ſunt, nulla eſt, ratio reſiſtentiæ ad gravitatem recte aſſumpta fuit (65). Quare cùm S M aſſumptam illam rationem exponat, & evaneſcat M N ubi S M fit S X, patet in hoc caſu rationem reſiſtentiæ ad gravitatem recte exponi per lineam S X. Itaque ſi innumeræ abſciſſæ S M aſſumptæ fuiſſent, & innumeræ ordinatæ N M per experimenta determinatæ, curva quam punctum N perpetuò tangit, rationem accuratam reſiſtentiæ ad gravitatem determinaret per ejus interſectionem X cum lineâ S M; ideoque ſi multa fiunt tentamina, ſicque plura obtineantur puncta N, & per ea ducatur curva regularis N N X N, illa quàm proxime punctum X quæſitum determinabit; methodum autem ducendi curvam regularem per plura puncta data mox in Scholio ſumus traditnri.

(b) *Ex hac ratione colligenda eſt &c.* Sit, exempli causâ, ratio aſſumpta reſiſtentiæ ad gravitatem 1 ad 10, ſeu $SM = \frac{1}{10}$; inventa autem ſit $SX = 2\,SM = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$; erit reſiſtentia ad gravitatem ut 1 ad 5. Ex hac ratione & aſſumptâ longitudine D P colligenda eſt longitudo D F ſeu amplitudo jactûs (64); & quoniam inventâ verâ ratione reſiſtentiæ ad gravitatem, trajectoria per calculum vel per conſtructionem inventa ſimilis eſt trajectoriæ quam corpus in medio reſiſtente, reverâ deſcribit (65), erit amplitudo D F per calculum inventa ad amplitudinem D F per experimentum cognitam, ut aſſumpta longitudo D P ad veram longitudinem D P pro trajectoriâ in medio reſiſtente deſcriptâ. Hàç autem longitudine inventâ, habetur (*per cor.* 4.) tum curva linea D r a F quam corpus reipsâ deſcribit, tum corporis velocitas & reſiſtentia in locis ſingulis (*per cor.* 5.) 66.

(†) 67. Ex ſupra demonſtratis determinari poſſent motus corporis in medio quod reſiſtit partim uniformiter, partim in ratione velocitatis. Et quidem ſi corpus ſolâ vi inſitâ in hoc medio feratur, pars illa reſiſtentiæ quæ eſt uniformis, tanquam vis conſtans gravitatis quâ corporis aſcendentis motus retardatur, conſideranda eſt, & in ſuperioribus conſtructionibus pro corporis aſcenſu, non gravitas, ſed ea reſiſtentia uniformis data per lineam A C, vel per rectangulum A H exponi debet. Si vero corpus in prædicto medio vi gravitatis etiam urgeatur, linea A C gravitatem & reſiſtentiæ partem uuiformem ſimul junctas, ſi corpus aſcendit, & exceſſum gravitatis ſupra eam reſiſtentiæ partem uniformem, ſi corpus deſcendit, exponet. Quâ ratione cæteris manentibus, determinabuntur motus corporis tum ſolâ vi inſitâ moti, tum vi gravitatis urgente aſcendentis & deſcendentis in medio quod reſiſtit partim in ratione datâ, partim in ratione velocitatis, tum etiam corporis projecti.

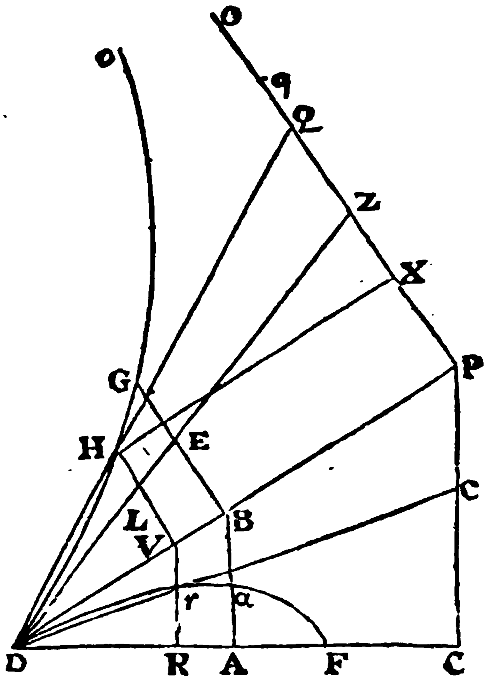
Ex-

plicatâ ratione velocitatum. (c) Etenim actione corporis velocioris communicatur eidem medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; ideoque tempore æquali, ob majorem medii quantitatem perturbatam, communicatur motus in duplicatâ ratione major; eſtque reſiſtentia (*per motûs leg.* II. & III.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hâc lege reſiſtentiæ.

(c) *Etenim actione &c.* Hæc patent per demonſtrata (8).

68. *Scholium.* Ex æquatione ad curvam D r a F, quam (57) invenimus, deducitur hujus curvæ per Logarithmicam ſatìs elegans conſtructio, quâ uſi ſunt *Varignonius* & *Hermannus.* Eam hîc exponemus breviter. Deinde cùm in ſuperioris propoſitionis corollario ultimo & alibi poſtea deſcribenda ſit curva regularis quæ per data puncta tranſeat, hoc problema, quod NEWTONUS in Epiſtolâ ad *Oldenburgum* anno 1676. datâ unum fere ex pulcherrimis dicit quod ſolvere deſideraverit, ſolvemus.

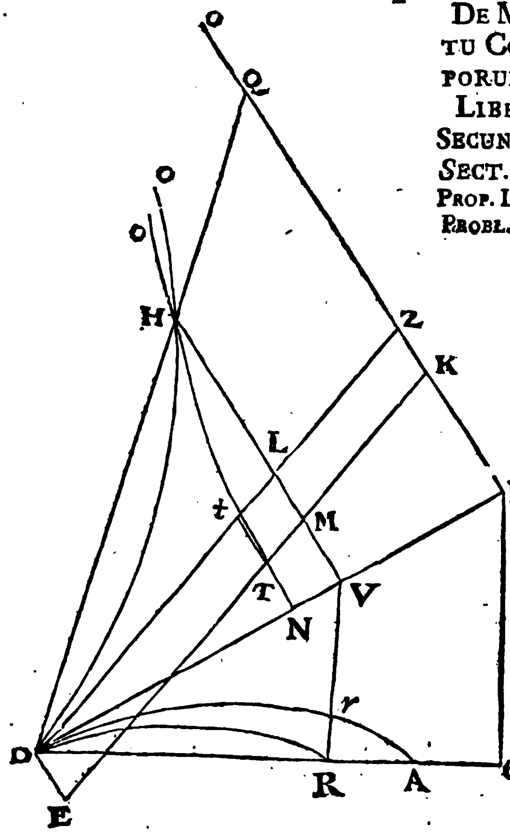
69. Iiſdem poſitis quæ in ſuperiori conſtructione NEWTONI, ſit D P $= b$, D V $= v$, V r $= z$, & D P ad a ut velocitas projectionis ad velocitatem terminalem; & erit (57) $z = a . L . \frac{b}{b-v} - \frac{av}{b}$. Oportet curvam D r â F ex hac æquatione per Logarithmicam conſtruere. In rectâ P O ad D P normali capiatur P Z $= a$, aſymtoto P O & ſubtangente P Z deſcribatur per punctum D Logarithmica D H O, cujus D Z erit tangens, & per punctum quodvis V in linea D P agatur V H parallela P O Logarithmicæ occurrens in H & tangenti D Z in L, capiaturque verticalis V R pars V r æqualis H L. Punctum r erit in trajectoriâ quæſitâ D r a F. Nam ducto ex H ad P O perpendiculo H X, erit (*per conſtruct.*) V P $=$ H X $= b - v$, P Z $= a$, & hinc $PX = HV = PZ \times L . \frac{DP}{HX} = a . L . \frac{b}{b-v}$ (34). Et ob triangula D V L, D P Z ſimilia, $DP(b) : PZ(a) = DV(v) : VL = \frac{av}{b}$. Quare erit $HV - LV = a . L . \frac{b}{b-v} - \frac{av}{b} = z =$ V r. Q. E. D.



70. *Cor.* 1. Si per punctum A NEWTONI conſtructione determinatum erigatur verticalis A B ſecans D P in B, & per B erigatur ad D P perpendiculum B G ſecans D Z in E & Logarithmicam in G, capiaturque B a æqualis G E, erit A a maxima altitudo Jactûs.

71. *Cor.* 2. Punctum r quo trajectoria rectam D c ex D ductam ad P C, ſecat, invenitur, ſi in lineæ Z O capiatur Z Q æqualis P c, jungatur D Q logarithmicam ſecans in H, demittatur ex H ad D P, perpendiculum H V, & ex V ad

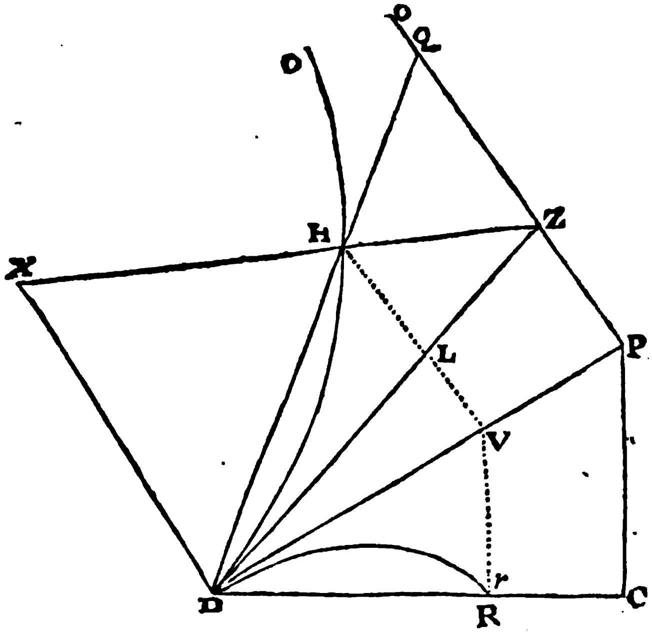
ad D C perpendiculum V R, quod rectam D c ſecabit in puncto quæſito r, atque hinc determinatur etiam horizontalis amplitudo D F, capiendo Z Q æqualem P C, & reliqua perficiendo ut modo diximus. Nam ob parallelas V r & P c, H V & Q P, eſt P c : V r = P D : D V = D Z : D L = Q Z : H L; ſed (*per conſtr.*) Q Z = P c: ergo V r = H L, ideoque punctum r eſt in trajectoria T r a F (*69*).



72. Ex demonſtratis inveniri poteſt angulus elevationis P D C, ſub quo corpus datâ velocitate D P projectum tranſibit per punctum r in verticali V R datum. Dicantur D R $= c$, R r $= e$, D Z $= f$, D L $= x$, H L = V r $= z$, V R $= z + e = y$; & ob triangula D L V, D Z P ſimilia erit D Z (f) : D P (b) = D L (x) : D V $= \frac{bx}{f}$, & ob angulum D R V rectum $DV^2 = DR^2 + VR^2$, hoc eſt, $\frac{bbxx}{ff} = cc + yy$, æquatio ad hyperbolam, cujus diameter tranſverſa eſt $\frac{2cf}{b}$, diameter conjugata $2c$; abſciſſa à centro ſumpta x, & ordinata y ſeu $z + e$, ut calculo inito liquet. Inde autem deducitur hæc conſtructio. Per punctum D ducatur infra lineam D P recta D E parallela P Z & æqualis R r, per E agatur E K parallela D Z ſecans H V in M; & erit L M = D E = R r $= e$, ideoque H M $= z + e = y$, atque E M = D L $= x$, & proinde centrum hyperbolæ eſt in E; cùmque ſemidiameter tranſverſa ſit $\frac{cf}{b} = \frac{DR \times DZ}{DP}$, ſi capiatur in linea D P pars D N æqualis D R, & per punctum N erigatur ad D P perpendiculum N T, ſecans E K in T & D Z in t, erit D P ad D Z ut D N ſeu D R ad D t ſeu E T, ideoque E T $= \frac{DR \times DZ}{DP}$; & propterea ET ſemidiameter tranſverſa, E M abſciſſa, & M H ordinata hyperbolæ T H o, cujus ſemidiameter conjugata æquatur D R. Hæc itaque hyperbola occurſu ſuo cum Logarithmicâ D H o, determinabit punctum H, ex quo ſi demittatur ad D P perpendiculum H V ſecans D Z in L, dabuntur D V & H L æqualis V r, ideoque dabitur etiam V R = V r + R r. His autem datis, datur angulus elevationis P D C, cujus ſinus eſt V R, poſito ſinu toto D V. 72.

73. Si verò quæratur angulus projectionis P D C, ut corpus per punctum R in horizontali D C datum tranſeat, fiet R r $= e = 0$, & æquatio ad hyperbolam evadet $\frac{bbxx}{ff} = cc + zz$, ob $y = z + e = z$. In conſtructione verò coincidet punctum E cum puncto D, & T cum t, cæteris manentibus ut ſupra. Et quia ſi per hyperbolæ & Logarithmicæ interſectionem H ducatur recta D H ſecans P o in Q, eſt Q Z = P C (71.); liquet in eo caſu eſſe Q Z ſinum anguli elevationis P D C, exiſtente radio ſeu ſinu toto D P. Obſervandum porro eſt, quod ſi in his conſtructionibus hyperbola Logarithmicam nuſ-

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. I. Prop. IV. Probl. II.

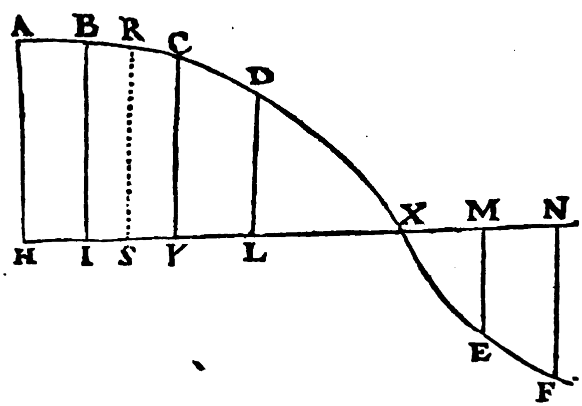


quam attingat; problema eſt impoſſibile; quod ſi eam bis ſecet, anguli duo ſatiſfaciunt. Patet quoque datam ſemper eſſe rationem diametrorum hyperbolæ, ubicumque ſitum ſit punctum r, vel R; eſt enim D R ad $\frac{DR \times DZ}{DP}$ in ratione datâ D P ad D Z.

74. Angulus elevationis P D C maximæ omnium amplitudini horizontali conveniens ita determinatur. Per punctum D ducatur D X ipſi D P perpendicularis quæ ſit ad D P ut eſt D P ad P Z: jungatur Z X Logarithmicam ſecans in H, & ex D per H ducatur recta D H ſecans P O in Q; erit Q Z ſinus anguli quæſiti, exiſtente ſinu toto D P. Sit enim D R amplitudo horizontalis maxima $= c$, D V $= v$, V R $=$ V r $= z$, & erit ob angulum D R V rectum $vv - zz = cc$, & ſumptis fluxionibus $2 v dv - 2 z dz = 2 c dc = 0$ (48), ideoque $v dv = z dz$. Sed (69) $z = a L \frac{b}{b-v} - \frac{av}{b} = a L b - a L b - v - \frac{av}{b}$, & ſumptis fluxionibus $dz = \frac{a dv}{b-v} - \frac{a dv}{b} = \frac{a v dv}{bb - bv}$. Quare erit $z dz = \frac{azv dv}{bb - bv} = v dv$, & ideo $az = bb - bv$; ac proinde DP(b) : PZ(a) $=$ HL(z) : PV ($b-v$); verùm ob triangulorum D V L, D P Z ſimilitudinem eſt D P : D Z $=$ P V : Z L; unde per compoſitionem rationum & ex æquo $DP^2 : PZ \times DZ = HL : ZL$, & quia $DP^2 = DX \times PZ$ (*per conſtr.*), erit DX : DZ $=$ HL : LZ. Quapropter punctum H per æquationem $az = bb - bv$ determinatum perpetuo tangit lineam rectam X Z; cùmque idem punctum in Logarithmica eſſe oporteat ut determinetur maxima amplitudo D R, ſi per interſectionem H rectæ X Z & Logarithmicæ D H o ducatur recta D Q ſecans P o in Q, habebitur Q Z ſinus anguli P D C (73) maximæ amplitudini D R convenientis. Q. E. D.

75. Jam ſi oporteat curvam regularem deſcribere, per data quotlibet puncta tranſeuntem, uti poſſumus generali methodo, quam Newtonus in Arithmeticâ univerſali tradidit, quamque deinde in Problematis 55,

58 &



58 & 61. adhibuit. Hæc ſunt ipſius verba: „Cùm curva non datur ſpecie, ſed determinanda proponitur, poſſiſque pro arbitrio æquationem fingere quæ naturam ejus generaliter contineat, & hanc pro eâ deſignandâ tanquam ſi daretur aſſumere, ut ex ejus aſſumptione quomodocumque perveniatur ad æquationes ex quibus aſſumpta tandem determinetur. Si itaque curva generis dati per data puncta delineanda ſit, aſſumatur generalis ad curvam illam æquatio cum terminorum coëfficientibus indeterminatis, & curvâ ad rectam aliquam poſitione datam relatâ, ex ſingulis punctis datis in rectam illam demittantur perpendiculares aut rectæ aliæ inter ſe parallelæ, quæ datæ erunt ut & earum abſciſſæ a dato in rectâ illâ puncto computatæ; deinde in aſſumptâ æquatione loco abſciſſæ variabilis x & ordinatæ etiam variabilis y ſcribantur abſciſſæ & ordinatæ per puncta data determinatæ, & tot inde obtinebuntur æquationes quot ſunt puncta data per quæ curva tranſire debet, atque ex illis æquationibus, generalis æquationis aſſumptæ coëfficientes determinabuntur. Hujus methodi exemplum ſit ſolutio Lemmatis 5. lib. 3. Principiorum, quod ita propoſitum eſt: invenire curvam generis parabolici quæ per data quotcumque puncta tranſibit; cujus Lemmatis ſolutionem dedit ibidem NEWTONUS, ſed ſine demonſtratione, quæ tamen ex ejuſdem auctoris differentiali methodo colligi poteſt.

76. I. Sunto puncta illa A, B, C, D, E, F, &c. & ab iiſdem ad rectam 76.
quamvis poſitione datam HN demittantur perpendicula quotcumque AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c.; poſitiſque abſciſsâ variabili $HS = x$, & ordinatâ $RS = y$, aſſumatur generalis ad parabolam ABDEF æquatio $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$ &c., ſintque A, B, C, D, E, &c. cum ſuis ſignis indeterminatæ. Dicantur $AH = a$, $BI = f$, $CK = g$, $DL = h$, $ME = -k$, & $HI = l$, $HK = m$, $HL = n$, $HM = t$, &c. Ponantur 1°. $y = a$ & $x = 0$; 2°. $y = f$, & $x = l$; 3°. $y = g$ & $x = m$; 4°. $y = h$, & $x = n$; 5°. $y = -k$, & $x = t$ atque ita deinceps, & loco y & x ſeorſim ſubſtituantur hi valores in æquatione generali aſſumpta, quæ in has mutabitur:

II. $a = A$

$f = A + Bl + Cl^2 + Dl^3 + El^4 +$ &c.

$g = A + Bm + Cm^2 + Dm^3 + Em^4 +$ &c.

$h = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4 +$ &c.

$-k = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4 +$ &c.

Subducantur æquationes inferiores ex ſuperioribus, nimirum ſecunda ex primâ, tertia ex ſecundâ, & ita deinceps. Differentia verò primæ ac ſecundæ ordinatæ per primum intervallum HI diviſa dicatur b, id eſt, $b = \frac{a-f}{l}$; ſecundæ ac tertiæ ordinatæ differentia per ſecundum intervallum IK diviſa dicatur 2b, id eſt, $2b = \frac{f-g}{m-l}$, & ita de cæteris. Prodibunt æquationes ſequentes.

III. $b = \frac{a-f}{l} = -B - Cl - Dl^2 - El^3$

$2b = \frac{f-g}{m-l} = -B - Cl - Cm - Dl^2 - Dlm - Dm^2 - El^3 - El^2m - Elm^2 - Em^3$

$3b = \frac{g-h}{n-m} = -B - Cm - Cn - Dm^2 - Dmn - Dn^2 - Em^3 - Em^2n - Emn^2 - En$

$4b = \frac{h+k}{t-n} = -B - Cn - Ct - Dn^2 - Dnt - D^2 - En^3 - En^2t - Ent^2 - Et^3$

Similiter modo capiantur adhuc æquationum iſtarum differentiæ, & dividantur per intervallum inter duas ordinatas interceptum H K, I L, K M, & differentiæ ſic diviſæ dicantur c, 2 c, 3 c, ut hic factum videtur.

IV. $c = \frac{b-2b}{m} = C + Dl + Dm + El^2 + Elm + Em^2$.

$2c = \frac{2b-3b}{n-l} = C + Dl + Dm + Dn + El^2 + Elm + Em^2 + Eln + Emn + En^2$.

$3c = \frac{3b-4b}{t-m} = C + Dm + Dn + Dt + Em^2 + Emn + En^2 + Emt + Ent + Et^2$.

Harum æquationum differentiæ per intervalla trium ordinatarum H L, I M; diviſæ dicantur d, 2 d, & erunt æquationes.

V. $d = \frac{c-2c}{n} = -D - El - Em - En$

$2d = \frac{2c-3c}{t-l} = -D - El - Em - En - Et$

Harum tandem æquationum differentia per intervallum quatuor ordinatarum H M diviſa dicatur e, & erit.

VI. $e = \frac{d-2d}{t} = E$.

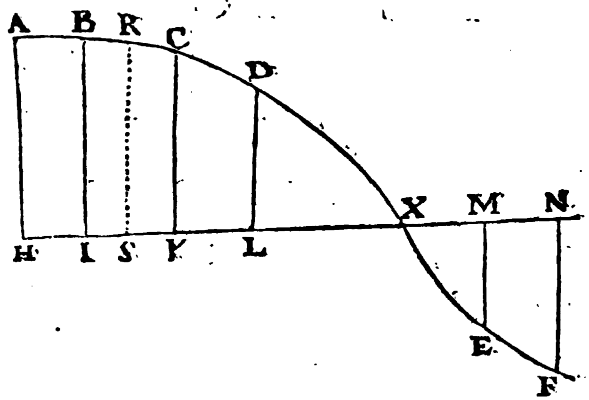
Si plura fuiſſent puncta data, pluresque ideo fuiſſent æquationes, eodem modo pergendum eſſet uſque ad differentiam ultimam: quæ hic eſt differentia quarta, & ſic tandem pervenitur ad valorem coëfficientis ultimi termini æquationis generalis aſſumptæ, & deinde retrogrediendo inveniuntur valores aliarum coëfficientium D, C, B, & A hoc modo.

VII. Quoniam $e = E$, & (V) $d = -D - El - Em - En$, erit $D = -d - el - em - en$; & quia (IV) eſt $c = C + Dl + Dm + El^2 + Elm + Em^2$ ideoque $C = c - Dl - Dm - El^2 - Elm - Em^2$ ſi loco E & D ſubſtituantur eorum valores modo inventi, habebitur $C = c + dl + dm + elm + cnl + emn$. Et ſimili modo ſi in æquatione (III.) $b = -B - Cl - Dl^2 - El^3$, ſubſtituantur coëfficientium E, D, C valores, invenietur $B = -b - cl - dlm - elmn$.

VIII. Cùm igitur ſit (II.) $A = a$; æquatio aſſumpta $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$, in hanc abit $y = a - x.(bcl + dlm + elmn) + x^2.(c + dl + dm + elm + enl + emn) - x^3.(d + el + em + en) + ex^4 = a - bx - clx + cx^2 - dlmx + dlx^2 + dmx^2 - dx^3 - elmnx + elmx^2 + enlx^2 + emnx^2 - elx^2 - emx^3 - enx^3 + ex^4$, ſeu $y = a + b.(\overline{-x}) + c.(\overline{-x} \times \overline{l-x}) + d.(\overline{-x} \times \overline{l-x} \times \overline{m-x}) + e.(\overline{-x} \times \overline{l-x} \times \overline{m-x} \times \overline{n-x})$ + &c. In quâ æquatione patet terminorum progreſſus, & quomodo datâ abſciſſâ H S ſeu x inveniri compendiosè poſſit correſpondens ordinata S R ſeu y. Nam ſi dicantur $\overline{-x}$ ſeu $-HS = p$; $-IS \times p$, ſeu $\overline{-x} \times \overline{l-x} = q$; $+SK \times q$, ſeu $\overline{-x} \times \overline{l-x} \times \overline{m-x} = r+$, $SL \times r$, ſeu $\overline{-x} \times \overline{l-x} \times \overline{m-x} \times \overline{n-x} = s$, ita ſcilicet pergendo ad uſque perpendiculum penultimum, quod hic eſt D L; erit R S ſeu $y = a + bp + cq + dr + es$ + &c.

IX. Atque hæc ipſa eſt regula quam NEWTONUS caſu ſecundo Lemmatis V. lib. III. ſic tradit: collige perpendiculorum A H, B I, C K &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum diviſas b, 2 b, 3 b, 4 b &c; ſecundas per intervalla bina diviſas c, 2 c, 3 c, 4 c &c; tertias per intervalla terna diviſas d, 2 d, 3 d, &c.; quartas per intervalla quaterna diviſas e, 2 e, &c. Et ſic deinceps. Inventis differentiis, dic $AH = a$, $-HS = p$, p in $-IS = q$, q in $+SK = r$, r in $+SL = s$, pergendo ſcilicet ad uſque perpendiculum penultimum. Et erit ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es$ + &c. ubi obſervandum eſt, præponenda eſſe ſigna negativa terminis H S, I S &c. qui jacent ad partes puncti S verſus A, & ſigna affirmativa terminis S K, S L &c. qui jacent ad alteras partes puncti S.

X. Per hanc igitur regulam, aſſumptâ quâ-



quālibet abſciſſā HS, invenietur valor ordinatæ correſpondentis SR, ſingulaque parabolæ puncta determinabuntur. Si vero in æquatione ponatur $y = o$, & deinde quæratur valor abſciſſæ x, cognoſcetur punctum X quo parabola rectam HN interſecat.

77. XI. Si perpendiculorum HA, IB, KC, LD &c. æqualia ſunt intervalla HI, IK, KL &c.; cæteris ut ſupra (I) nominibus ſervatis, poſitoque intervallo $HI = l = 1$, erunt $HK = m = 2$, $HL = n = 3$, $HM = s = 4$, &c. & perpendiculorum differentiæ per intervalla, per intervalla bina, terna, quaterna, & diviſæ erunt (III, IV, V, VI) quæ ſequuntur.

Differentiæ primæ per intervalla diviſæ, $b = a - f$, $2b = f - g$, $3b = g - h$, $4b = h + k$.

Differentiæ ſecundæ per intervalla bina diviſæ, $c = \frac{a - 2f + g}{2}$, $2c = \frac{f - 2g + h}{2}$, $3c = \frac{g - 2h - k}{2}$.

Differentiæ tertiæ per intervalla terna diviſæ, $d = \frac{a - 3f + 3g - h}{6}$, $2d = \frac{f - 3g + 3h + k}{6}$

Differentiæ quartæ per intervalla quaterna diviſæ, $e = \frac{a - 4f + 6g - 4h - k}{24}$.

XII. Ponantur $a - f = \beta$, $a - 2f + g = \kappa$; $a - 3f + 3g - h = \delta$, $a - 4f + 6g - 4h - k = \varepsilon$; 77.
& erit $b = \beta$, $c = \frac{\kappa}{2}$, $d = \frac{\delta}{6}$, & $= \frac{\varepsilon}{24}$. Quare ſi hi valores ſubſtituantur in æquatione ſupra (VIII.) inventa, $y = a + b.(-x) + c.(-x \times l - x) + d.(-x \times l - x \times m - x) + e.(-x \times l - x \times m - x \times n - x) + \&c.$, illa in hanc mutabitur $y = a + \beta(-x) + \frac{\kappa(-x \times 1 - x)}{2} + \frac{\delta.(-x \times 1 - x \times 2 - x)}{2 \times 3} + \frac{\varepsilon.(-x \times 1 - x \times 2 - x \times 3 - x)}{2 \times 3 \times 4} + \&c.$

Quapropter ſi in hâc ultimā æquatione dicantur $-$HS, ſeu $-x = p$; $\frac{1}{2}p$ in $-$IS, ſeu $\frac{-x \times 1 - x}{2} = q$; $\frac{1}{3}q$ in $+$SK, ſeu $\frac{-x \times 1 - x \times 2 - x}{2 \times 3} = r$; $\frac{1}{4}r$ in $+$SL, ſeu $\frac{-x \times 1 - x \times 2 - x \times 3 - x}{2 \times 3 \times 4} = s$; & ita pergatur ad uſque perpendiculum penultimum, erit $y = a + \beta p + \kappa q + \delta r + \varepsilon s + \&c.$ ut NEWTONUS in caſu primo Lemmatis V. lib. III. determinavit. De hoc problemate Lector conſulat clariſſimos auctores, *Hermannum* in Appendice ad Phoronomiam, *Craigium* in Tractatu de Calculo fluentium, maximè verò *Stirling* in libro de Interpolatione ſerierum, in quo totam hanc materiam copioſè & ſagaciter explicat.

SECTIO II.

De motu corporum quibus reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatum.

PROPOSITIO V. THEOREMA III.

Si corpori reſiſtitur in velocitatis ratione duplicatâ, & idem ſolâ vi inſitâ per medium ſimilare movetur; tempora verò ſumantur in progreſſione geometricâ à minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio ſingulorum temporum ſunt in eâdem progreſſione geometricâ inverſè; & quod ſpatia ſunt æqualia, quæ ſingulis temporibus deſcribuntur.

Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis & reſiſtentia medii, & (d) reſiſtentiæ proportionale eſt decrementum velocitatis; ſi tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum ſingulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ AK, KL, LM, &c. in rectâ CD ſumptæ, & erigantur perpendicula AB, Kk, Ll, Mm, &c. hyperbolæ $BklmG$, centro C aſymptotis rectangulis CD, CH deſcriptæ, occurrentia in B, k, l, m, &c. & (e) erit AB ad Kk ut CK ad CA, & diviſim $AB - Kk$ ad Kk ut AK ad CA, & viciſſim $AB - Kk$ ad AK ut Kk ad CA, ideoque ut $AB \times Kk$ ad $AB \times CA$. Unde, (f) cùm AK & $AB \times CA$ dentur, erit $AB - Kk$ ut $AB \times Kk$; & ultimo, ubi coeunt AB & Kk, ut $AB\,q$. Et ſimili argumento erunt $Kk - Ll$, $Ll - Mm$, &c. ut Kk *quad.* Ll *quad.* &c. Linearum igitur AB, Kk, Ll, Mm quadrata ſunt ut earundem differentiæ (†); & idcirco cùm quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipſarum diffe-

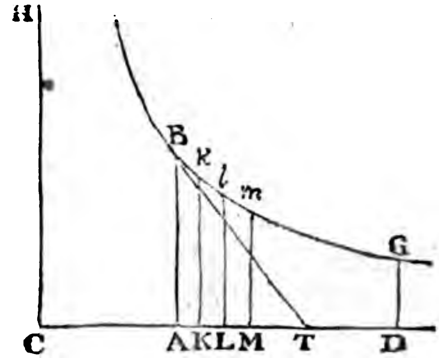
(d) * *Et reſiſtentiæ proportionale eſt decrementum velocitatis*; dato nempe temporis momento, (1. 15.)

(e) * *Et erit A B ad K k ut* C *K ad* C *A*, (per theor. 4. de hyp.)

(f) * *Undè cùm A K, & A B × C A dentur.* A K quidem (ex hyp. tempus enim in particulas innumeras æquales dividitur, quæ per lineas æquales A K, K L &c. exponuntur) & A B × C A (*per theor.* 4. *de hyp.*)

(†) * Scilicet ex naturâ Hyperbolæ inter ſuas Aſymptotos, fluxiones ordinatarum ſunt ut earum ipſarum ordinatarum qua-

differentiæ, (g) ſimilis erit ambarum progreſſio. (h) Quo demonſtrato, conſequens eſt etiam ut areæ his lineis deſcriptæ ſint in progreſſione conſimili cum ſpatiis quæ velocitatibus deſcribuntur. Ergo ſi velocitas initio primi temporis *AK* exponatur per lineam *AB*, & velocitas initio ſecundi *KL* per lineam *Kk*, & longitudo primo tempore deſcripta per aream *AKkB*; velocitates omnes ſubſequentes exponentur per lineas ſubſequentes *Ll*, *Mm*, &c. & longitudines deſcriptæ per areas *Kl*, *Lm*, &c. Et compoſitè, ſi tempus totum exponatur per ſummam partium ſuarum *AM*, longitudo tota deſcripta exponetur per ſummam partium ſuarum *AMmB*. Concipe jam tempus *AM* ita dividi in partes *AK*, *KL*, *LM*, &c. ut ſint *CA*, *CK*, *CL*, *CM*, &c. in progreſſione geometricâ; & (i) erunt partes illæ in eâdem progreſſione, & (k) velocitates *AB*, *Kk*, *Ll*, *Mm*, &c. in progreſſione eâdem inverſâ, (l) atque ſpatia deſcripta *Ak*, *Kl*, *Lm*, &c. æqualia. *Q. E. D.*



Corol.

quadrata; Æquatio enim Hyperbolæ inter ſuas Aſymptotos eſt $xy = a^2$; Æquatio fluxionalis $x\,dy + y\,dx = 0$; & $dy = -\frac{y\,dx}{x}$, cùm verò ſit $\frac{y}{a^2} = \frac{1}{x}$, ſit $dy = \frac{yy\,dx}{a^2}$, cùm ergo dx ſit fluxio ſibi ſemper æqualis, & a^2 ſit quantitas conſtans, eſt dy ut $-yy$.

(g) * *Similis erit ambarum progreſſio*; & ideo velocitates ſingulis temporum æqualium A K, K L, L M &c. initiis exponi poſſunt per lineas A B, K k, L l &c.

(h) * *Quo demonſtrato, conſequens eſt ut areæ* A B K k, K k l L, L l m M, &c. *ſint in progreſſione conſimili cum ſpatiis quæ velocitatibus* A B, K k, L l &c., tempuſculis A K, K L, L M &c.; *deſcribuntur* (14). 77

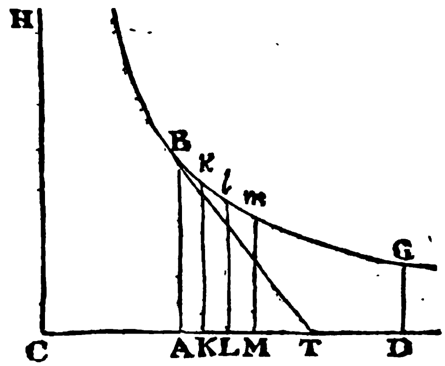
(i) 78. * *Et erunt partes illæ* A K, K L, L N, &c. quæ ſunt differentiæ linearum CA, CK, CL, CM, &c. in eâdem progreſſione. Differentiæ enim cujuſvis progreſſionis geometricæ, ſunt in eâdem progreſſione geometricâ. Nam cùm ſit C A : C K = C K : C L = C L : C N &c., erit auferendo antecedentia ex antecedentibus & conſequentia ex conſequentibus C A : C K = A K : K L = K L : L M &c.

(k) * *Et velocitates A B, K k, L l, M m &c., in progreſſione eâdem inverſâ.* Siquidem (*per theor.* 4. *de hyp.*) eſt A B ut C A, inverſè, K k ut C K inverſè.

(l) * *Atque ſpatia deſcripta*, A B k K, K k l L, L l m M &c., æqualia (380. lib. 1.)

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. II. Prop. V. Theor. III.

Corol. 1. Patet ergo quòd, ſi tempus exponatur per aſymptoti partem quamvis *AD*, & velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam *AB*; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam *DG*, & ſpatium totum deſcriptum per aream hyperbolicam adjacentem *ABGD*; necnon ſpatium, quod corpus aliquod eodem tempore *AD*, velocitate primâ *AB*, in medio non reſiſtente deſcribere poſſet, (m) per rectangulum *AB* × *AD*.



Corol. 2. Unde datur ſpatium in medio reſiſtente deſcriptum, capiendo illud ad ſpatium quod velocitate uniformi *AB* in medio non reſiſtente ſimul deſcribi poſſet, ut eſt area hyperbolica *ABGD* ad rectangulum *AB* × *AD*.

Corol.

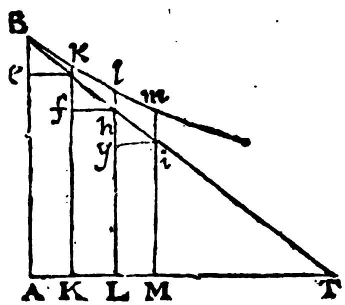
(m) 79. * *Per rectangulum* A B × A D. Si enim velocitas A B, manet eadem, tempore AK, deſcribet corpus ſpatium AB×AK, dum in medio reſiſtente deſcribit ſpatium A B k K, tempore K L velocitate A B deſcribet ſpatium A B × K L, dùm in medio reſiſtente deſcribit ſpatium K k l L, & ità deinceps (14. lib 1.); Quare tempore A M velocitate primâ A B in medio non reſiſtente deſcribet corpus ſpatium A B × (A K + K L + L M) = A B × A M; & tempore A D, ſpatium A B × A D. Et quoniam ipſo motûs initio, eſt area ABkK, æqualis rectangulo A B × A K, atque ſpatia in medio reſiſtente & in medio non reſiſtente deſcripta temporis momento A K, ſunt etiam æqualia, liquet ſpatium in medio reſiſtente deſcriptum tempore quovis A D, eſſe ad ſpatium eodem tempore in medio non reſiſtente deſcriptum velocitate A B, ut eſt area hyperbolica A C G D ad rectangulum A B × A D.

80. Ex corollario primo ſequitur, tempore infinito ſpatium infinitum deſcribi in medio quod reſiſtit in ratione quadrati velocitatis. Non enim evaneſcet G D, hoc eſt, velocitas tota extincta non erit, niſi infinita evadat recta A D, hoc eſt niſi tempus motûs ſit infinitum, tuncque infinita ſit area A B G D, ſeu ſpatium deſcriptum eſt infinitum.

Corol. 3. Datur etiam reſiſtentia medii, ſtatuendo eam ipſo motûs initio æqualem eſſe vi uniformi centripetæ, quæ in cadente corpore, tempore *A C*, in medio non reſiſtente, generare poſſet velocitatem *A B*. Nam ſi ducatur *B T* quæ tangat hyperbolam in *B*, & occurrat aſymptoto in *T*; (n) recta *A T* æqualis erit ipſi *A C*, & (o) tempus exponet, quo reſiſtentia prima uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem totam *A B*.

Corol. 4. (p) Et inde datur etiam proportio hujus reſiſtentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol.



(n) * *Recta A T æqualis erit ipſi A C.* (Per theor. 1. de Hyp.)

(o) * *Et tempus exponet.* Ordinatæ K k, L l, M m, &c. rectæ B T, occurrant in k, h, i, &c. ex punctis k, h, i, demiſſa ſint ad A B, K k, L l, &c. perpendicula K e, h f, i g, &c. & ſumptis temporibus quam minimis A k, k L, L M, æqualibus erunt B e, k f, h g æquales, ſed reſiſtentia prima temporis momento A K, tollit velocitatem A B — K k, ſeu B e, & eadem uniformiter continuata temporis momento K L, ſive A K, tolleret etiam velocitatem k f = B e, & temporis momento L M, ſeu A K, velocitatem g h = B e, atque ita deinceps; Quarè reſiſtentia prima uniformiter continuata tempore A T tolleret velocitatem totam A B, quia A B æqualis eſt omnibus differentiis B e, k f, g h, &c. uſque ad T; vis autem centripeta quæ tempore A K, producit velocitatem B e, æqualis eſt vi quæ eodem temporis momento eandem velocitatem B e extinguit, ſeu æqualis eſt reſiſtentiæ primæ, & illa vis centripeta uniformis manens toto tempore A T, totam velocitatem A B, produceret, quam reſiſtentia prima uniformis manens eodem tempore extingueret; ergò reſiſtentia prima æqualis eſt vi uniformi centripetæ quæ in cadente corpore, tempore A T ſive A C, in medio non reſiſtente generare poſſet velocitatem A B.

(p) * *Et indè datur etiam proportio.* Sunt enim vires centripetæ uniformes ut velocitates quas dato tempore producunt (13. *lib.* 1.) & ideò erit reſiſtentia prima ad gravitatem ut velocitas quam producit vis centripeta uniformis cui reſiſtentia illa æqualis ſupponi poteſt, ad velocitatem quam vis gravitatis eodem tempore generat.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. II. Prop. V. Theor. III.

Corol. 5. Et vice verſâ, ſi datur proportio reſiſtentiæ ad datam quamvis vim centripetam; (q) datur tempus *AC*, quo vis centripeta reſiſtentiæ æqualis generare poſſit velocitatem quamvis *AB*: & inde datur punctum *B* per quod hyperbola aſymptotis *CH*, *CD*, deſcribi debet; ut (r) & ſpatium *ABGD*, quod corpus incipiendo motum ſuum cum velocitate illâ *AB*, tempore quovis *AD*, in medio ſimilari reſiſtente deſcribere poteſt.

(q) *Datur tempus AC quo vis reſiſtentiæ æqualis generare poſſit velocitatem AB.* Si enim detur vis quædam centripeta, dabitur tempus quo velocitatem A B generare poteſt. Tempora autem quibus diverſæ vires centripetæ eamdem velocitatem generare poſſunt, ſunt inversè ut illæ vires; Ergo ſi datur ratio vis centripetæ cui reſiſtentia eſt æqualis ad aliam vim datam, dabitur ratio temporis quo hæc vis velocitatem A B generare poteſt ad tempus quo vis, cui reſiſtentia eſt æqualis eam velocitatem generat, hoc eſt datur tempus A C.

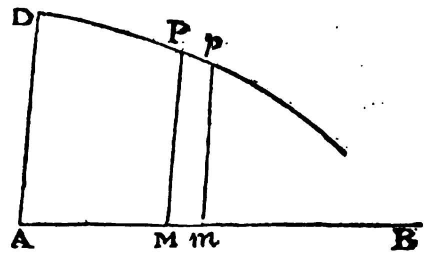
(r) * *Ut & ſpatium ABGD.* His enim datis, datur tùm area ABGD, tùm rectangulum AB×AD, tùm ſpatium quod corpus temporè AD, cum datâ velocitate uniformi AB, deſcriberet in medio non reſiſtente, ideóque cum ſit AB × AD, ad ABGD, ut ſpatium tempore AD & velocitate AB in medio non reſiſtente deſcriptum ad ſpatium eodem tempore deſcriptum in medio reſiſtente (*per cor.* 2.) hoc ſpatium dabitur.

81. *Scholium.* Hujus propoſitionis conſtructio ad Logarithmicam reduci facilè poſſet; ſed id relinquimus lectoris arbitrio, generalis problematis quod ſequitur, ſolutionem analyticam tradituri, ut inventionis fons ipſe aperiatur.

PROBLEMA.

82. Definire motum corporis ſolâ vi inſitâ lati in medio quod reſiſtit in ratione compoſitâ ex ſimplici ratione denſitatis medii, & quâvis ratione multiplicatâ celeritatis mobilis.

E loco A egrediatur corpus cum veloci-



tate datâ c & tempore t deſcribat rectam AM $= s$, ſitque ejus velocitas in M $= v$ denſitas medii in eodem loco $= k$, & reſiſtentia r erit (17.) $r\,ds = -v\,dv$. Ponatur reſiſtentia $r = \frac{kv^n}{a^n}$, ſitque a quantitas data, & habebitur $\frac{kv^n ds}{a^n} = -v\,dv$, & hinc $k\,ds = -a^n v^{1-n} dv$. Per punctum M, erigatur ad AM, perpendiculum MP quod exponat medii denſitatem k in loco M, ſitque DPp curva quam punctum P perpetuò tangit, & erecto altero perpendiculo mp priori MP infinitè propinquo ut ſit Mm $= ds$, erit elementum MPpm $= k\,ds = -a^n v^{1-n} dv$, ſumptiſque fluentibus, area ADPM $= \frac{Q - a^n v^{2-n}}{2-n}$; Quia verò evaneſcente areâ ADPM, evaneſcit quoque s, & ſit $v = c$, erit $0 = \frac{Q - a^n c^{2-n}}{2-n}$, & ideo conſtans $Q = a^n c^{2-n}$, atque ità ADPM $= \frac{a^n c^{2-n} - a^n v^{2-n}}{2-n}$. Porrò ſi denſitas k, ſeu PM, eſt ut functio quævis ſpatii deſcriptis s ſive AM, poterit curva DPp deſcribi, ac proindè in hâc

Hypo-

Hypotheſi dato ſpatio deſcripto, dabitur per quadraturam areæ ADPM, velocitas, & contrà datâ velocitate dabitur area ADPM, & hinc dabitur ſpatium deſcriptum AM, inde etiam (14. *lib.* 1., datâ velocitate aut ſpatio dabitur tempus t, & contrà.

83. Si $n = 2$, fit $2 - n = 0$, & ideò reſumenda eſt æquatio MPpm $= -a^n v^{1-n} dv = -\frac{a^2 dv}{v}$, quæ, ſumptis fluentibus, abit in hanc ADPM $= Q - a^2 L.v$, & quia poſitâ areâ ADPM $= 0$, fit $v = c$, erit $Q = a^2 L.c$, ideoque ADPM $= a^2 L.c - a^2 L.v = a^2 L.\frac{c}{v}$. Sit ADPM $= b$, logarithmus numeri $h = 1$, ſeu $L.h = 1$, erit $b L.h = a^2 L.\frac{c}{v}$, & $\frac{b}{a^2} \times L.h = L.\frac{c}{v}$, ſeu $L.h^{\frac{b}{aa}} = L.\frac{c}{v}$, ac proindè $h^{\frac{b}{aa}} = \frac{c}{v}$, & $v = \frac{c}{h^{\frac{b}{aa}}}$. Quarè dato ſpatio, dabitur velocitas, & hinc dabitur tempus (14) & contrà.

84. Sit denſitas uniformis ſeu $k = 1$, erit $k\,ds = ds = -a^n v^{1-n} dv$, ſumptiſque fluentibus $s = \frac{Q - a^n v^{2-n}}{2-n} = \frac{a^n c^{2-n} - a^n v^{2-n}}{2-n}$.

Undè reperitur $v = \frac{[a^n c^{2-n} + (n-2)s]^{\frac{1}{2-n}}}{a^{\frac{n}{2-n}}}$.

Invenitur tempus per formulam $dt = \frac{ds}{v} = -\frac{a^n v^{1-n} du}{v} = -a^n v^{-n} dv$. Et ſumptis fluentibus, fit $t = \frac{Q - a^n v^{1-n}}{1-n} = \frac{a^n c^{1-n} - a^n v^{1-n}}{1-n}$, quia poſito $t = 0$, fit $v = c$, & proindè $Q = a^n c^{1-n}$.

85. Si $k = 1$, & $n = 1$, hoc eſt, ſi denſitas eſt uniformis & reſiſtentia ut velocitas erit (84) $s = ac - av$; & quia (*ibid.*) $dt = -a^n v^{-n} dv = -\frac{a\,dv}{v}$, erit $t = Q - aL.v = aL.c - aL.v = aL.\frac{c}{v}$, quod poſito tempore $t = 0$, fiat $v = c$ & proindè $Q = aL.c$.

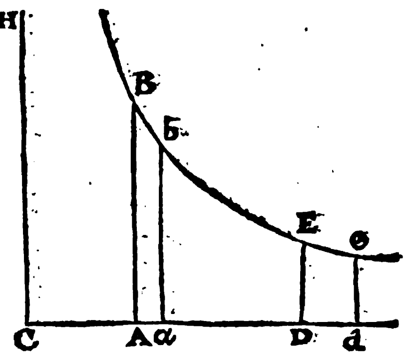
86. Si $k = 1$, & $n = 2$, erit (84) $t = \frac{a^2 c - a^2 v}{cv}$, & quia (ibid.) $ds = -a^n v^{1-n} dv = -\frac{a^2 dv}{v}$, erit $s = Q - a^2 L.v = a^2 L.c - a^2 L.v = a^2 L.\frac{c}{v}$.

87. Si in æquatione ſpatii & velocitatis ſuprà inventâ, velocitas v, ſupponatur $= 0$, erit $s = \frac{a^n c^{2-n}}{2-n}$, ſi n eſt numerus binario minor, at ſi n eſt numerus binario major, cum ſit $s = \frac{a^n c^{2-n} - a^n v^{2-n}}{2-n} = \frac{a^n}{2-n} \times c^{2-n} - v^{2-n}$ ut loco $2-n$, quæ eſt quantitas negativa, expreſſio $n-2$, quæ eſt poſitiva, ſubſtitui poſſit, fiet $s = -\frac{a^n}{n-2} \times \frac{1}{c^{n-2}} - \frac{1}{v^{n-2}} = -\frac{a^n}{n-2} \times \frac{v^{n-2} - c^{n-2}}{c^{n-2} v^{n-2}} = \frac{a^n}{n-2} \times \frac{c^{n-2} - v^{n-2}}{c^{n-2} v^{n-2}}$; ſi fiat ergo $v = 0$ erit $s = \frac{a^n \times c^{n-2}}{n-2 \times 0} = \infty$; & ubi $n = 2$, erit (86) $s = a^2 L.\frac{c}{0} = \infty$. Quarè ſi n eſt numerus poſitivus binario minor, deſcripto ſpatio aliquo finito velocitas omnis extinguitur; at ſi n binario æqualis eſt vel major, ſpatium infinitum conficitur, priuſquam velocitas evaneſcat. 87.

88. Si in æquationibus temporis & velocitatis, velocitas v evadat $= 0$, erit (84) $t = \frac{a^n c^{1-n}}{1-n}$, ſi n eſt numerus unitate minor, at erit $t = \infty$, ſi n eſt unitate major, & (85) $t = aL.\frac{c}{0} = \infty$, ubi $n = 1$. Quapropter ſi numerus poſitivus n eſt unitate minor, velocitas tempore finito extinguitur, ſpatio etiam finito deſcripto (87). Si n eſt unitati æqualis vel ipſâ major, velocitas nonniſi tempore infinito extingui poteſt, & ſpatium finitum eſt, ſi n eſt numerus binario minor, infinitum verò, ſi n binario æqualis vel major (87.).

PROPOSITIO VI. THEOREMA IV.

Corpora ſphærica homogenea & æqualia, reſiſtentiis in duplicatâ ratione velocitatum impedita, & ſolis viribus inſitis incitata, temporibus quæ ſunt reciproce ut velocitates ſub initio, deſcribunt ſemper æqualia ſpatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.



Aſymptotis rectangulis *CD*, *CH* deſcriptâ hyperbolâ quâvis *B b E e* ſecante perpendicula *A B*, *a b*, *D E*, *d e*, in *B*, *b*, *E*, *e*, (s) exponantur velocitates initiales per perpendicula *A B*, *D E*, & tempora per lineas *A a*, *D d*. Eſt ergo ut *A a* ad *D d* ita (per hypotheſin) *D E* ad *A B*, & ita (ex (t) naturâ hyperbolæ) *C A* ad *CD*; & componendo, ita *Ca* ad *Cd*. (u) Ergo areæ *AB b a*, *D E e d*, hoc eſt, ſpatia deſcripta æquantur inter ſe, & velocitates primæ *A B*, *D E* ſunt ultimis *a b*, *d e*, & propterea dividendo partibus etiam ſuis amiſſis *A B* — *a b*, *D E* — *d e* proportionales. *Q. E. D.*

PROPOSITIO VII. THEOREMA V.

Corpora ſphærica quibus reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatum, temporibus, quæ ſunt ut motus primi directè & reſiſtentiæ primæ inversè, amittent partes motuum proportionales totis, & ſpatia deſcribent temporibus iſtis & velocitatibus primis conjunctim proportionalia.

(x) Namque motuum partes amiſſæ ſunt ut reſiſtentiæ & tem-

(s) * *Exponantur velocitates initiales &c.* Cùm enim corpora duo ſimilia homogenea & æqualia ſupponantur, eorum motus conſiderari poſſunt tanquam motus unius ejuſdemque corporis variis celeritatis gradibus acti (*ut in prop.* 5.) ideóque (*per coroll.* 1. *prop.* 5.) velocitates initiales exponi poſſunt per lineas A B, D E, tempora per lineas A a, D d, velocitates in fine illorum temporum reſiduæ per lineas a b, d e, & ſpatia his temporibus deſcripta per areas Hyperbolicas A B b a, D E e d.

(t) * *Ex naturâ Hyperbolæ.* (Per theor. 4. de Hyperb.)

(u) * *Ergò areæ A B b a, D E e d,* (378. Lib. 1.)

(x) * *Namque motuum partes amiſſæ &c.* (2)

tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ ſint totis proportionales, debebit reſiſtentia & tempus conjunctim eſſe ut motus. Proinde tempus erit ut motus directè & reſiſtentia inversè Quare temporum particulis in eâ ratione ſumptis, corpora amittent ſemper particulas motuum proportionales totis, (y) ideoque retinebunt velocitates velocitatibus ſuis primis ſemper proportionales. Et (z) ob datam velocitatum rationem, deſcribent ſemper ſpatia, quæ ſunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. *Q. E. D.*

(a) *Corol.* 1. Igitur ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in duplicatâ ratione diametrorum: globi homogenei quibuſcunque cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia diametris ſuis proportio-

(y) * *Ideoque retinebunt velocitates* in ratione primâ, ob datas corporum maſſas (6. lib. 1.)

(z) * *Et ob datam velocitatum rationem* (12.)

89. Tota propoſitionis hujus demonſtratio per Analyſim hoc modo exponitur. Sit globi cujuſvis maſſa m, velocitas data initio motûs c, in fine temporis t ſit v, reſiſtentia data initio motûs r, & quia ejuſdem corporis reſiſtentiæ in diverſis locis ſunt ut velocitatum quadrata (*per Hyp.*) erit cc, ad vv, ut r, ad reſiſtentiam elapſo tempore t, quæ proindè erit $\frac{rvv}{cc}$. Sed (2) reſiſtentia $\frac{rvv}{cc}$ eſt ut motûs decrementum $-m\,dv$ directè, & temporis momentum dt, inversè, hoc eſt, $\frac{rvv}{cc} = -\frac{m\,dv}{dt}$, & hinc $dt = -\frac{mcc\,dv}{rvv}$, ſumptiſque fluentibus $t = Q + \frac{mcc}{rv}$. Ponatur $t = 0$, & fiet $v = c$, adeóque $Q = -\frac{mc}{r}$, quo valore ſubſtituto fiet $t = \frac{mcc - mcv}{rv}$. Capiatur tempus t, ut motus primus mc, directè & reſiſtentia prima r, inversè, hoc eſt t ut $\frac{mc}{r}$, & erit $\frac{mc}{r}$ ut $\frac{mcc - mcv}{rv}$, ideóque mcv, ut $mcc - mcv$, & dividendo per c, mv ut $mc - mv$; & compoſitè fiet mc, ut $mc - mv$, id eſt, motus amiſſus $mc - mv$ ut motus primus mc; & hinc ob datam maſſam m, erit etiam c, ut $c - v$, id eſt, velocitas amiſſa $c - v$, ut velocitas prima c; indè etiam erit c, ad $c - c + v$, ſeu v, hoc eſt velocitas prima c, ad reſiduam v, in ratione datâ. Jam ſi ſpatium tempore t deſcriptum dicatur s, erit (13) $ds = v\,dt$, & quia v eſt ut data c, erit ds ut $c\,dt$, ſumptiſque fluentibus ob datam c, fiet s ut ct. Q. E. D.

90. Quoniam ſpatium s eſt ut ct, & t ut $\frac{mc}{r}$, erit etiam s ut $\frac{mcc}{r}$; globi cujus maſſa m diameter ſit D, & datâ globi denſitate erit maſſa m, ut volumen (2. *lib.* 1.) hoc eſt, ut diametri cubus D^3; Quare erit s ut $\frac{D^3cc}{r}$. Si præterea datâ velocitate c, reſiſtentia r eſt ut diametri D, dignitas cujus index n, hoc eſt r ut D^n; & proindè velocitate non datâ, reſiſtentia r, ut $D^n cc$, erit s ut $\frac{D^3cc}{D^n cc}$, ſeu ut D^{3-n}. Ex quibus patent corollaria quæ ſequuntur.

(a) * *Cor.* 1. Nam in Hypotheſi corollarii hujus eſt $n = 2$. adeóque s ut D.

tionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim globi cujuſque erit ut ejus velocitas & maſſa conjunctim, id eſt, ut velocitas & cubus diametri; reſiſtentia (*per hypotheſin*) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (*per hanc propoſitionem*) eſt in ratione priore directè & ratione poſteriore inversè, id eſt, ut diameter directè & velocitas inversè; ideoque ſpatium, tempori & velocitati proportionale, eſt ut diameter.

(b) *Corol.* 2. Si æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione ſeſquiplicatâ diametrorum: globi homogenei quibuſcunque cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia in ſeſquiplicatâ ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione dignitatis cujuſcunque diametrorum: ſpatia quibus globi homogenei, quibuſcunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunto diametri D & E; & ſi reſiſtentiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, ſint ut D^n & E^n: ſpatia quibus globi, quibuſcunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} & E^{3-n}. Et propterea globi homogenei deſcribendo ſpatia ipſis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eâdem ratione ad invicem ac ſub initio.

(c) *Corol.* 4. Quòd ſi globi non ſint homogenei, ſpatium à globo denſiore deſcriptum augeri debet in ratione denſitatis. Motus enim, ſub pari velocitate, major eſt in ratione denſitatis, & tempus (*per hanc propoſitionem*) augetur

(b) * *Cor.* 2. In hypotheſi corollarii hujus eſt $n = \frac{3}{2}$, ideóque s ut $D^{3-\frac{3}{2}}$, ſeu ut $D^{\frac{3}{2}}$.

(c) * *Cor.* 4. Sit globi m denſitas δ, adeóque (2 *lib.* 1.) maſſa m ut δD^3, & hinc (90) s ut $\frac{\delta D^3 e e}{r}$. Quarè ſi ponatur reſiſtentia r, ut $D^n e e$, erit s ut δD^{3-n}, hoc eſt, ſpatium s, quod datâ denſitate δ, erat ut D^{3-n}, augeri debet in ratione denſitatis δ.

tur in ratione motus directè, ac ſpatium deſcriptum in ratione temporis.

(d) *Corol.* 5. Et ſi globi moveantur in mediis diverſis; ſpatium in medio, quod cæteris paribus magis reſiſtit, diminuendum erit in ratione majoris reſiſtentiæ. Tempus enim (*per hanc propoſitionem*) diminuetur in ratione reſiſtentiæ auctæ, & ſpatium in ratione temporis.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. II. Prop. VII. Theor. V.

(e) LEMMA II.

Momentum genitæ æquatur momentis laterum ſingulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coëfficientia continuè ductis.

Genitam voco quantitatem omnem, quæ ex lateribus vel terminis quibuſcunque in arithmeticâ per multiplicationem, diviſionem, & extractionem radicum; in geometriâ per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium, ſine additione & ſubductione generatur. Ejuſmodi quantitates ſunt facti, quoti, radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica, & ſimiles. Has quantitates, ut indeterminatas & inſtabiles, & quaſi motu fluxuve perpetuo creſcentes vel decreſcentes, hic conſidero; & earum incrementa vel decrementa momentanea ſub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis ſeu affirmativis, ac decrementa pro ſubductitiis ſeu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non ſunt momenta, ſed quantitates ipſæ ex momentis genitæ. Intelligenda ſunt principia jamjam naſcentia finitarum magnitudinum. Neque enim ſpectatur in hoc lemmate magnitudo momentorum: ſed prima naſcentium proportio.

(d) * *Cor.* 5. Reſiſtentia r, quæ antè erat ut $D^n cc$, augeatur in ratione quâvis a, ſeu fit r ut $aD^n cc$, & quia s eſt ut $\frac{\delta D^3 tc}{r}$, (*cor.* 4.) fiet s ut $\frac{\delta D^3 tc}{aD^n cc}$, ſeu ut $\frac{\delta D^{3-n}}{a}$, ſpatium igitur diminuendum eſt in ratione majoris reſiſtentiæ. 90.

(e) * *Lem.* 2. Totum iſtud Lemma num. 137. & ſequentibus Lib. 1. fusè expoſitum videat lector.

tio. Eodem recidit ſi loco momentorum uſurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hiſce proportionales. (f) Lateris autem cujuſque generantis coefficiens eſt quantitas, quæ oritur applicando genitam ad hoc latus.

Igitur ſenſus (g) lemmatis eſt, ut, ſi quantitatum quarumcunque perpetuo motu creſcentium vel decreſcentium A, B, C, &c. momenta, vel his proportionales mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli AB fuerit $aB+bA$, & geniti contenti ABC momentum fuerit $aBC+bAC+cAB$: & genitarum dignitatum A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2}, & $A^{-\frac{1}{2}}$ momenta $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$ reſpectivè. Et generaliter, ut dignitatis cujuſcunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut genitæ A^2B momentum fuerit $2aAB+bA^2$; & genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2+4bA^3B^3C^2+2cA^3B^4C$; & genitæ $\frac{A^3}{B^2}$ ſive A^3B^{-2} momentum $3aA^2B^{-2}-2bA^3B^{-3}$: & ſic in cæteris. Demonſtratur verò lemma in hunc modum.

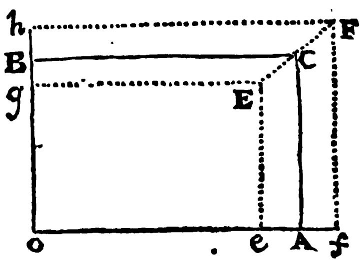
Caſ. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB, ubi

(f) *Lateris autem.* Sic lateris x, in quantitate genitâ $x^n y^m$ poſiti, coefficiens eſt $\frac{x^n y^m}{x}$, ſeu $x^{n-1}y^m$.

(g) * *Senſus Lemmatis eſt, ut, ſi quantitatum* A, B, C *momenta dicantur* a, b, c, ità ut dum A fit $A+a$, B evadat $B+b$, C evadat $C+c$ &c., *momentum vel mutatio geniti rectanguli* AB, *erit* $aB+bA$ &c., vel ſi loco litterarum A, B, C, &c. utamur litteris minuſculis x, y, z &c. quibus variabiles quantitates conſuevimus ſignificare, & loco a, b, c, &c. ſcribamus dx, dy, dz &c. ſenſus Lemmatis eſt momentum ſeu fluxionem rectanguli xy, eſſe $ydx+xdy$, fluxionem ſolidi xyz, eſſe $yzdx+xzdy+xydz$, & genitarum quantitatum x^2, x^3, x^4, $x^{\frac{1}{2}}$ &c. momenta eſſe $2xdx$, $3x^2dx$, $4x^3dx$, $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$ &c. reſpectivè; & genitæ $x^n y^m$, momentum eſſe, $ny^m x^{n-1}dx+mx^n y^{m-1}dy$ &c.

ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A - \frac{1}{2}a$ in $B - \frac{1}{2}b$, ſeu $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta ſunt, evadit $A + \frac{1}{2}a$ in $B + \frac{1}{2}b$ ſeu $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo ſubducatur rectangulum prius, & (h) manebit exceſſus $aB + bA$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $aB + bA$. *Q. E. D.*

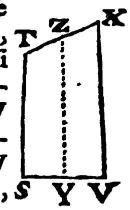
Caſ. 2. Ponatur A B ſemper æquale G, & contenti A B C ſeu G C momentum (*per caſ.* 1.) erit $gC + cG$, id eſt (ſi pro G & g ſcribantur A B & $aB + bA$) $aBC + bAC + c$



(h) * *Et manebit exceſſus* $aB + bA$.

1ᵘˢ. *Caſus.* Sit Rectangulum O A B C ſub duabus variabilibus O A, O B continuè creſcentibus; ſumantur hinc inde ab A partes æquales A e, A f; & a B partes æquales B g, B h, ita ut, ſi a & b ſint quantitates momentis linearum O A, O B proportionales ſit e f $= a$, & g h $= b$: Compleantur Rectangula O g E e, O h F f, ducatur F E, quæ tranſibit per C punctum concurſus linearum A C, B C (ob parallelas, & lineas e f & g h ſimiliter, nempe bifariam, ſectas in A & B). Dico quòd ſumma Trapeziorum E F e f & E F g h æqualis erit momento Rectanguli O A C B; obtinetur verò Trapeziorum ſumma, ſumendo differentiam Rectangulorum O e E g, O f F h, quæ eſt $\overline{Of} \times \overline{Oh} - \overline{Oe} \times \overline{Og}$, ſive $\overline{OA + Af} \times \overline{OB + Bh} - \overline{OA - Ae} \times \overline{OB - Bg}$, & vocando O A, A; O B, B; A f $=$ A e $= \frac{1}{2}a$, B h $=$ B g $= \frac{1}{2}b$ differentia Rect. erit $\overline{A + \frac{1}{2}a} \times \overline{B + \frac{1}{2}b} - \overline{A - \frac{1}{2}a} \times \overline{B - \frac{1}{2}b} = AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab - AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA - \frac{1}{4}ab = aB + bA$. 90.

Ut verò probetur ſummam Trapeziorum E F e f & E F g h æqualem eſſe momento Rectanguli O A C B, obſervandum primò: Quòd ſi lineæ quævis S T, V X, utcumque inæquales, in lineam S V ſint perpendiculares jungaturque T X, & in medio lineæ S V erigatur perpendicularis Y Z, erit Trapezium S T X V æquale Rectangulo S V $\times$ Y Z: Itaque Trapezium E F e f erit æquale Rectangulo A C $\times$ e f, & Trapezium E F g h æquale Rectangulo B C $\times$ g h. Præterea quoniam e f & g h ſunt momentis linearum O A, O B proportionales, hoc eſt, proportionales velocitatibus quibus lineæ O A, O B creſcunt, ſive, quod idem eſt, celeritatibus quibus, dum Rectangulum O A C B creſcit, lineæ A C, B C antrorſum feruntur, Rectangula A C $\times$ e f & B C $\times$ g h, erunt ut lineæ illæ A C, B C & earum velocitates conjunctim.



Mutatio autem geniti Rectanguli C A C B proportionalis eſt cauſæ quæ eam producit, ea autem cauſa eſt motus linearum variabilium A C, B C quo antrorſum feruntur dum lineæ O A, O B creſcunt, & quamvis dum illæ lineæ A C, B C moventur, interim lineæ O A, O B creſcant, incrementi hujus nulla habenda eſt ratio dum Rectanguli fluxionem ſive incrementum naſcens conſideramus, etenim in ipſo hujus incrementi naſcentis ortu illæ productiones linearum O A, O B nihil planè ſunt, & cùm primum ſunt aliquid jam aliæ A C, BC prioribus majores

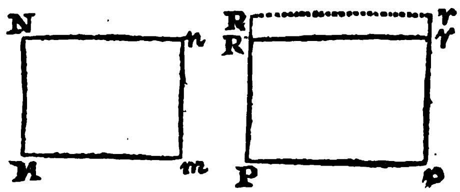
$+ cAB$. Et par eſt ratio contenti ſub lateribus quotcunque. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Ponantur latera A, B, C ſibi mutuo ſemper æqualia; & ipſius A^2, id eſt rectanguli A B, momentum $aB+bA$ erit $2aA$, ipſius autem A^3, id eſt contenti A B C, momentum $aBC+bAC+cAB$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuſcunque A^n eſt naA^{n-1}. *Q. E. D.*

Caſ. 4. Unde cùm $\frac{1}{A}$ in A ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ductum in A, unâ cum $\frac{1}{A}$ ducto in a, (i) erit momentum ipſius 1, id eſt, nihil. Proinde momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ſeu ipſius A^{-1} eſt

— a

jores aſſumuntur, ergo momentum Rectanguli O A C B ſive ejus mutationis momentanea cauſa, ex lineis A C & BC & velocitatibus quibuſcum feruntur, determinanda eſt.



Sint verò Rectangula M N m n, P R p r, quorum lineæ M N, P R ſint æquales, concipiantur aliæ lineæ hiſce etiam æquales quæ ab M N & P R profectæ motu uniformi & parallelo ſecundum lineas M m & P p ferantur, ita ut eodem tempore ad m n & p r perveniant, manifeſtum eſt (*per* 1. 6. *Elem.*) areas M n, P r fore ut lineæ M m P p, & pariter velocitates linearum ab M N & P R profectarum in eadem fore ratione, ideoque areas M n, Pr, fore in ratione earum velocitatum. Quòd ſi lineæ N M, P R ſint inæquales, areæ erunt ut lineæ illæ MN, PR & earum velocitates conjunctim, & quævis incrementa Rectangulorum NMmn, P R p r æquali tempore facta in eadem ratione erunt, ideoque & naſcentia incrementa erunt in eâ Ratione. Unde tandem ſequitur quòd incrementum Rectanguli OABC ex motu lineæ A C natum, eſt ut illa linea A C & ejus velocitas conjunctim, & quod incrementum ejuſdem Rectanguli O A C B ex motu lineæ B C natum, eſt ut illa linea B C & ejus velocitas conjunctim, ideoque totum momentum Rectanguli O A C B eſt ſumma factorum linearum AC & BC per velocitates quibus feruntur reſpectivè ductarum, ideoque ut ſumma Rectangulorum $AC \times ef$ & $BC \times gh$, ſive denique ut ſumma Trapeziorum E F e f, E F g h. Q. E. D.

2ᵘˢ. *Caſus.* Facilè hæc applicantur ad eos caſus ubi vel ambæ lineæ O A, O B decreſcunt, vel unâ creſcente altera decreſcit, quippe varianda ſunt ſolummodo ſigna juxta has hypotheſes.

Vide aliam hujus caſûs demonſtrationem (num. 160. lib. 1.).

(i) * *Erit momentum ipſius* 1, *id eſt nihil.* Ponatur enim $\frac{1}{A} = B$ & erit $\frac{1}{A} \times A = AB = 1$, ſed momentum rectanguli AB eſt $aB + bA$ (*per caſ.* 1.) & momentum conſtantis 1 nullum eſt; Quare erit $aB + bA = 0$, & hinc $bA = -aB = -\frac{a}{A}$, undè momentum b ipſius B ſeu $\frac{1}{A}$ eſt $b = \frac{-a}{A^2}$

II $= -a$

$\frac{-a}{A^2}$. Et generaliter cùm $\frac{1}{A^n}$ in A^n ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A^n unâ cum $\frac{1}{A^n}$ in naA^{n-1} erit nihil. Et propterea momentum ipſius $\frac{1}{A^n}$ ſeu A^{-n} erit $-\frac{na}{A^{n+1}}$. *Q.E.D.*

Caſ. 5. Et cùm $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ ſit A, momentum ipſius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in $2A^{\frac{1}{2}}$ erit a, per caſ. 3: ideoque momentum ipſius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ ſive $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter ſi ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B, erit A^m æquale B^n, ideoque maA^{m-1} æquale nbB^{n-1}, & maA^{-1} æquale nbB^{-1} ſeu $nbA^{-\frac{m}{n}}$, ideoque $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b, id eſt, æquale momento ipſius $A^{\frac{m}{n}}$. *Q. E. D.*

Caſ. 6. Igitur genitæ cujuſcunque $A^m B^n$ momentum eſt momentum ipſius A^m ductum in B^n, unà cum momento ipſius B^n ducto in A^m, id eſt $maA^{m-1}B^n + nbB^{n-1}A^m$; idque ſive dignitatum indices m & n ſint integri numeri vel fracti, ſive affirmativi vel negativi. Et par eſt ratio contenti ſub pluribus dignitatibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in continuè proportionalibus, ſi terminus unus datur, (k) momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem ter-

$= -aA^{-2}$. Similiter ſi ponatur $\frac{1}{A^n} = B$, & ideò $\frac{1}{A^n} \times A^n = A^n B = 1$, erit per caſ. 3. & 1. $naA^{n-1}B + bA^n = 0$ & $bA^n = -naA^{n-1}B = \frac{-naA^{n-1}}{A^n} = \frac{-na}{A}$, atquè adeò b, ſeu momentum ipſius $\frac{1}{A^n}$, erit $\frac{-na}{A^{n+1}}$. Simili modo patent caſus 5. & 6. 90.

(k) * *Momenta terminorum reliquorum.* Qnoniam enim A, B, C, D, E, F, ſunt continuè proportionales, erit $D : C = C : B = \frac{CC}{D} = CCD^{-1}$ & ſimiliter invenitur $A = \frac{C^3}{D^2} = C^3 D^{-2}$, $E = \frac{D^2}{C}$, $F = \frac{D^3}{CC}$ &c.

Qua-

termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipſos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continuè proportionales; & ſi detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter ſe ut — 2 A — B, D, 2 E, 3 F.

(l) *Corol.* 2. Et ſi in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta exttemarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum eſt de lateribus rectanguli cujuſcunque dati.

(m) *Corol.* 3. Et ſi ſumma vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciprocè ut latera.

Scholium.

In epiſtolâ quâdam ad D. *J. Collinium* noſtratem 10. Decem: 1672. datâ, cùm deſcripſiſſem methodum tangentium quam ſuſpicabar eandem eſſe cum methodo *Sluſii* tum nondum communicatâ; ſubjunxi: *Hoc eſt unum particulare vel corollarium potius methodi generalis, quæ extendit ſe citra moleſtum ullum calculum, non modo* (n) *ad ducendum tangentes ad quaſvis curvas ſive geometricas ſive mechanicas vel quomodocunque rectas lineas aliaſve curvas reſpicientes, verùm etiam ad reſolvendum alia abſtruſiora problematum genera de* (o) *curvitatibus,* (p) *areis, longitudinibus,*

Quarè ob datum C, cujus nullum eſt momentum, momenta reliquorum terminorum erunt (per caſ. 3. & 4.) $-2\,d\,C^3 D^{-3}$, $-d\,C^2 D^{-2}$, d, $\frac{2\,d\,D}{C}$, $\frac{3\,d\,D^2}{C\,C}$, & multiplicando ſingulos terminos per $\frac{D}{d}$, manebit proportio terminorum $-2\,C^3 D^{-2}$, $-C^2 D^{-1}$, D, $\frac{2\,D^2}{C}$, $\frac{3\,D^3}{C\,C}$, hoc eſt $-2A$, $-B$, D, $2E$, $3F$. Eſt autem 2 numerus intervallorum inter terminum *A*, & terminum datum *C*, ſicut & intervallorum inter *E* & *C*, 1 intervallum inter *B* & *C*, ac inter *C* & *D*, & 3, numerus intervallorum inter *C* & *F*. Quarè patet veritas corollarii.

(l) * *Cor.* 2. Sit $A : B = C : D$, ſeu $BC = AD$ & BC, rectangulum datum erit (per caſ. 1.) $ad + dA = 0$, & hinc $aD = -dA$ ideóque $a : -d = A : D$.

(m) * *Cor.* 3. Sit $A^2 + B^2 = C^2$, & quadratum C^2 ſit datum, erit (per caſ. 3.) $2\,a\,A + 2\,b\,B = 0$, ideóque $A\,a = -b\,B$, & proinde $a : -b = B : A$. In iis duobus corollariis neceſſum eſt ut variabili unâ creſcente, decreſcat altera, & idcircò dum momentum unius poſitivum eſt, alterius momentum eſt negativum.

(n) * *Ad ducendum tangentes* (150. 156. lib. 1.) vide Marchionis *Hoſpitalii* Analyſim infinitè parvorum, ubi methodus illa tangentium fusè & perſpicuè exponitur.

(o) *De curvitatibus* (216. lib. 1.).

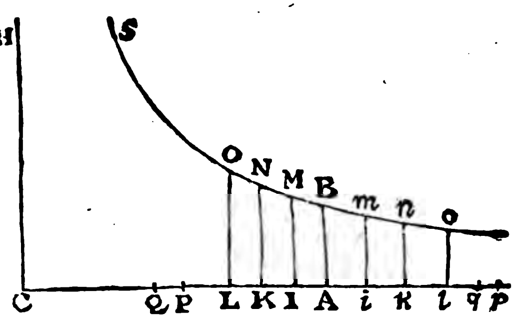
(p) * *Areis, longitudinibus* &c. Hæc plurimis exemplis, tum 1°. tum 2°. libro contentis manifeſta ſunt. Vide tractatum NEWTONI de quadraturâ curvarum.

bus, (q) *centris gravitatis curvarum &c. neque* (*quemadmodum* Huddenii *methodus de maximis & minimis*) *ad ſolas reſtringitur æquationes illas quæ quantitatibus ſurdis ſunt immunes. Hanc methodum intertexui alteri iſti quâ æquationum exegeſin inſtituo reducendo eas ad ſeries infinitas.* Hactenus epiſtola. Et hæc ultima verba ſpectant ad tractatum quem anno 1671 de his rebus ſcripſeram. Methodi verò hujus generalis fundamentum continetur in lemmate præcedente. (r)

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VI.

Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, rectâ aſcendat vel deſcendat, & ſpatium totum deſcriptum diſtinguatur in partes æquales, inque principiis ſingularum partium (addendo reſiſtentiam medii ad vim gravitatis, quando corpus aſcendit, vel ſubducendo ipſam quando corpus deſcendit) inveſtigentur vires abſolutæ; dico quòd vires illæ abſolutæ ſunt in progreſſione geometricâ.

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam *AC*; reſiſtentia per lineam indefinitam *AK*; vis abſoluta in deſcenſu corporis per differentiam *KC*; velocitas corporis per lineam *AP*, quæ ſit media proportionalis inter *AK* & *AC*,

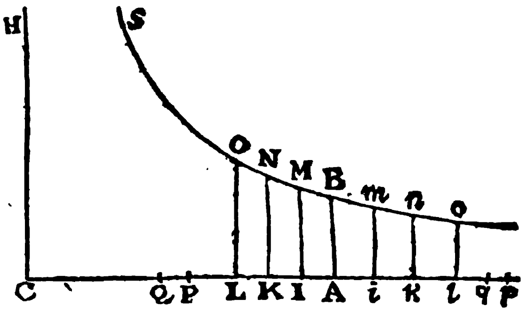


(q) * *Centris gravitatis* (66. lib. I.).

(r) In præcedentibus Editionibus iſtud ſcholium hoc modo ſe habebat.

In litteris quæ mihi cum Geometrâ peritiſſimo G. G. *Leibnitio* annis abhinc decem intercedebant, cùm ſignificarem me compotem eſſe methodi determinandi maxima & minima, ducendi Tangentes, & ſimilia peragendi, quæ in terminis ſurdis æque ac in rationalibus procederet, & literis tranſpoſitis hanc ſententiam involventibus. (*Datâ æquatione quotcumque fluentes quantitates involvente, Fluxiones invenire, & vice verſâ*) eamdem celarem; Reſcripſit Vir Clariſſimus ſe quoque in ejuſmodi methodum incidiſſe, & methodum ſuam communicavit, à meâ vix abludentem, præterquàm in verborum & notarum formulis, & ideâ generationis quantitatum. Utriuſque fundamentum continetur in hoc Lemmate. 90.

AC, (ſ) ideoque in ſubduplicatâ ratione reſiſtentiæ; incrementum reſiſtentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam *KL*, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam *PQ*; & centro *C* aſymptotis rectangulis *CA*, *CH* deſcribatur hyperbola quævis *BNS*, erectis perpendiculis *AB*, *KN*, *LO* occurrens in *B*, *N*, *O*. Quoniam *AK* eſt ut *APq*, erit hujus momentum *KL* ut (t) illius momentum 2 *APQ*: id eſt, ut *AP* in *KC*, nam velocitatis incrementum *PQ* (*per motûs leg.* II.) proportionale eſt vi generanti *KC*. Componatur ratio ipſius *KL* cum ratione ipſius *KN*, & fiet



rectangulum $KL \times KN$ ut $AP \times KC \times KN$; hoc eſt, ob (u) datum rectangulum $KC \times KN$, ut *AP*. Atqui areæ hyperbolicæ *KNOL* ad rectangulum $KL \times KN$ ratio ultima, ubi coeunt puncta *K* & *L*, eſt æqualitatis. Ergo area illa hyperbolica evaneſcens eſt ut *AP*. Componitur igitur area tota hyperbolica *ABOL* ex particulis *KNOL* velocitati *AP* ſemper proportionalibus, & (x) propterea ſpatio velocitate iſtâ deſcripto proportionalis eſt. Dividatur jam area illa in partes æquales *ABMI*, *IMNK*, *KNOL*, &c. & vires abſolutæ *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. (y) erunt in progreſſione geometricâ. *Q. E. D.* Et (z) ſimili argumento, in aſcenſu corporis, ſumen-

(ſ) * *Ideòque in ſubduplicatâ ratione reſiſtentiæ.* Ob datam AC.

(t) * *Ut illius momentum 2 APQ.* Cùm enim ſit $AK \times AC = AP^2$ (*per conſtr.*) erit $AC \times KL = 2\,AP \times PQ$ (*per caſ.* 1. *&* 3. *Lem.* 2.) id eſt, ob datam AC; KL eſt ut $AP \times PQ$, & quia velocitatis incrementum PQ, dato temporis momento genitum (*per mot. leg.* 2.) proportionale eſt vi generanti KC, erit KL, ut $AP \times KC$.

(u) * *Ob datum rectangulum* $KC \times KL$ (per theor. 4. de hyp.).

(x) * *Et propterea ſpatio velocitate iſtâ deſcripto proportionalis eſt*; dato enim temporis momento, ſpatium deſcriptum eſt ut velocitas (12).

(y) * *Erunt in progreſſione geometricâ* (379. lib. 1.).

(z) * *Et ſimili argumento.* Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC, reſiſtentia per lineam indefinitam

mendo, ad contrariam partem puncti *A*, æquales areas *A B m i*, *i m n k*, *k n o l*, &c. conſtabit quod vires abſolutæ *A C*, *i C*, *k C*, *l C*, &c. ſunt continuè proportionales. Ideoque ſi ſpatia omnia in aſcenſu & deſcenſu capiantur æqualia; omnes vires abſolutæ *l C*, *k C*, *i C*, *A C*, *I C*, *K C*, *L C*, &c. erunt continuè proportionales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi ſpatium deſcriptum exponatur per aream hyperbolicam *A B N K*; exponi poſſunt vis gravitatis, velocitas corporis & reſiſtentia medii per lineas *A C*, *A P* & *A K* reſpectivè; & vice verſâ. ([a])

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum deſcendendo poteſt unquam acquirere, ([b]) exponens eſt linea *A C*.

Corol. 3. Igitur ſi in datâ aliquâ velocitate cognoſcatur reſiſtentia medii, invenietur velocitas maxima, ſumendo ipſam ad velocitatem illam datam in ſubduplicatâ ratione, quam habet vis gravitatis ([c]) ad medii reſiſtentiam illam cognitam.

PRO-

A I, vis abſoluta velocitatem minuens in aſcenſu corporis per ſummam C I, velocitas corporis per lineam A p quæ ſit media proportionalis inter A I & A C, ideóque in ſubduplicatâ ratione reſiſtentiæ; decrementum reſiſtentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam l k, & contemporaneum velocitatis decrementum per lineolam p q; & deſcribatur ut ſuprà hyperbola S B o; Quoniam A l eſt ut A p² erit hujus momentum k l ut illius momentum 2 A p q, id eſt, ut A p in l C; nam velocitatis decrementum p q (*per mot. leg.* 2.) proportionale eſt vi generanti l C, componatur ratio ipſius k l cum ratione ipſius l o, & fiet rectangulum k l × l o ut A p × l C × l o, hoc eſt, ob datum rectangulum l C × l o, ut A p. Ergo, coeuntibus punctis k, l, area hyperbolica k n o l = k l × l o, eſt ut A p. Componitur igitur area tota hyperbolica 2 A B o l ex particulis k n o l velocitati A p ſemper proportionalibus, & propterea ſpatio velocitate iſtâ deſcripto proportionalis eſt. Dividatur jam area illa in partes æquales A B m i; i m n k, k n o l, &c. & vires abſolutæ l C, k C, i C, A C, &c. erunt in progreſſione geometricâ. Q. E. D. 90.

(a) * Simili modo ſi in aſcenſu corporis, ſpatium uſque ad motûs extinctionem deſcribendum exponatur per aream hyperbolicam A B n k exponi poſſunt vis gravitatis, velocitas corporis & reſiſtentia medii per lineas A C, A p, A k reſpectivè; & vice verſâ.

(b) * *Exponens eſt linea A C.* Fiat enim A P = A C, & quia (*per conſtr.*) A P² = A K × A C, erit etiam A K = A C, ideóque coincidente ordinatâ K N, cum aſymptoto C H, area hyperbolica ABNK, infinita evadet, & ſpatium deſcendendo deſcriptum huic proportionale erit quoque infinitum, gravitas verò, reſiſtentia & velocitas corporis exponentur per lineam A C, eritque proinde reſiſtentia gravitati æqualis, & propterea velocitas A C maxima.

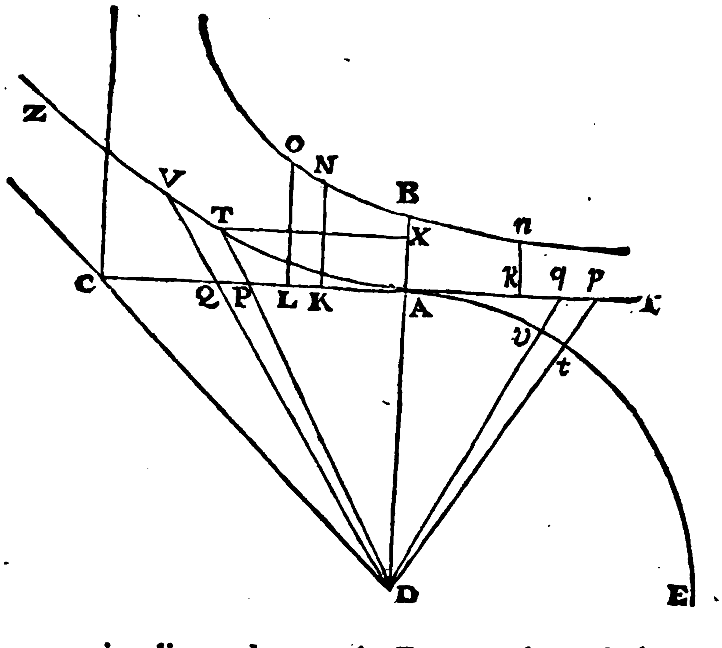
(c) * *Ad medii reſiſtentiam illam cognitam.* Cùm enim velocitates ſint in ſubduplicatâ ratione reſiſtentiarum (*per hyp.*) & reſiſtentia ſit gravitati æqualis, ubi velocitas maxima eſt, (*per cor.* 2.) ve-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. IX. THEOR. VII.

PROPOSITIO IX. THEOREMA VII.

Poſitis jam demonſtratis, dico quòd, ſi tangentes angulorum ſectoris circularis & ſectoris hyperbolici ſumantur velocitatibus proportionales, exiſtente radio juſtæ magnitudinis: erit tempus omne aſcendendi ad locum ſummum ut ſector circuli, & tempus omne deſcendendi à loco ſummo ut ſector hyperbolæ.

Rectæ *AC*, quâ vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur *AD*. Centro *D* ſemidiametro *AD* deſcri-



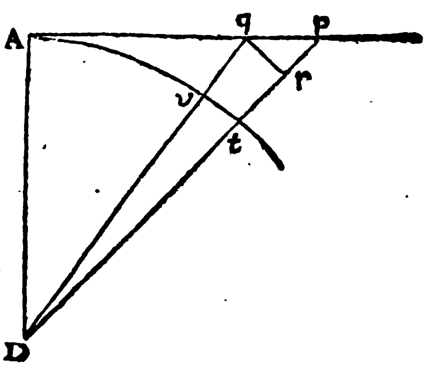
batur tum circuli quadrans *AtE*; tum hyperbola rectangula *AVZ* axem habens *AX*, verticem principalem *A*, & aſymptoton *DC*. Ducantur *Dp*, *DP*, & erit ſector circularis *AtD* ut tempus omne aſcendendi ad locum ſummum; &

velocitas maxima erit ad velocitatem datam in ſubduplicatâ ratione gravitatis ad medii reſiſtentiam illam cognitam.

& ſector hyperbolicus *ATD* ut tempus omne deſcendendi à loco ſummo: Si modò ſectorum tangentes *Ap*, *AP*, ſint ut velocitates.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. IX. THEOR. VII.

Caſ. 1. Agatur enim $D v q$ abſcindens ſectoris $A D t$ & trianguli $A D p$ momenta, ſeu particulas quàm minimas ſimul deſcriptas $t D v$ & $q D p$. Cùm particulæ illæ, ob angulum communem D, ſunt in (d) duplicatâ ratione laterum, erit particula $t D v$ ut $\frac{q D p \times t D \text{ quad.}}{p D \text{ quad.}}$, id eſt, ob datam $t D$, ut $\frac{q D p}{p D \text{ quad.}}$. Sed $p D$ *quad.* eſt $A D$ *quad.* $+ A p$ *quad.* id eſt, (e) $A D$ *quad.* $+ A D \times A k$, ſeu $A D \times C k$; & (f) $q D p$ eſt $\frac{1}{2} A D \times p q$. Ergo ſectoris particula $t D v$ eſt ut $\frac{p q}{C k}$, id eſt, ut velocitatis decrementum quàm minimum $p q$ directè, & vis illa $C k$ quæ velocitatem diminuit inversè; (g) atque ideo ut particula temporis decremento velocitatis reſpondens. Et componendo fit ſumma particularum omnium $t D v$ in ſectore $A D t$, ut ſumma particularum temporis ſingulis velocitatis



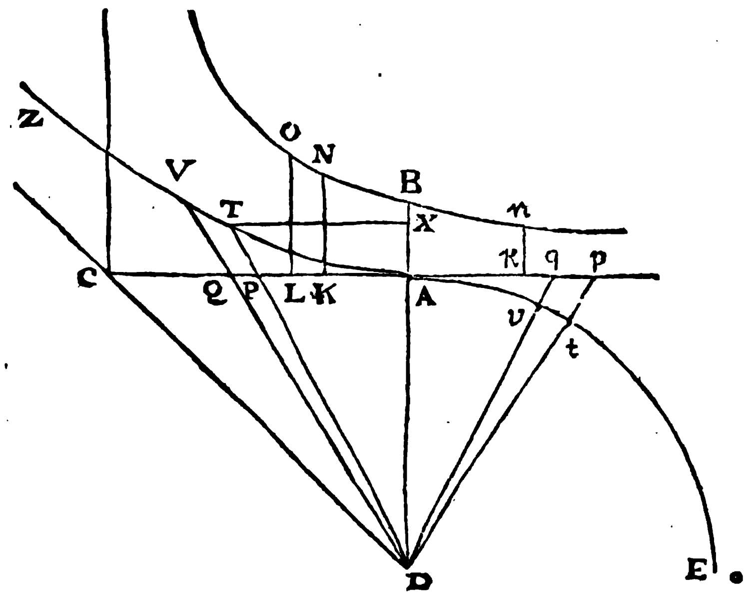
(d) * *In duplicatâ ratione laterum.* Nam ſi ex puncto q ducatur ad D p lineola q r parallela ipſi v t, duo triangula evaneſcentia D q r, D v t ſimilia ſunt & in ratione duplicatâ laterum D q, D v, (*per prop.* 19. *lib.* 6. *Elem.*) & triangulum D q p æquale eſt triangulo D q r evaneſcente p r reſpectu D q; eſt igitur pD^2 ad tD^2, ſeu AD^2, ut triangulum q D p ad triangulum t D v, & ideo t D v $= \frac{AD^2 \times qDp}{pD2}$, undè ob datum circuli radium A D, particula t D v eſt ut $\frac{qDp}{pD^2}$.

(e) * *Id eſt.* Nam $AC \times Ak$, ſeu $AD \times Ak = Ap^2$ (*per conſtruct. prop.* 8.) & $AD^2 + AD \times Ak = AD \times (AC + Ak) = AD \times Ck$.

(f) * *Et* $q D p$ *eſt* $\frac{1}{2} A D \times p q$, ob A J baſi p q productæ normalem.

(g) * *Atquè ideò ut particula temporis decremento velocitatis reſpondens* (18).

tis decreſcentis Ap particulis amiſſis pq reſpondentium; uſque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc eſt, ſector totus ADt eſt ut tempus totum aſcendendi ad locum ſummum. *Q. E. D.*



Caſ. 2. Agatur DQV abſcindens tum ſectoris DAV, tum trianguli DAQ particulas quàm minimas TDV & PDQ, & erunt hæ particulæ ad invicem ut DTq ad DPq, id eſt (ſi TX & AP parallelæ ſint) ut (h) DXq ad DAq vel TXq ad APq, & diviſim ut $DXq - TXq$ ad $DAq - APq$. (i) Sed ex naturâ hyperbolæ $DXq - TXq$ eſt ADq, & per hypo-

(h) * *Ut* DX^2 *ad* DA^2, ob triangula DTX, DPA ſimilia (*per prop.* 2. *lib.* 6. *Elem.*)

(i) * *Sed ex natura hyperbolæ &c.* Quoniam (*per theor.* 2. *de hyperb.*) rectangulum $2\overline{AD+AX} \times AX$, eſt ad quadratum ordinatæ TX, ut latus tranſverſum eſt ad latus rectum, hæc verò Hyperbola eſt æquilatera, erit (*per theor.* 5. *de hyperb.*) $TX^2 = 2\overline{AD+AX} \times AX$. Sed eſt $2\overline{AD+AX} \times AX = DX^2 - DA^2$ (*per prop.* 6. *lib.* 2. *Elem.*) ergò $TX^2 = DX^2 - DA^2$, ac proinde $DX^2 - TX^2 = DA^2$.

(k) hypotheſin APq eſt $AD \times AK$. Ergo particulæ ſunt ad invicem ut ADq ad $ADq - AD \times AK$; id eſt, ut AD ad $AD - AK$ ſeu AC ad CK: ideoque ſectoris particula TDV eſt $\frac{PDQ \times AC}{CK}$; atque ideo (l) ob datas AC & AD, ut $\frac{PQ}{CK}$, id eſt, ut incrementum velocitatis directè, utque vis generans incrementum inversè; atque ideo ut particula temporis incremento reſpondens. Et componendo fit ſumma particularum temporis, quibus omnes velocitatis AP particulæ PQ generantur; ut ſumma particularum ſectoris ATD, id eſt, tempus totum ut ſector totus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi AB æquetur quartæ parti ipſius AC, ſpatium quod corpus tempore quovis cadendo deſcribit, erit ad ſpatium, quod corpus velocitate maximâ AC, eodem tempore uniformiter progrediendo deſcribere poteſt, ut area $ABNK$, quâ ſpatium cadendo deſcriptum exponitur, ad aream ATD, quâ tempus exponitur. Nam cùm ſit AC ad AP ut AP ad AK, erit (*per corol.* 1. *lem.* 11. *hujus*) LK ad PQ ut $2\,AK$ ad AP, hoc eſt, ut $2\,AP$ ad AC, & inde LK ad $\frac{1}{2}\,PQ$ ut AP ad $\frac{1}{4}\,AC$ vel AB; eſt & KN ad AC vel AD ut (m) AB ad CK; itaque ex æquo $LKNO$ ad DPQ ut AP ad CK. (n) Sed erat DPQ ad DTV ut CK ad AC. Ergo rurſus ex æquo $LKNO$ eſt ad DTV ut AP ad AC; hoc eſt, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo poteſt acquirere. Cùm igitur arearum $ABNK$ & ATD momenta $LKNO$ & DTV ſunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes ſimul genitæ (†) ut ſpatia ſimul deſcripta, ideoque areæ totæ ab initio geni-

(k) * *Et per hypotheſim* AP^2 *eſt* $AD \times Ak$, ſeu $AC \times Ak$ (*per conſtruct. prop.* 8.)

(l) * *Ob datas* AC & AD. Eſt enim $PDQ = \frac{1}{2}\,AD \times PQ$, & ideò $TDV = \frac{\frac{1}{2}\,AD \times AC \times PQ}{CK}$.

(m) * *Ut* AB *ad* CK (per theor. 90.
4. de hyperb.

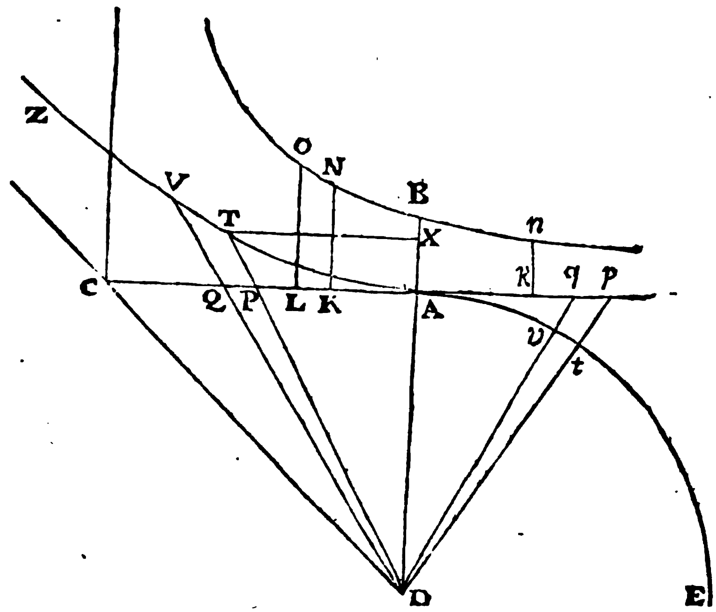
(n) * *Sed erat* DPQ *ad* DTV *&c.* Suprà caſ. 2.

(†) * *Ut ſpatia ſimul deſcripta* (11).

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. IX. THEOR. VII.

genitæ *ABNK* & *ATD* ut ſpatia tota ab initio deſcenſus deſcripta. *Q. E. D.*

Corol. 2. (o) Idem conſequitur etiam de ſpatio quod in aſcenſu deſcribitur. Nimirum quòd ſpatium illud omne ſit ad



ſpatium, uniformi cum velocitate *AC* eodem tempore deſcriptum, ut eſt area *ABnk* ad ſectorem *ADt*.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore *ATD* cadentis eſt ad velocitatem, quam eodem tempore in ſpatio non reſiſtente acquireret, ut triangulum *APD* ad ſectorem hyperbolicum *ATD*.

(o) * *Idem conſequitur* &c. Eadem eſt prorſus demonſtratio, ſi loco AK & QP ſubſtituantur Ak & qp, & ad primum demonſtrationis caſum attendatur.

91. *Cor.* Velocitas Ap corporis in medio reſiſtente aſcendentis ad maximam altitudinem ABnk, eſt ad velocitatem AP corporis in eodem medio è quiete deſcendentis per æquale ſpatium ABNK, ut ſecans anguli ADp ad radium, aut quod idem eſt, ut tangens Ap anguli ADp, ad ejuſdem ſinum. Quoniam enim (*per hyp.*) area ABNK, æqualis eſt ABnk, erit (380. *Lib.* 1.) Ck : AC = AC : CK, & dividendo Ak : AC = AK : CK, & alternando, Ak : AK = AC : CK = Ck (ſive AC + Ak) : AC, & ideò Ak × AC : AK × AC = AC^2 + Ak × AC : AC^2; Sed (*per conſtruct. prop.* 8.) AC × Ak = Ap^2, & AC × AK = AP^2. Quare Ap^2 : AP^2 = AC^2 + Ap^2 ſeu Dp^2 : AC^2, & hinc Ap : AP = Dp : AC, ſeu AD. Q. E. D.

ATD. Nam velocitas in medio non reſiſtente (p) foret ut tempus *ATD*, & in medio reſiſtente eſt ut *AP*, id eſt, ut triangulum *APD.* Et (q) velocitates illæ initio deſcenſus æquantur inter ſe, perinde ut areæ illæ *ATD*, *APD.*

Corol. 4. (r) Eodem argumento velocitas in aſcenſu eſt ad velocitatem, quâ corpus eodem tempore in ſpatio non reſiſtente omnem ſuum aſcendendi motum amittere poſſet, ut triangulum *ApD* ad ſectorem circularem *AtD*; ſive ut recta *Ap* ad arcum *At.*

Corol. 5. Eſt igitur tempus, quo corpus in medio reſiſtente cadendo velocitatem *AP*, acquirit, ad tempus, quo velocitatem maximam *AC* in ſpatio non reſiſtente cadendo acquirere poſſet, (ſ) ut ſector *ADT* ad triangulum *ADC*: & tempus,

(p) * *Foret ut tempus ATD.* Creſceret enim uniformiter, ideóque ut tempus (25. *lib.* 1.)

(q) * *Et velocitates illæ initio deſcenſûs æquantur inter ſe* ob reſiſtentiam reſpectu gravitatis nullam, ubi velocitas naſcitur. Cùm igitur velocitates in medio non reſiſtente ſint ſemper inter ſe ut areæ ATD, & in medio reſiſtente ſint ut triangula APD, erit velocitas in medio reſiſtente tempore finito ATD acquiſita ad velocitatem initio deſcensûs in eo medio reſiſtente ut triangulum finitum APD, ad triangulum naſcens APD, & erit velocitas initio deſcensûs in medio non reſiſtente ad velocitatem in eodem medio tempore finito ATD acquiſitam, ut area naſcens ATD (æqualis areæ naſcenti APD) ad aream finitam ATD; Quare (ex æquo) velocitas corporis tempore finito ATD cadentis in medio reſiſtente eſt ad velocitatem quam eodem tempore in medio non reſiſtente cadendo acquireret ut triangulum APD ad ſectorem hyperbolicum ATD.

(r) * *Eodem argumento.* Nam velocitas in medio non reſiſtente foret ut tempus AtD, & in medio reſiſtente eſt ut Ap, id eſt, ut triangulum apD ob datam AD, & velocitates illæ in fine aſcensûs, ubi evaneſcunt, æquantur inter ſe, perindè ut areæ evaneſcentes AtD, ApD; eſt autem triangulum ApD $= \frac{1}{2}$ AD × Ap, & ſector circularis AtD, $= \frac{1}{2}$ AD × At. Quarè ApD eſt ad AtD, ut Ap ad At. 91.

92. Hinc ſi velocitas aſcensûs Ap in medio reſiſtente velocitati maximæ AC æqualis fuerit, erit velocitas Ap ſeu AC, ad velocitatem quâ corpus eodem tempore in ſpatio non reſiſtente omnem ſuum aſcendendi motum amittere poſſet, ut triangulum ACD, ad octantem circuli, ſive ut radius ad octavam partem peripheriæ, aut quod idem eſt, ut quadratum circulo circumſcriptum ad circuli aream. Dum enim fit Ap = AC, triangulum ApD æquatur triangulo ACD, & ſector AtD, octanti circuli, ideóque arcus At eſt pars octava peripheriæ; & triangulum ACD eſt ad ſectorem AtD, ut AC ad arcum At, ac prætereà triangulum ACD, ob AC = AD; eſt pars octava quadrati circulo circumſcripti.

(ſ) * *Ut ſector ADT ad triangulum ADC.* Cùm enim AP exponat velocitatem tempore ATD in medio reſiſtente acquiſitam, ſumatur AY talis ut exponat velocitatem tempore eodem in medio non reſiſtente productam, & erit per Coroll. 3. AP ad AY ut APD, ad ATD, cùmque etiam AC exponat velocitatem maximam,

pus, quo velocitatem *Ap* in medio reſiſtente aſcendendo poſſit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in ſpatio non reſiſtente aſcendendo poſſet amittere, ut (t) arcus *At* ad ejus tangentem *Ap*.

Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur ſpatium aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum. Nam corporis in infinitum deſcendentis datur velocitas maxima (*per corol.* 2. *&* 3. *theor.* VI. *lib.* II.) inde-

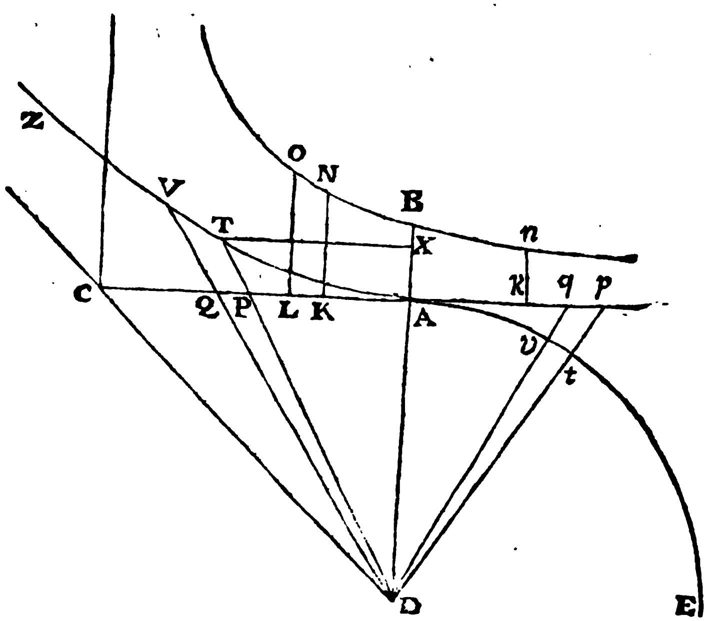
ximam, erit A Y ad A C ut tempus quo prior celeritas A Y in medio non reſiſtente acquiri poteſt, ad tempus quo velocitas maxima A C in medio etiam non reſiſtente acquireretur, & cùm tempus quo celeritas A Y acquiritur, exprimatur per aream A T D, erit A Y ad A C ut A T D ad aream quæ exponet tempus quo velocitas maxima in medio non reſiſtente acquiritur, itaque cùm ſit A P : A Y = A P D : A T D & A Y : A C = A T D : ad hanc aream, erit ex æquo A P : A C = A P D, ad hanc aream, ſed ſumptâ communi altitudine D A eſt A P ad A C = Tri. A P D ad Tri. A D C; ergo area quæ exponet tempus quo maxima velocitas in medio non reſiſtente acquiritur, eſt area A D C. Undè ſequitur quòd corpus in medio reſiſtente, velocitatem maximam A C acquirere cadendo non poteſt niſi tempore infinito. Cùm enim ſit A P = A C, coincidit D T cum Hyperbolæ A T V aſimptoto D C, & ſector A D T ſit infinitus.

(t) * *Ut arcus At, ad ejus tangentem Ap.* Siquidem (*per cor.* 4.) velocitas A p in medio reſiſtente tempore A t D extinguenda, eſt ad velocitatem eodem tempore in ſpatio non reſiſtente extinguendam ut triangulum A p D ad ſectorem A t D; & etiam ut tempus quo velocitas A p in ſpatio non reſiſtente extingueretur ad tempus A t D quo altera velocitas in ſpatio non reſiſtente extinguitur, quod idem eſt cum eo quo velocitas A p in ſpatio reſiſtente extinguitur. Quare tempus quo velocitas A p, in ſpatio non reſiſtente evaneſceret eſt ad tempus A t D quo in ſpatio reſiſtente extingueretur ut triangulum A p D, ad ſectorem A t D, ſive tangens A p ad ejus arcum A t. Patet ergò propoſitum.

93. Hinc tempus quo corpus velocitatem A p in medio reſiſtente aſcendendo amittere poteſt, eſt ad tempus quo velocitatem maximam A C in ſpatio non reſiſtente aſcendendo amitteret, vel deſcendendo acquireret, ut ſector circularis A t D, ad triangulum A D C, ſeu ut arcus A t ad radium A D. Nam in medio non reſiſtente velocitas A p eſt ad velocitatem A C, ut tempus A p D, quo generatur vel extinguitur velocitas A p, ad tempus quo generatur vel extinguitur velocitas A C, quod proindè erit $\frac{A C \times A p D}{A p}$, ſeu $\frac{1}{2}$ A D × A C, hoc eſt, triangulum A D C. Cùm igitur tempus quo velocitas A p, in medio reſiſtente extinguitur, exponatur per ſectorem A t D, patet propoſitum.

94. Tempus quo corpus in medio reſiſtente deſcendendo acquirit velocitatem A P, vel aſcendendo amittit velocitatem A p, eſt ad tempus quo eandem velocitatem in medio non reſiſtente acquirit vel amittit, ut ſector A D T, vel A D t, ad triangulum A D P, vel A D p, reſpectivè. Etenim (*per cor.* 5. *&* *not.* 93.) tempus quo in medio reſiſtente generatur velocitas A P, vel extinguitur velocitas A p, eſt ad tempus quo in ſpatio non reſiſtente generatur vel extinguitur velocitas maxima A C, ut A D T vel A D t, ad A D C; Et tempus quo in ſpatio non reſiſtente generatur vel extinguitur velocitas A C, eſt ad tempus quo generatur vel extinguitur in eodem ſpatio non reſiſtente, velocitas A P vel A p, ut A C ad A P vel A p, & ſumptâ communi altitudine D A ut A D C ad A P D vel A p D. Quare (ex æquo) tempus quo in medio reſiſtente ge-

(u) indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in ſpatio non reſiſtente cadendo poſſet acquirere. Et ſumendo ſecto-



rem *ADT* vel *ADt* ad triangulum *ADC* in ratione temporis dati ad tempus modo inventum; (x) dabitur tum velocitas

AP

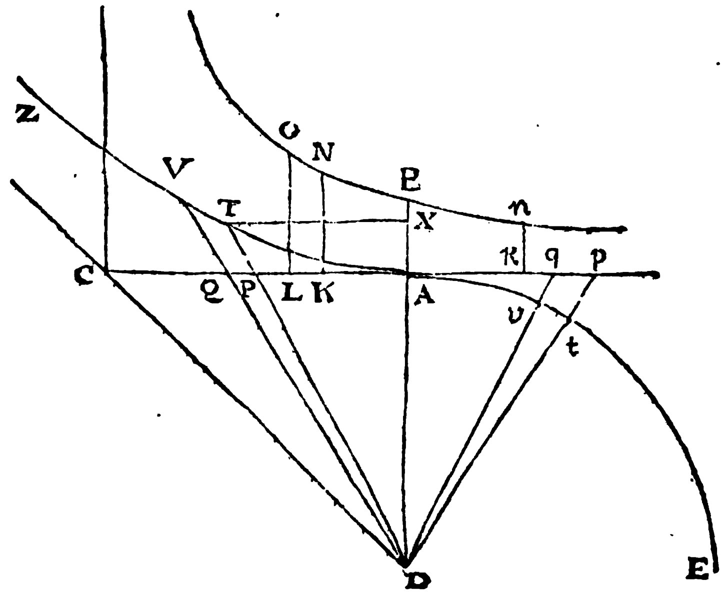
generatur velocitas A P, vel extinguitur velocitas A p, eſt ad tempus quo velocitas eadem in ſpatio non reſiſtente producitur vel amittitur, ut A D T ad A D P, vel A D p. Q. E. D.

95. Si celeritas A p corporis in medio reſiſtente aſcendentis maximæ A C æqualis fuerit, erit A D p = A D C, & ſector A D t, circuli octans. Quare tempus quo corpus in medio reſiſtente aſcendendo amittere poteſt velocitatem maximam A C eſt ad tempus quo eandem in ſpatio non reſiſtente amitteret, ut circuli octans ad triangulum A D C, hoc eſt, ut area circuli ad quadratum circumſcriptum, ſeu etiam ut 8a. pars peripheriæ ad radium.

(u) 96. *Indèque datur tempus.* Cùm enim vires acceleratrices uniformes, ſint ut velocitates quas generant directè & 96.
tempora quibus illas generant inversè (13. *lib.* 1.) datâ vi acceleratrice uniformi quâ corpus in medio quovis ſollicitatur, ſeu datâ vis illius ratione ad notam quamlibet aliam vim v. gr. ad corporum terreſtrium gravitatem, datâque ſimul velocitate quam vis illa acceleratrix produxit, dabitur tempus quo velocitas illa data genita eſt. Sit enim vis acceleratrix data ad vim notam gravitatis, ut a ad b, velocitas datâ vi illâ acceleratrice tempore x genita c, & velocitas quam vis gravitatis tempore quovis dato t generat C, erit $a : b = \frac{c}{x} : \frac{C}{t}$. Undè invenitur tempus $x = \frac{bct}{aC}$.

(x) * *Dabitur tum velocitas* A P, vel A p. (Per cor. 5. & not. 92.)

AP vel *Ap*, (y) tum area *ABNK* vel *ABnk*, (z) quæ eſt ad ſectorem *ADT* vel *ADt* ut ſpatium quæſitum ad ſpatium, quod tempore dato, cum velocitate illâ maximâ jam ante inventâ, uniformiter deſcribi poteſt.



Corol. 7. (a) Et regrediendo, ex dato aſcenſûs vel deſcenſûs ſpatio *ABnk* vel *ABNK*, dabitur tempus *ADt* vel *ADT*.

PRO-

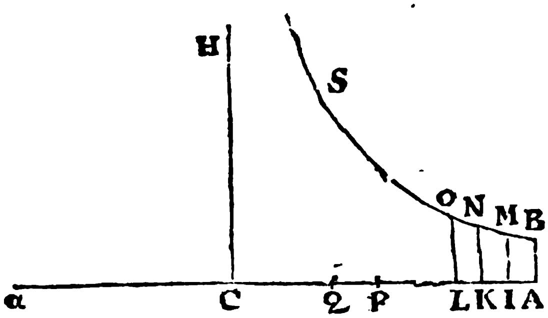
(y) * *Tum area ABNK vel ABnk.* Eſt enim (*per conſtruct. prop.* 8.) AC : AP = AP : AK, & AC : Ap = Ap : Ak, & ideò datis AC & AP vel Ap dabuntur AK vel Ak, & areæ correſpondentes ABNK, ABnk, quæ per tabulas Logarithmorum inveniri poſſunt (384. *lib.* 1.).

(z) * *Quæ eſt ad ſectorem ADT, vel ADt.* (per cor. 1. & 2.).

(a) 97. *Et regrediendo.* Nimirum capienda eſt area ABnk, vel ABNK ad triangulum ADC in datâ ratione ſpatii dati aſcenſûs vel deſcenſûs ad duplum ſpatii, quod corpus in medio non reſiſtente cadendo deſcribit ut velocitatem maximam AC acquirat, atque ità dabitur Ak vel AK. Et hinc dabitur Ap vel AP, ſeu velocitas; ex his autem dabitur ſector ADt vel ADT, ſeu tempus (*per cor.* 5.). Nam ſpatium quod corpus in medio non reſiſtente cadendo deſcribit, ut velocitatem maximam AC acquirat, dicatur *A*, tempus quo ſpatium illud deſcribitur *T*, ſpatium quod in medio reſiſtente deſcribit ut acquirat velocitatem AP, vel amittat velocitatem Ap dicatur *s*, tempus *t*, & ſpatium quod corpus tempore illo *t* & velocitate maximâ AC uniformiter progrediendo deſcribit ſit *S*, & quia (29. *lib.* 1.) corpus velocitate maximâ AC uniformiter

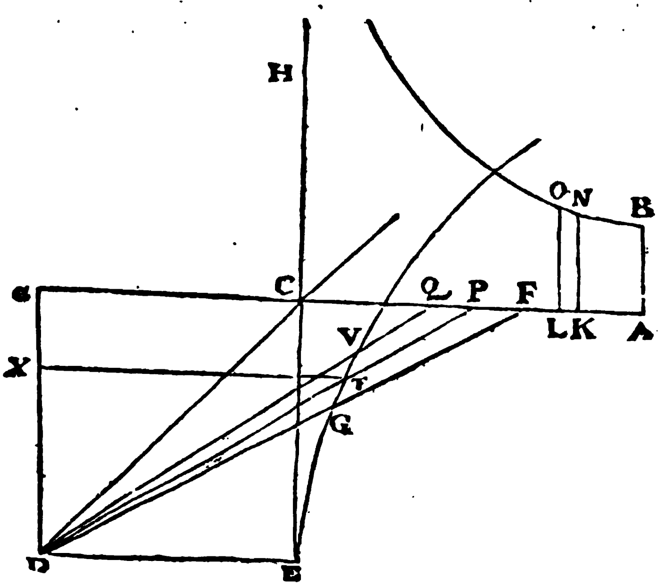
ter progrediendo, tempore *T*, deſcribit ſpatium 2 *A*, erit (5. *lib.* 1.) *S* : 2 *A* = *t* : *T*. Sed (*per cor.* 5. *& not.* 93.) *t* : *T* = A D T vel A D t : A D C, ideóque *S* : 2 *A* = A D T vel A D t : A D C, & (*per cor.* 1. *ac* 2.) *s* : *S* = A B N K vel A B n k : A D T vel A D t, reſpectivè. Quarè (ex æquo) *s* : 2 *A* = A B N K vel A B n k : A D C. Q. E. D.

98. Si corpus cum velocitate quæ æqualis ſit maximæ A C, verticaliter projiciatur deorſum, æquabili motu deſcendet, ob reſiſtentiam gravitati æqualem & contrariam (*per cor.* 2. *prop.* 8.) ſi minori cum velocitate projiciatur, exponatur velocitas illa per lineæ A C partem A P, & motus corporis projecti idem erit ac ſi è quiete deſcendendo velocitatem datam A P, jam acquiſiviſſet & deindè pergeret moveri; Quare motus projecti in hoc caſu ex ſuperioribus facile determinabitur. 98.



99. Verùm ſi projectionis velocitas terminali A C major eſt, conſtructiones propoſitionum 8 & 9 mutandæ erunt. Et quidem conſtructio propoſitionis 8ª. ſic mutanda. Deſcripta inter aſymptotos orthogonales A C, C H Hyperbolâ quâlibet S O N B, producatur aſymptotus A C in α, & exponatur vis gravitatis per datam lineam α C, reſiſtentia initio motûs per lineam α A, reſiſtentia elapſo quovis tempore per lineam indefinitam α K. Velocitas corporis per lineam α P quæ ſit media proportionalis inter α K & α C, ideóque in ſubduplicatâ ratione reſiſtentiæ. Decrementum reſiſtentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam K L & contemporaneum velocitatis decrementum per lineolam P Q. Quoniam α K eſt ut α P², erit hujus momentum K L, ut illius momentum 2 α P Q, id eſt, ut α P in K C. Nam velocitatis decrementum P Q, (*per mot. Leg.* 2.) proportionale eſt vi generanti K C, quæ eſt exceſſus reſiſtentiæ α K, ſuprà vim gravitatis α C. Componatur ratio ipſius K L cum ratione ipſius K N, & fiet rectangulum K L × K N ut α P × K C × K N, hoc eſt, ob datum rectangulum K C × K N, ut α P, ergò rectangulum evaneſcens K N × K L, hoc eſt, area hyperbolica K N O L, eſt ut α P. Componitur igitur area tota hyperbolica A B O L, ex particulis K N O L, velocitati α P ſemper proportionalibus, & propterea ſpatio velocitate iſtâ deſcripto proportionalis eſt. Dividatur jam area illa in partes æquales A B M I, I M N K, K N O L, &c. & vires abſolutæ A C, I C, K C, L C, &c. erunt in progreſſione geometricâ. Si ſpatium deſcriptum exponatur per aream Hyperbolicam A B N K, exponi poſſunt vis gravitatis, velocitas corporis & reſiſtentia medii per lineas α C, α P, α K.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. IX. THEOR. VII.



Propoſitionis 9ᵃ. conſtructio in hanc abit. Cæteris ut in figurâ & conſtructione ſuperiori manentibus, capiatur a F media proportionalis inter a C & a A, & ideò velocitatem projectionis initialem exponens, completo quadrato a C E D, centro D deſcribatur hyperbola rectangula E G T V, ſemiaxem tranſverſum habens D E, verticem principalem E, & aſymptotum D C. Jungantur D F, D P Hyperbolæ occurrentes in G & T, & erit ſector hyperbolicus G D T ut tempus deſcenſûs per ſpatium A B N K. Agatur enim D V Q abſcindens tum ſectoris G D V tum trianguli F D Q particulas quam minimas T D V, P D Q, & erunt hæ particulæ ad invicem ut DT^2 ad DP^2, id eſt, ſi T X & a P parallelæ ſint, ut DX^2 ad Da^2, vel TX^2 ad aP^2, & diviſim ut $TX^2 - DX^2$ ad $ap^2 - aD^2$, ſed (*ex natu. â Hyperb.*) $TX^2 - DX^2$ eſt aD^2, & (*per Hyp.*) ap^2 eſt $aD \times aK$; ergò particulæ T D V, P D Q, ſunt ad invicem ut aD^2, ad $aD \times aK - aD^2$, id eſt, ut a D ad a K — a D, ſeu ut a C ad C K, ideóque ſectoris particula T D V, eſt $\frac{PDQ \times aC}{CK}$, atque ideo ob datas a C & a D, ut $\frac{PQ}{CK}$, id eſt ut decrementum velocitatis directè utque vis generans decrementum inversè, atque ideò ut particula temporis decremento velocitatis reſpondens, & componendo, fit ſumma particularum temporis quibus omnes velocitatis F P particulæ P Q extinguuntur, ut ſumma particularum ſectoris G D T, id eſt, tempus totum ut ſector totus. Q. E. D.

100. *Coroll.* 1. Quoniam coincidente puncto P cum C, coincidit etiam K cum C, & D T cum aſymptoto D C, liquet corporis projecti velocitatem a P nonniſi deſcripto ſpatio infinito, elapſoque infinito tempore, fieri poſſe velocitati terminali a C æqualem.

101. *Coroll.* 2. Si dignitas hyperbolæ BNO ſeu rectangulum C A × A B, ſit $\frac{1}{4}\, aC^2$, ſpatium quod corpus tempore quovis deſcribit, erit ad ſpatium quod corpus velocitate terminali a C eodem tempore uniformiter progrediendo deſcribere poteſt, ut area A B N K quâ ſpatium deſcriptum exponitur ad aream G D T quâ tempus exponitur. Nam cùm ſit a C ad a P, ut a P ad a K, erit (*per cor.* 1. *Lem.* 2. *lib.* 2.)

2.) L K ad P Q ut 2 a K ad a P, hoc eſt, ut 2 a P ad a C, & indè L K ad $\frac{1}{2}$ P Q, ut a P ad $\frac{1}{4}$ a C. (*ex naturâ hyperb. & per hyp*) K N × C K eſt C A × A B, ſeu $\frac{1}{4}$ a C², ideóque K N ad a C ſeu a D, ut $\frac{1}{4}$ a C ad C K. Itaque (ex æquo) L K N, ad D P Q, ut a P, ad C K; ſed erat D P Q, ad D T V, ut C K ad a C, ergò rurſus (ex æquo), L K N, eſt ad D T V, ut a P, ad a C, hoc eſt, ut velocitas corporis projecti eſt ad velocitatem maximam quam corpus è quiete cadendo poteſt acquirere. Cùm igitur arearum A B N K & G D T, momenta L K N & D T V ſint ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes ſimul genitæ ut ſpatia ſimul deſcripta, ideóque areæ totæ ab initio genitæ A B N K & G D T, ut ſpatia tota ab initio projectionis deſcripta.

102. *Coroll.* 3. Velocitas a P corporis projecti in fine temporis G T D, eſt ad velocitatem quam corpus velocitate initiali a F projectum eodem tempore in medio non reſiſtente cadendo haberet, ut triangulum a P D ad ſummam trianguli a F D & ſectoris hyperbolici G T D. Nam velocitatis incrementum tempore G T D in ſpatio non reſiſtente genitum eſt ut tempus G T D, & velocitas projectionis ut a F, ſive ut triangulum A F D, atque adeò velocitas tota in fine temporis G T D ut G T D + a F D, & velocitas in fine temporis ejuſdem G T D in medio reſiſtente eſt ut a P, id eſt, ut triangulum a P D, & velocitates illæ initio projectionis æquantur inter ſe, perindè ut areæ illæ G T D + a F D & a P D, ob ſectorem G T D evaneſcentem, & a P æqualem a F initio deſcenſûs.

103. *Coroll.* 4. Tempus quo corpus in medio reſiſtente projectum acquirit velocitatem a P, ſeu quo amittit velocitatem P F, eſt ad tempus quo velocitatem maximam a C, in ſpatio non reſiſtente è quiete cadendo acquirere poſſet, ut ſector G D T ad triangulum a D C. Sit a F + *V*, recta velocitatem exponens quam corpus in medio non reſiſtente cum velocitate initiali a F projectum elapſo tempore G D T haberet, & erit (102) a P ad a F + *V*, ſeu multiplicando per $\frac{1}{2}$ A D, a P D ad a F D + $\frac{1}{2}$ a D × *V*, ut a P D ad a F D + G T D, ideóque $\frac{1}{2}$ a D × *V* = G T D, & $V = \frac{GTD}{\frac{1}{2}\,aD}$; ſed *V* eſt velocitas quam corpus è quiete cadendo in medio non reſiſtente acquireret tempore G T D, & velocitates in medio non reſiſtente acquiſitæ, ſunt ut tempora quibus acquiruntur, ideóque velocitas *V* ſeu $\frac{GTD}{\frac{1}{2}\,aD}$, eſt ad velocitatem a C, in medio non reſiſtente acquiſitam ut tempus G T D ad tempus quo corpus velocitatem a C acquirit; Quarè hoc tempus erit $\frac{1}{2}$ a D × 103.
a C, ſeu per triangulum a D C exponetur.

104. *Coroll.* 5. Hinc ex dato tempore datur ſpatium deſcriptum. Capiatur enim ſector G D T ad triangulum a D C, ut tempus datum ad tempus quo corpus in medio non reſiſtente acquirit velocitatem terminalem a C, & dabitur tum velocitas a P, tum area A B N K, quæ eſt ad ſectorem G D T, ut ſpatium quæſitum ad ſpatium quod tempore dato cum velocitate illâ terminali a C uniformiter deſcribi poteſt (101) & regrediendo ex dato ſpatio A B N K, dabitur tempus G D T, ſi capiatur area A B N K, ad triangulum a D C in ratione ſpatii dati ad duplum ſpatii quod corpus in medio non reſiſtente cadendo deſcribit ut velocitatem terminalem a C acquirat. Id demonſtratur ex not. 103. & 101) eodem prorſus modo quo factum eſt (97).

105. *Scholium.* Superiores conſtructiones definiendis corporum motibus ſufficiunt, licet medii reſiſtentia partim conſtans partim velocitatis quadrato proportionalis. Nam ſi corpus ſolâ vi inſitâ moveatur, recta A C, quæ in conſtructionibus prop. 8. & 9. vim gravitatis uniformem exponebat, partem reſiſtentiæ conſtantem quæ vi alicui centripetæ uniformi æqualis cenſeri poteſt, cæteris manentibus, exponet. Sed ſi corpus in medio prædicto gravitate uniformiter agente ſollicitatum rectâ aſcendat vel deſcendat, linea A C, in conſtructionibus pro aſcenſu vim gravitatis & partem reſiſtentiæ datam ſimul exhibebit, in conſtructionibus verò pro deſcenſu exceſſum gravitatis ſuprà partem reſiſtentiæ datam repræſentabit; & linea illa A C, ità determinata vim gravitatis uniformem exponet, quâ corpus urge-

retur in medio cujus eſſet reſiſtentia ut velocitatis quadratum. Si verò pars illa reſiſtentiæ quæ uniformis manet vi gravitatis æqualis fuerit & corpus deorſum projiciatur, idem erit illius motus ac ſi ſolâ vi inſitâ ferretur in medio quod reſiſteret in ratione quadrati velocitatis, atquè ideò in hoc caſu uſurpanda erit conſtructio propoſitionis 5ᵃ. Jam verò omiſſis conſtructionibus per Logarithmicam quas (*ex demonſtr.* 44. 45:) facile deducere, aut in Monumentis Academiæ Regiæ an. 1709. & etiam in Phoronomiâ *Hermanni* Lector videre poterit, duo quæ ſequuntur generalia problemata analyticè ſolvemus.

PROBLEMA.

Definire motum corporis, uniformi gravitate urgente, rectà deſcendentis vel aſcendentis in medio ſimilari, quod in ratione quâlibet multiplicatâ velocitatis reſiſtit.

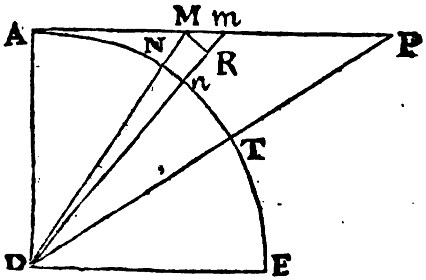
106. Sit vis gravitatis $= g$, velocitas corporis ſub initio metûs $= c$, ſpatium deſcriptum $= s$, tempus quo deſcriptum eſt $= t$, velocitas hoc tempore acquiſita vel reſidua $= v$, reſiſtentia medii $r = \frac{v^n}{a^{n-1}}$, & a quantitas data. Corpore deſcendente erit (19) $g\,ds - \frac{v^n\,ds}{a^{n-1}} = v\,dv$, ideoque $ds = \frac{a^{n-1}\,v\,dv}{ga^{n-1} - v^n}$, & quia (13) $dt = \frac{ds}{v}$, erit $dt = \frac{a^{n-1}\,dv}{ga^{n-1} - v^n}$. Simili modo pro corporis aſcenſu, invenitur $ds = \frac{-a^{n-1}\,v\,dv}{ga^{n-1} + v^n}$ & $dt = \frac{-a^{n-1}\,dv}{ga^{n-1} + v^n}$. Cùm igitur in his quatuor æquationibus variabiles ſeparatæ ſint, poterunt illæ, ſaltem conceſſis figurarum quadraturis, conſtrui.

107. Si reſiſtentia velocitati proportionalis fuerit, erit $n = 1$, & ideò corpore deſcendente $ds = \frac{v\,dv}{g - v}$ & diviſione numeratoris $v\,dv$ per $-v + g$ peractâ, eſt $ds = -dv + \frac{g\,dv}{g - v}$, & ſumptis fluentibus $s = Q - v - g \times L.\overline{g - v}$. Quia verò ubi evaneſcit ſpatium s, fit $v = c$ (*per hyp.*) erit conſtans $Q = c + g\,L.\overline{g - c}$, ac proindè $s = c - v + L.\frac{g - c}{g - v}$. Tempus habetur per æquationem $dt = \frac{dv}{g - v}$ cujus fluens $t = Q - L.\overline{g - v} = L.\frac{g - c}{g - v}$. Simili modo pro corporis aſcenſu invenitur $s = c - v + g\,L.\frac{g + v}{g + c}$, & $t = L.\frac{g + c}{g + v}$.

108. Si reſiſtentia ſit ut velocitatis quadratum, erit $n = 2$ & (106) $r = \frac{v^2}{a}$. Sit b velocitas terminalis, & quia reſiſtentia gravitati æqualis eſt ubi corpus velocitatem maximam habet, erit $g = \frac{bb}{a}$, & $bb = ag$. Sit e ſpatium quod corpus vi gravitatis conſtante g cadendo in medio non reſiſtente deſcribit ut acquirat velocitatem b, & erit $2ge = bb = ag$ (23) ideoque $a = 2e$. His poſitis, corpore deſcendente erit (106) $ds = \frac{a\,v\,dv}{ag - vv} = \frac{2e\,v\,dv}{bb - vv}$. Ponatur $bb - vv = xx$, & proindè ſumptis fluxionibus $v\,dv = -x\,dx$, atquè ideo $ds = -\frac{2ex\,dx}{xx} = -\frac{2e\,dx}{x}$, & ſumptis fluentibus $s = Q - 2e\,L.x = Q - e\,L.x^2 = Q - e\,L.\overline{bb - vv}$. Ponatur $s = 0$, & ideò $v = c$, & indè habebitur $Q = e\,L.\overline{bb - cc}$, ac proptereà $s = e\,L.\frac{bb - cc}{bb - vv}$. Sit $L.h = 1$ & erit $s\,L.h = e\,L.\frac{bb - cc}{bb - vv}$; $\frac{s}{e} \times L.h = L.h^{\frac{s}{e}} = L.\frac{bb - cc}{bb - vv}$, ideóque $h^{\frac{s}{e}} = \frac{bb - cc}{bb - vv}$; undè eruitur $vv = \frac{bb\,h^{\frac{s}{e}} + cc - bb}{h^{\frac{s}{e}}}$. Tempus obtinetur per æquationem (106) $dt = \frac{a\,dv}{ag - vv} = \frac{2e\,dv}{bb - vv} = \frac{\frac{e}{b}\,dv}{b + v} + \frac{\frac{e}{b}\,dv}{b - v}$; quod patet, ſi duæ poſtrèmæ fractiones ad communem denominatorem reducantur, &, ſumptis fluentibus $t = Q + \frac{e}{b}L.\overline{b + v} - \frac{e}{b}L.\overline{b - v}$

$-v = Q + \frac{e}{b} L. \frac{b+v}{b-v}$. Ponatur $t = o$, & ideò $v = c$, & invenietur $Q = -\frac{e}{b} L. \frac{b+c}{b-c}$. Quarè erit $t = \frac{e}{b} L. \frac{\overline{b+v} \times \overline{b-c}}{\overline{b-v} \times \overline{b+c}}$. Si corpus è quiete cadat, erit $c = o$, & ideò $s = e L. \frac{bb}{bb-vv}$, $vv = \frac{bbh^{\frac{s}{e}} - bb}{h^{\frac{s}{e}}}$ & $t = \frac{e}{b} L. \frac{b+v}{b-v}$.

Si in hâc ultimâ æquatione loco $h^{\frac{e}{s}}$ ſcribatur m & loco v ipſius valor $b\sqrt{1-\frac{1}{m}}$, habebitur $t = \frac{e}{b} \times \frac{L\,\overline{1+\sqrt{1-\frac{1}{m}}}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{m}}}$.



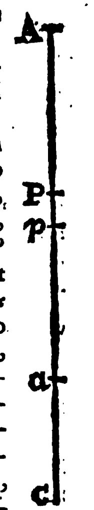
Simili modo aſcendente corpore invenietur $s = e\, L \frac{bb+cc}{bb+vv}$, & $vv = \frac{bb+cc-bbh^{\frac{s}{e}}}{h^{\frac{s}{e}}}$. Tempus autem reperitur per æquationem $dt = -\frac{adv}{ag+vv} = -\frac{edv}{bb+vv}$. Centro D, radio DA $= b$, deſcribatur circuli quadrans ANE, velocitas c, ſub initio aſcenſûs exponatur per datam tangentem AP, velocitas reſidua v, per tangentis illius partem AM, & dv per Mm, jungantur DP, DM, Dm, circulo occurrentes in T, N, n, & ex puncto M, demiſſum ſit ad Dn perpendiculum MR, triangula ſimilia DNn, DMR, dant DM : DN vel DA $=$ MR : Nn, & triangula ſimilia mRM, MAD, dant DM : DA $=$ Mm : MR, ideóque (ex æquo) $DM^2 : DA^2 = Mm : Nn$, hoc eſt, $bb+vv : bb = dv : Nn = \frac{bbdv}{bb+vv}$; undè fit $\frac{e \times Nn}{bb} = \frac{edv}{bb+vv}$; & hinc habebitur $dt = -\frac{e \times Nn}{bb}$, ſumptiſque fluentibus $t = Q - \frac{e \times AN}{bb}$. Ponatur $t = o$, & fiet AM $=$ AP, & AN $=$ AT, ideóque $Q = \frac{e \times AT}{bb}$. Quarè erit $t = \frac{e \times TN}{bb} = \frac{TN}{2g}$, (ob $bb = 2ge$). 108.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. IX. THEOR. VII.

PROBLEMA.

Definire motum corporis in lineâ rectâ AC, vi quâlibet centripetâ ad punctum C tendente ſollicitati in medio cujus reſiſtentia eſt ut denſitas medii & dignitas quævis velocitatis corporis conjunctim.

109. Corpus è loco dato A vel a, datâ cum velocitate projectum aſcendat per ſpatium aP vel deſcendat per ſpatium AP, dicanturque velocitas projectionis in a vel A $= c$, ſpatium deſcriptum aP vel AP $= s$, tempus quo deſcriptum eſt $= t$, velocitas corporis in loco P $= v$, vis centripeta ibidem $= g$, denſitas medii in eodem loco $= k$, reſiſtentia $r = kv^n$, diſtantia CP $= x$, & data Ca vel CA $= b$, erit (22) pro corporis aſcenſu, $gdx + kv^n dx = -vdv$, & pro deſcenſu $gdx - kv^n dx = -vdv$, quarum æquationum alterutram reſolvere ſatis eſt, cum altera in alteram abeat, mutato ſigno $+$ vel $-$ quantitati k præfixo. Quia verò corpore aſcendente eſt aP $= s = x - b$, & proindè $ds = dx$; at eodem deſcendente AP $= s = b - x$, & ideo



DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. IX. THEOR. VII.

$ds = -dx$, erit pro corporis aſcenſu (13) $dt = \frac{ds}{v} = \frac{dx}{v}$, & pro deſcenſu $dt = -\frac{dx}{v}$. His poſitis breviter exponimus præcipuos caſus in quibus ſuperiorum æquationum variabiles ſeparari & æquationes proindè per curvarum quadraturas conſtrui poſſunt.

110. Si in æquatione generali $g\,dx \pm kv^n\,dx = -v\,dv$, quæ eſt pro aſcenſu & deſcenſu ſimul. Sit g quantitas conſtans, & denſitas k, ut diſtantiæ dignitas $x^{\frac{1}{2}n}$ reciprocè, hoc eſt, $k = \frac{1}{ax^{\frac{1}{2}n}}$, variabiles ſeparari poſſunt. Nam æquatio generalis in hanc mutabitur $g\,dx \pm \frac{v^n\,dx}{ax^{\frac{1}{2}n}} = -v\,dv$. Ponatur $v^2 = xz$, ideoque $v^n = x^{\frac{1}{2}n} z^{\frac{1}{2}n}$, & $v\,dv = \frac{x\,dz + z\,dx}{2}$, & æquatio evadet $g\,dx \pm \frac{z^{\frac{1}{2}n}\,dx}{a} = \frac{-x\,dz - z\,dx}{2}$, undè eruitur $\frac{dx}{x} = \frac{a\,dz}{2ag + az \pm 2z^{\frac{1}{2}n}}$. In quâ variabiles ſunt ſeparatæ.

111. Si denſitas k conſtans fuerit, vis centripeta g ut diſtantia x à centro & reſiſtentia ut velocitas, variabiles ſeparari poſſunt. Nam ſi ponatur $g = ax$, k conſtans & $n = 1$, æquatio generalis fiet $ax\,dx \pm kv\,dx = -v\,dv$, in quâ neglectis coefficientibus datis a & k, termini omnes ſunt homogenei ſeu ejuſdem dimenſionis. Ponatur itaque $v = zx$, & proindè $dv = z\,dx + x\,dz$; & æquatio evadet $ax\,dx \pm kzx\,dx = -z^2x\,dx - zx^2\,dz$, & terminis omnibus per x diviſis, iiſque ordinatis invenitur $\frac{dx}{x} = -\frac{z\,dz}{a \pm kz + z^2}$, quæ æquatio, conceſſâ Hyperbolæ vel circuli quadraturâ ſemper conſtrui poteſt.

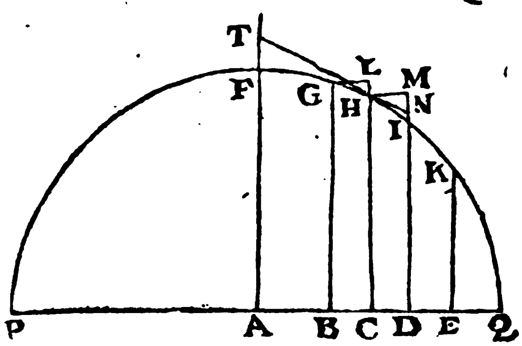
112. Si, cæteris paribus, medii reſiſtentia ſit ut quadratum velocitatis, id eſt, $n = 2$, & denſitas medii k viſque centripeta g ſint ut functiones quælibet diſtantiæ x, variabiles in ſuperioribus æquationibus (109.) ſeparationem admittunt. In hâc Hypotheſi æquatio pro corporis aſcenſu fit $g\,dx + kv^2\,dx = -v\,dv$, ſeu $v\,dv + kv^2\,dx = -g\,dx$. Ponatur $k\,dx = \frac{dz}{2z}$, ut ſit $2zv\,dv + v^2\,dz = -2gz\,dx$, & ſumptis fluentibus erit $zv^2 = Q - S.2gz\,dx$, & $v^2 = \frac{Q - S.2gz\,dx}{z}$. Quia verò $k\,dx = \frac{\frac{1}{2}dz}{z}$, erit $S.k\,dx = \frac{1}{2}L.z$ & $S.2k\,dx = L.z$. Atquè ideò ſi fuerit $L.h = 1$, $h^{S.2kdx} = z$ undè fit $v^2 = \frac{Q - S.2gh^{S.2kdx}\,dx}{h^{S.2kdx}}$, pro corporis aſcenſu; & pro deſcenſu loco $+k$, ſcribendo $-k$, erit $v^2 = \frac{Q - S.2gh^{-S.2kdx}\,dx}{h^{-S.2kdx}}$ $= Qh^{S.2kdx} - h^{S.2kdx}\,S.2gh^{-S.2kdx}\,dx$ in quibus æquationibus variabiles ſunt ſeparatæ, quia (*per Hyp.*) quantitates k & g, ſunt ut functiones variabilis x. Conſtans Q determinatur ex eo quod ubi $x = b$, ſit $v = c$, tempus verò definitur per æquationem $dt = \frac{dx}{v}$ pro corporis aſcenſu, & per æquationem $dt = -\frac{dx}{v}$ pro corporis deſcenſu, in quibus æquationibus, ſi loco v ſubſtituatur ipſius valor per x inventus, variabiles erunt ſeparatæ. Sed de his vide Mechanicam Clar. *Euleri*.

PRO-

PROPOSITIO X. PROBLEMA III.

Tendat uniformis vis gravitatis directè ad planum horizontis, ſitque reſiſtentia ut medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii denſitas in locis ſingulis, quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ moveatur; tum corporis velocitas & medii reſiſtentia in locis ſingulis.

Sit *PQ* planum illud plano ſchematis perpendiculare; *PFHQ* linea curva plano huic occurrens in punctis *P* & *Q*; *G*, *H*, *I*, *K* loca quatuor corporis in hâc curvâ ab *F* ad *Q* pergentis; & *GB*, *HC*, *ID*, *KE* ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demiſſæ, & lineæ horizontali *PQ* ad puncta *B*, *C*, *D*, *E* inſiſtentes; & ſint *BC*, *CD*, *DE* diſtantiæ ordinatarum inter ſe æquales. A punctis *G* & *H* ducantur rectæ *GL*, *HN* curvam tangentes in *G* & *H*, & ordinatis *CH*, *DI* ſurſum productis occurrentes in *L*

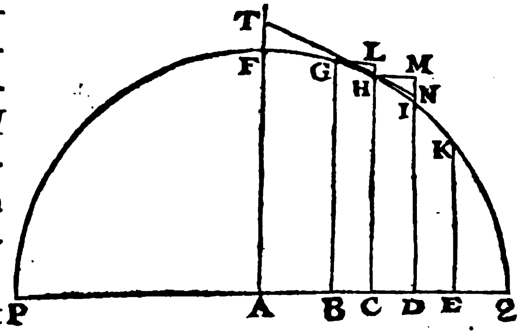


& *N*, & compleatur parallelogrammum *HCDM*. Et (b) tempora, quibus corpus deſcribit arcus *GH*, *HI*, erunt in ſubduplicatâ ratione altitudinum *LH*, *NI*, quas corpus temporibus illis deſcribere poſſet, à tangentibus cadendo; & (c) velocitates erunt ut longitudines deſcriptæ *GH*, *HI* directè & tempora

(b) 113. * *At tempora quibus corpus deſcribit arcus* evaneſcentes G H, H I, *erunt in ſubduplicatâ ratione altitudinum* L H, N I. Eodem enim temporis momento quo corpus vi motûs inſiti in G, deſcriberet tangentem G L, vi gravitatis uniformi caderet per altitudinem L H qualem in medio non reſiſtente percurreret eo ipſo tempore; reſiſtentiæ enim effectus altitudinem eam minuit quantitate ejus ipſius reſpectu infinitè parvâ, quæ itaque hic non eſt ſpectanda, itaque corpus arcum G H deſcribere cenſendum eſt vi compoſitâ ex vi motus inſiti & vi gravitatis. Et ſimili modo, tempore eodem quo deſcribit arcum H I, vi gravitatis caderet per altitudinem N I. Quare (per Lem. 10. Lib. 1.) tempora quibus corpus deſcribit arcus G H, H I, ſeu quibus cadit per altitudines L H, N I, ſunt in ſubduplicatâ ratione harum altitudinum. 113.

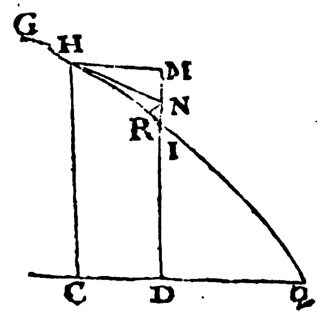
(c) * *Et velocitates erunt* (11).

pora inverſè. Exponantur tempora per T & t, & velocitates per $\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{t}$; & (d) decrementum velocitatis tempore t factum exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur à reſiſtentiâ corpus retardante, & gravitate corpus accelerante. Gravitas, in corpore cadente & ſpatium *NI* cadendo deſcribente, generat velocitatem, quâ duplum illud ſpatium eodem tempore deſcribi potuiſſet, ut (e) *Galilæus* demonſtravit; id eſt velocitatem $\frac{2NI}{t}$: (f) at in corpore arcum *HI* deſcribente au-



(d) * *Et decrementum velocitatis.* Nam ſi velocitas per arcum HI, eadem eſſet ac velocitas per arcum GH, exponeretur per $\frac{GH}{T}$, eſt autem illa $\frac{HI}{t}$. Quarè ſi velocitas decreſcat, illius decrementum tempore t factum, exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Si verò creſcat, exponetur per $\frac{HI}{t} - \frac{GH}{T}$; hoc decrementum vel incrementum oritur à reſiſtentia corpus retardante ejuſque motui ſecundum directionem tangentis HN vel arcûs HI directè contraria (1) & à gravitate motum corporis deſcendentis accelerante, vis enim gravitatis in vires duas videlicet normalem & tangentialem diviſa (24) corporis in curvâ deſcendentis motum per vim tangentialem accelerat, quem vis normalis nec accelerat, nec retardat. Quarè ſi reſiſtentia vi gravitatis tangentiali major eſt, motus retardatur, ſi minor acceleratur, ſi æqualis nec acceleratur nec retardatur.

(e) * *Ut Galilæus demonſtravit.* (Vid. dem. not. 29. lib. 1.).



(f) * *At in corpore &c.* Nam ſolâ vi inſitâ, corpus tempore t deſcriberet tangentem HN, & vi gravitatis ſolâ altitudinem NI, viribus verò conjunctis deſcribit arcum HI. Quarè gravitas ſpatium à corpore ſecundùm directionem HN vel HI, deſcribendum auget ſolâ longitudine HI — HN. Eſt autem $HI - HN = \frac{MI \times NI}{HI}$. Si enim centro H & radio HN, deſcriptus intelligatur arcus circularis NR, ſecans HI in R, duo triangula IRN, IMH ſimilia erunt, ob angulum MIH utri-

auget arcum illum ſolâ longitudine $HI - HN$ ſeu $\frac{MI \times NI}{HI}$; ideoque generat tantum velocitatem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, (a) & habebitur decrementum velocitatis ex reſiſtentiâ ſolâ oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cùm gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2NI}{t}$; (b) reſiſtentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, ſive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad $2NI$.

Jam pro abſciſſis CB, CD, CE ſcribantur (c) $-o$, o, $2o$. Pro

utrique triangulo communem, & angulos IRN, IMH rectos, ideoque æquales, undè erit $HI : MI = NI : RI$ ſeu $HI - HN$; & propterea $HI - HN = \frac{MI \times NI}{HI}$. Cùm igitur RI ſit ſpatium tempore t vi gravitatis tangentiali deſcriptum (113) velocitas illa quam vis illa tempore t generat, exponetur (29. *lib.* 1.) per $\frac{2RI}{t} = \frac{2MI \times MI}{t \times HI}$.

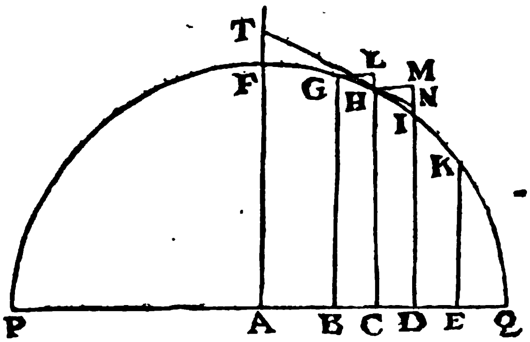
(a) * *Et habebitur decrementum velocitatis ex ſolâ reſiſtentiâ oriundum, nempe* $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$, non ſolùm in eo caſu quo reſiſtentia vim gravitatis tangentialem ſuperat, ſed etiam in eo caſu quo ab iſtâ ſuperatur. Sit enim velocitatis decrementum ex ſolâ reſiſtentiâ oriundum V, cùm incrementum velocitatis vi gravitatis tangentiali genitum ſit $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$, erit in primo caſu $V -$ 113.
$\frac{2MI \times NI}{t \times HI} = \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$ (113), ideoque $V = \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$; at in ſecundo caſu erit (113) $\frac{2MI \times NI}{t \times HI} - V = \frac{HI}{t} - \frac{GH}{T}$, & proinde $V = \frac{2MI \times NI}{t \times HI} + \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$, quæ eadem eſt expreſſio ac prius.

(b) * *Reſiſtentia erit ad gravitatem &c.* Vires enim acceleratrices vel retardatrices ſunt ut velocitatum elementa quæ dato temporis momento generant aut extinguunt, (13. *lib.* 1.).

(c) * *Scribantur* $-o$, o, $2o$. Si enim abſciſſæ CD, CE affirmativè capiantur, abſciſſæ CB, &c. in contrariam partem ſumptæ negativè debent exprimi.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

Pro ordinata CH ſcribatur P, & pro (d) MI ſcribatur ſeries quælibet $Qo + Roo + So^3 +$ &c. Et ſeriei termini omnes poſt primum, nempe $Roo + So^3 +$ &c. (e) erunt NI, & (f) ordinatæ DI, EK, & BG erunt $P - Qo - Roo - So^3 -$ &c. $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 -$ &c. & $P + Qo - Roo + So^3 -$ &c. reſpectivè. Et quadrando differentias ordinatarum $BG - CH$ & $CH - DI$, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata



ipſarum BC, CD, (g) habebuntur arcuum GH, HI quadrata $oo + QQoo - 2QRo^3 +$ &c. & $oo + QQoo + 2QRo^3 +$ &c. Quorum radices $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, & $o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ ſunt arcus GH & HI. Præterea ſi ab ordinatâ CH ſubducatur ſemiſumma ordinatarum BG ac DI, & ab ordinatâ DI ſubducatur ſemiſumma ordinatarum CH & EK,

(d) * *Et pro MI ſcribatur ſeries quælibet.* Nam ordinatarum CH, DN differentia fluxionalis MI exprimi poteſt per ſeriem infinitam $Qo + Roo + So^3 +$ &c. in quâ Q, R, S, &c. ſunt quantitates finitæ hic generaliter ſumptæ & poſtea in ſingulis caſibus determinandæ, & o eſt incrementum naſcens & conſtans abſciſſæ (552, 556. *lib.* 1.).

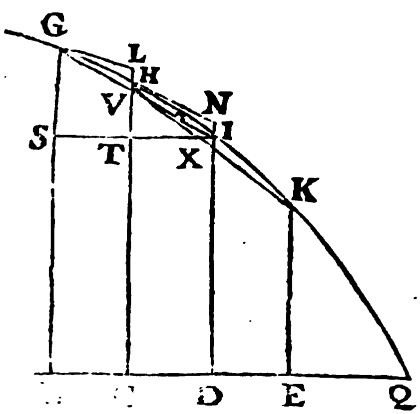
(e) * *Erunt NI &c.* (552. *lib.* 1.)

(f) * *Et ordinatæ &c.* Eſt enim $DI = DM - MI = CH - MI = P - Qo - Roo - So^3 -$ &c. (*per hyp.*); & quia $CE = 2o$, ſi in valore ordinatæ DI loco o ſcribatur $2o$, abibit DI in $EK = P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 -$ &c; & ſimili modo quia $CB = -o$, ſi in valore ordinatæ DI loco $+o$ ſcribatur $-o$, fiet $DI = BG = P + Qo - Roo + So^3 -$ &c.

(g) * *Habebuntur arcuum GH, HI quadrata &c.* Eſt enim, ob angulum HMI rectum $HI^2 = HM^2 + MI^2$; & $HM = CD = o$, at $MI = CH - DI = Qo + Roo + So^3 +$ &c. ideoque $HM^2 = oo$, $MI^2 = Q^2o^2 + 2QRo^3 + R^2o^4 + 2QSo^4 +$ &c.; unde $HI^2 = o^2 + QQo^2 + 2QRo^3 +$ &c. Negliguntur autem termini in quibus eſt o^4, o^5, &c. quod præ cæteris antecedentibus evaneſcant & ad rem nihil faciant. Quare extrahendo radicem quadratam fit $HI = o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, neglectis cæteris terminis negligendis: & ſimili modo invenitur $GH = o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$.

EK, (h) manebunt arcuum *GI* & *HK* ſagittæ Roo & $Roo + 3So^3$. Et (k) hæ ſunt lineolis *LH* & *NI* proportionales, ideoque in duplicatâ ratione temporum infinitè parvorum T & *t*: & (l) inde ratio $\frac{t}{T}$ eſt $\sqrt{\frac{R+3So}{R}}$ ſeu $\frac{R+\frac{3}{2}So}{R}$; & $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$, ſubſtituendo ipſorum $\frac{t}{T}$, *GH*, *HI*, *MI* & *NI* valores jam inventos, (m) evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$. Et cùm $2NI$ ſit $2Roo$, reſiſtentia jam erit

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.



(h) * *Manebunt arcuum G I & H K ſagittæ &c.* Jungatur chorda G I ſecans CH in V, & ex puncto I demittatur ad BG perpendiculum IS ſecans CH in T. Erit, ob triangulorum ITV, ISG ſimilitudinem IT ad IS, ſeu DC ad DB, id eſt, 1 ad 2, ut TV ad GS, & ideo GS = 2VT, & GB = 2VT + SB = 2VT + DI, & GB + DI = 2VT + 2DI, quare ſemiſumma ordinatarum GB ac DI eſt VT + DI, ſeu VC, quæ ſi ab ordinatâ CH ſubducatur, remanebit arcûs GI ſagitta VH. Et ſimili ratiocinio patet arcûs HK ſagittam IX æqualem eſſe differentiæ inter ordinatam DI & ſemiſummam ordinatarum CH & EK.

(k) * *Et hæ ſunt lineolis LH & NI proportionales.* Nam coeuntibus punctis B, C, D, E & G, H, I, K figuræ NHIXH, LGHVG ſimiles ſiunt, & propterea latera homologa HV & IX, LH & NI proportionalia; ſunt autem (*ex demonſtr.*) lineolæ LH, NI ut quadrata temporum T*t*, quibus deſcribuntur arcus GH, HI. 118.

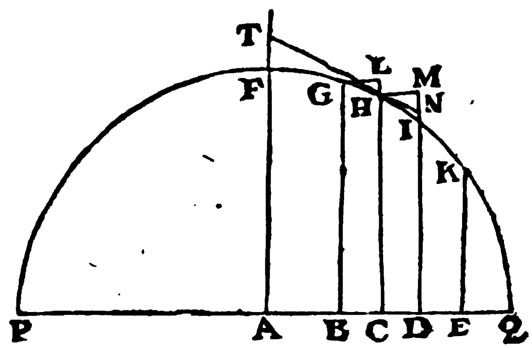
(l) * *Et inde ratio $\frac{t}{T}$ eſt &c.* Nam (*ex demonſt.*) $\frac{tt}{TT} = \frac{IX}{HV} = \frac{Roo+3So^3}{Roo} = \frac{R+3So}{R}$, & ideò $\frac{t}{T} = \sqrt{\frac{R+3So}{R}} = \sqrt{\frac{RR+3SRo}{RR}} = \frac{\sqrt{RR+3SRo}}{R}$; ſed $\sqrt{RR+3SRo} = R + \frac{3SRo}{2R}$, neglectis terminis negligendis: quare erit $\frac{t}{T} = \frac{R+\frac{3}{2}So}{R} = 1 + \frac{3So}{2R}$.

(m) * *Evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$.* Eſt enim $\frac{t \times GH}{T} = o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}} + \frac{\frac{3}{2}Soo\sqrt{1+QQ}}{R}$, neglecto termino in quo reperitur o^3, qui præ cæteris evaneſcit. Unde ſit $\frac{t \times GH}{T} - HI = \frac{\frac{3}{2}Soo\sqrt{1+QQ}}{R}$

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

erit ad gravitatem ut $\frac{3\,Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ ad $2\,Roo$, id eſt, ut $3\,S\sqrt{1+QQ}$ ad $4\,RR$.

Velocitas autem ea eſt, quâcum corpus de loco quovis *H*, ſecundum tangentem *HN* egrediens, in parabolâ diametrum *HC*



& latus rectum $\frac{HNq}{NI}$ ſeu $\frac{1+QQ}{R}$ habente, (n) deinceps in vacuo moveri poteſt.

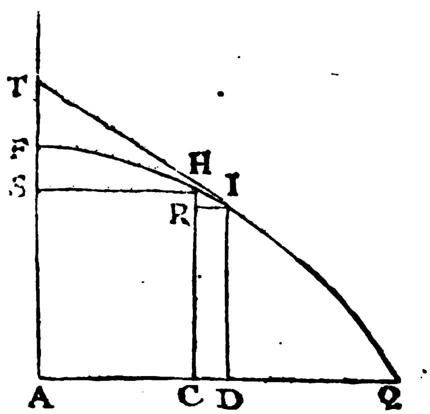
Et reſiſtentia eſt ut medii denſitas & quadratum velocitatis

$-\frac{2\,QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$; ſed $2\,MI = 2\,Qo$, & $NI = Roo$ neglectis cæteris ſeriei terminis evaneſcentibus, ideoque $2\,MI \times NI = 2\,QRo^3$, atque proinde $\frac{2\,MI \times NI}{HI} = \frac{2\,QRo^2}{\sqrt{1+QQ}}$, neglecto in valore arcûs HI termino evaneſcente $\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$. Quare erit $\frac{1 \times GH}{T} - HI + \frac{2\,MI \times NI}{HI} = \frac{3\,Soo\sqrt{1+QQ}}{2\,R}$.

(n) * *Deinceps in vacuo moveri poteſt.* Cùm enim velocitas per arcum HI, ſeu per tangentem naſcentem HN, æquabilis cenſeri poſſit (5), & corpus eodem temporis momento quo vi inſitâ deſcriberet HN, vi gravitatis uniformi, omiſſa reſiſtentia quæ hic ut nulla haberi debet (113), cadit per altitudinem NI; arcus naſcens HI, quem corpus viribus conjunctis deſcribit, uſurpari poteſt pro arcu parabolæ, cujus eſt diameter HC (40. lib. 1.), tangens HN ordinatis parallela, & NI parallela & æqualis abſciſſæ cui reſponderet ordinata æqualis HN. Quare hujus parabolæ latus rectum erit $\frac{HN^2}{NI}$ (*per Theor.* 1. *de parab.*), *ſeu* (*per Lemma* 7. *lib.* 1.) $\frac{HI^2}{HI} = \frac{oo+QQoo}{Roo} = \frac{1+QQ}{R}$, neglectis terminis negligendis. Si itaque corpus in vacuo deinceps moveretur, hanc parabolam deſcriberet (40. *lib.* 1.).

tatis conjunctim, & propterea medii denſitas eſt ut reſiſtentia directè & quadratum velocitatis inversè, id (o) eſt, ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directè & $\frac{1+QQ}{R}$ inversè, hoc eſt, ut $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. *Q. E. I.*

Corol. 1. Si tangens *HN* producatur utrinque donec occurrat ordinatæ cuilibet *AF* in *T*: (p) erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis



(o) * *Id eſt, ut &c.* Quia enim reſiſtentia eſt ad gravitatem conſtantem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ *ad* $4RR$, erit reſiſtentia ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$. Velocitas autem eſt ut $\frac{HI}{t}$, & illius quadratum ut $\frac{HI^2}{t^2}$; & HI^2 eſt $oo+QQoo$, neglectis negligendis, t^2 verò eſt ut NI, ſeu ut Roo (ex demonſtr.); adeoque velocitatis quadratum ut $\frac{1+QQ}{R}$. Quare medii denſitas erit ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4R(1+QQ)}$, & ob datum numerum $\frac{3}{4}$, ut $\frac{S\sqrt{1+QQ}}{R(1+QQ)} = \frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$.

114. Si reſiſtentia eſſet ut medii denſitas & velocitatis V dignitas quælibet V^n conjunctim; cùm ſit V^n ut $\frac{HI^n}{t^n}$, ſive ut $\frac{(1+QQ)^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}}}$, medii denſitas foret ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directè & $\frac{(1+QQ)^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}}}$ inversè, id eſt, directè ut $\frac{SR^{\frac{n-4}{2}}}{(1+QQ)^{\frac{n-1}{2}}}$.

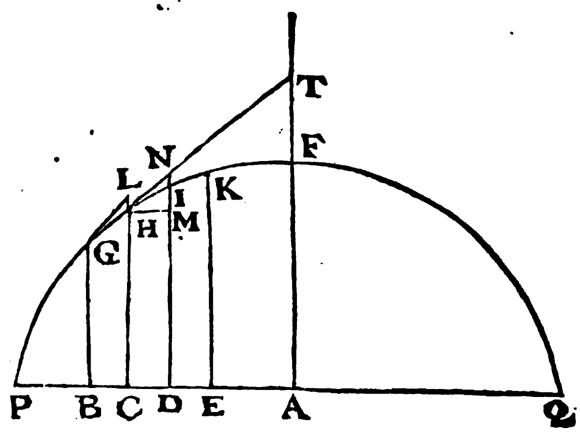
(p) * *Erit* $\frac{HT}{AC}$ *æqualis &c.* Ex punctis H & I demittantur ad A F & C H perpendicula H S & I R; & ob triangula IRH, HST ſimilia, erit H T ad H S ſeu A C ut H I ad I R vel C D, ideoque $\frac{HT}{AC} = \frac{HI}{CD} = \frac{o\sqrt{1+QQ}}{o} = \sqrt{1+QQ}$. 114.

115. Hinc ſi reſiſtentia ſit ut medii denſitas & velocitatis dignitas V^n conjunctim, erit reſiſtentia ad gravitatem, ut $3S \times HT$ ad $4RR \times AC$, velocitatis dignitas n, ut $\frac{HT^n}{AC^n \times R^{\frac{n}{2}}}$, & medii denſitas ut $\frac{SR^{\frac{n-4}{2}} \times AC^{n-1}}{HT^{n-1}}$, ſive ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \overline{\frac{AC}{HT}}\Big|^{n-1}$ (114).

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. II. Prop. X. Probl. III.

$\sqrt{1+QQ}$, ideoque in ſuperioribus pro $\sqrt{1+QQ}$ ſcribi poteſt. Quâ ratione reſiſtentia erit ad gravitatem ut $3S \times HT$ ad $4RR \times AC$, velocitas erit ut $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$, & medii denſitas erit ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$

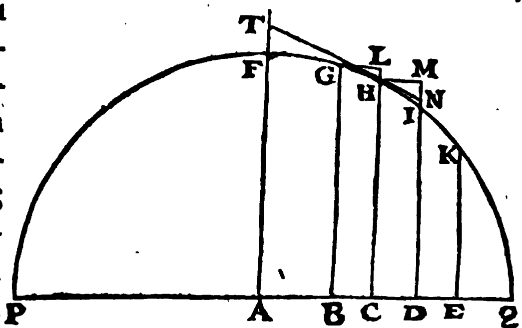
Co-



116. Superiores formulæ non ſolùm pro corporis deſcenſu per arcum F Q, ſed etiam pro ejuſdem aſcenſu per arcum P F uſurpari poſſunt. Corpore aſcendente per arcum P F à P ad F, eadem fiat quæ pro deſcenſu per arcum F Q conſtructio; & tempora quibus deſcribuntur arcus G H, H I exponantur per T & t. Decrementum velocitatis tempore t factum erit $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur à reſiſtentiâ & gravitate corporis aſcendentis motum ſimul retardantibus. Gravitas in corpore cadente & ſpatium N I cadendo deſcribente, generat velocitatem $\frac{2NI}{t}$; at in corpore arcum H I deſcribente, minuit arcum illum ſolâ longitudine $HN - HI$ ſeu $\frac{MI \times NI}{HI}$, ideoque extinguit tantum velocitatem tangentialem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Auferatur hæc velocitas à decremento prædicto, & habebitur decrementum velocitatis ex reſiſtentiâ ſolâ oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} - \frac{2MI \times NI}{t \times HL}$. Proindeque cùm gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2NI}{t}$; reſiſtentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} - \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, ſive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI - \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad $2NI$.

Jam ſi pro abſciſſis BC, CD, CE ſcribantur $-o$, o, $2o$, & pro ordinata CH ſcribatur P; MI & NI erunt $Qo - Roo - So^3 -$ &c., & $Roo + So^3 +$ &c. Nam in arcu F Q (vide fig. *Newt.*) D I, ſeu

Corol. 2. Et hinc, ſi curva linea $PFHQ$ definiatur per relationem inter baſem ſeu abſciſſam AC & ordinatim applicatam CH, ut moris eſt; & valor ordinatim applicatæ reſolvatur in ſeriem convergentem: Problema per primos ſeriei terminos expeditè ſolvetur, ut in exemplis ſequentibus.



Exempl. 1. Sit linea $PFHQ$ ſemicirculus ſuper diametro PQ deſcriptus, & requiratur medii denſitas quæ faciat ut projectile in hâc lineâ moveatur.

Biſecetur diameter PQ in A; dic AQ, n; AC, a; CH, e; & CD, o: & (q) erit DIq ſeu $AQq - ADq = nn - aa - 2ao - oo$, ſeu $ee - 2ao - oo$, & (r) radice per methodum no-

ſeu CH — MN — NI, erat $P - Qo - Roo - So^3$ &c., ideoque MN erat Qo (552. *lib.* 1.), & NI erat $Roo + So^3$; at in arcu PF eſt $DI = CH + MN - NI$, proindeque $DI = P + Qo - Roo - So^3$ &c., & hinc MI eſt $Qo - Roo - So^3$ &c. & NI eſt $Roo + So^3$. Et ſi in ſerie quæ valorem ordinatæ DI exprimit, loco o ſcribantur abſciſſæ CE, BC, ſive $2o$, $-o$, habebuntur ordinatæ EK & BG, nempe $P + 2Qo - 4Roo - 8So^3$ &c., & $P - Qo - Roo + So^3$ &c. reſpectivè. Et quadrando differentias ordinatarum CH—BG & DI—CH, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipſarum BC, CD, habebuntur arcuum GH, HI quadrata $oo + QQoo + 2QRo^3$, & $oo + QQoo - 2QRo^3$; quorum radices $o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ & $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ ſunt arcus GH & HI. Præterea ſi ab ordinatâ CH ſubducatur ſemiſumma ordinatarum BG ac DI, & ab ordinata DI ſubducatur ſemiſumma ordinatarum CH & EK, manebunt arcuum GI & HK ſagittæ Roo & $Roo + 3So^3$. Et hæ ſunt lineolis LH NI 116.
proportionales, ideoque in duplicatâ ratione temporum infinitè parvorum T & t, & inde ratio $\frac{t}{T}$ eſt, $\sqrt{\frac{R + 3So}{R}}$, ſeu $\frac{R + \frac{3}{2}So}{R}$; & $\frac{t \times GH}{T} - HI - \frac{2MI \times NI}{HI}$, ſubſtituendo ipſorum $\frac{t}{T}$, HI, GH, MI & NI valores jam inventos, evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$. Et cùm 2NI ſit $2Roo$, reſiſtentia erit ad gravitatem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$. Quemadmodum pro deſcenſu inventum eſt; & corollaria eadem quoque manent.

(q) * *Erit DIq ſeu &c.* Eſt enim radius AI = AQ, & ideo, ob angulum ADI rectum, $DI^2 = AQ^2 - AD^2 = nn - aa - 2ao - oo = ee - 2ao - oo$, ob $CH^2 = ee = AQ^2 - AC^2 = nn - aa$.

(r) * *Et radice per methodum noſtram extractâ*, ſeu per formulam generalem (550. *lib.* 1.).

noſtram extractâ, ſiet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5} -$ &c. Hic ſcribatur nn pro $ee + aa$, & evadet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} -$ &c.

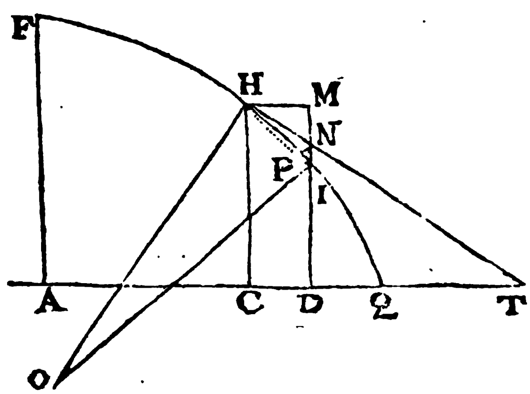
Hujuſmodi ſeries diſtinguo in terminos ſucceſſivos in hunc modum. Terminum primum appello, in quo quantitas infinitè parva o non extat; ſecundum, in quo quantitas illa eſt unius dimenſionis; tertium, in quo extat duarum; quartum, in quo trium eſt; & ſic in infinitum. Et (ſ) primus terminus, qui hic eſt e, denotabit ſemper longitudinem ordinatæ CH inſiſtentis ad initium indefinitæ quantitatis o. Secundus (t) terminus, qui hic eſt $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam inter CH & DN, id eſt, lineolam MN, quæ abſcinditur complendo parallelogrammum $HCDM$, (u) atque ideo poſitionem tangentis HN ſemper determinat; ut in hoc caſu capiendo MN ad HM ut eſt $\frac{ao}{e}$ ad o, ſeu a ad e. Terminus tertius, qui hic eſt $\frac{nnoo}{2e^3}$ deſignabit lineolam IN, quæ jacet inter tangentem & curvam, (x) ideoque determinat angulum contactus IHN ſeu cur-

(ſ) * *Et primus terminus* (552. lib. 1).

(t) * *Secundus terminus* (ibidem).

(u) 117. * *Atque ideo poſitionem tangentis H N ſemper determinat.* Producatur tangens H N ut diametro A Q occurrat in T; & propter triangulorum H M N, T C H ſimilitudinem, erit C T : H C = H M : MN. Eſt verò generatim H M = o, & M N = Qo, ac Q coeffieiens ſecundi termini ſeriei generalis pro curvâ quâcumque (ex demonſtr. prop. X.) : quare ſi capiatur C T ad H C ut eſt 1 ad Q habebitur ſubtangens C T.

(x) 118. * *Ideoque determinat angulum contactûs ſeu curvaturam &c.* Sit O cen-



curvaturam quam curva linea habet in *H*. Si (y) lineola illa *IN* finitæ eſt magnitudinis, deſignabitur per terminum tertium unà cum ſequentibus in infinitum. At ſi lineola illa minuatur in infinitum, termini ſubſequentes evadent infinitè minores tertio, ideoque negligi poſſunt. (z) Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, & ſic deinceps. Unde obiter patet uſus non contemnendus harum ſerierum in ſolutione problematum, quæ pendent à tangentibus & curvaturâ curvarum.

Conferatur jam ſeries $e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5}$ — &c. cum ſerie $P - Qo - Roo - So^3$ — &c. & perinde pro P, Q, R & S ſcribatur e, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$, & $\frac{ann}{2e^5}$, & pro $\sqrt{1+QQ}$ ſcribatur $\sqrt{1+\frac{aa}{ee}}$ (a) ſeu $\frac{n}{e}$, & prodibit medii denſitas ut $\frac{a}{ne}$; hoc

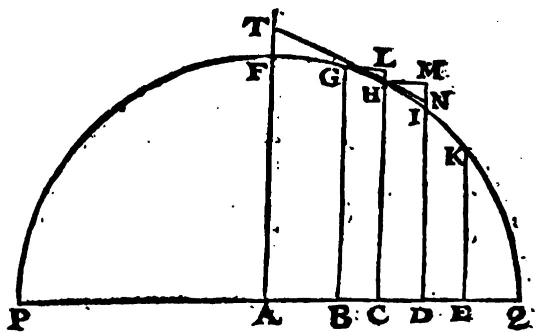
centrum circuli curvam F H Q oſculantis in H; OH, OI radii, HPI chorda arcûs HI, NP arculus circularis centro H & radio HN deſcriptus. Duo triangula IPN, IMH ſimilia erunt, ob angulos ad P & M rectos & angulum ad I utrique triangulo communem, & ideo HI eſt ad HM ut NI ad NP, ac proinde $NP = \frac{HM \times NI}{HI}$. Anguli NHI, quem tangens HN cum ſubtenſa HPI conſtituit, menſura eſt dimidius arcus HI, & anguli ad centrum HOI menſura eſt arcus totus HI (ex natura circuli); unde NP ſeu $\frac{HM \times NI}{HI}$ eſt ad HN ſeu HI (*Lem.* 7. *lib.* 1.) ut $\frac{1}{2}$HI ad HO, & ideo radius oſculi $HO = \frac{HI^3}{2HM \times NI}$. Et quia (ex demonſt. prop. X.) $HI = o\sqrt{1+QQ}$, $HM = o$, ac $NI = Roo$; erit $HO = \frac{(1+QQ)^{\frac{3}{2}}}{2R}$. Sed angulus contactus & curvatura curvæ lineæ FHQ in H eſt ut radius oſculi HO inverſe (121. *lib.* 1.), id eſt, ut $\frac{2R}{(1+QQ)^{\frac{3}{2}}}$. Quare angulus ille, ſeu curvatura in H, datis ſecundo & tertio termino ſeriei in quam valor ordinatim applicatæ reſolvitur, determinabitur. 118.

(y) * *Si lineola illa I N &c.* (552. 553. *lib.* 1.).

(z) * *Terminus quartus determinat variationem curvaturæ.* Quoniam differentia lineolarum LH & NI quarto ſeriei termino proportionalis eſt (554) & per lineolam NI determinatur angulus contactus ſeu curvatura curvæ in puncto H (118) & per lineolam LH curvatura in puncto G; per harum linearum differentiam ſeu per quartum ſeriei terminum determinabitur differentia ſeu variatio curvaturæ, ductâque aliâ tangente ſimiliter determinabitur variatio variationis, & ſic deinceps.

(a) * *Seu* $\frac{n}{e}$. Eſt enim $1 + \frac{aa}{ee} = \frac{ee+aa}{ee} = \frac{nn}{ee}$.

hoc eſt (ob datam n) ut $\frac{a}{e}$, ſeu $\frac{AC}{CH}$, id eſt, (b) ut tangentis longitudo illa HT, quæ ad ſemidiametrum AF ipſi PQ normaliter inſiſtentem terminatur: & reſiſtentia erit ad gravitatem ut $3\,a$ ad $2\,n$, id eſt, ut $3\,AC$ ad circuli diametrum PQ: (c) velocitas autem erit ut $\sqrt{CH}$. Quare ſi cor-



pus juſtâ cum velocitate ſecundùm lineam ipſi PQ parallelam exeat de loco F, & medii denſitas in ſingulis locis H ſit ut longitudo tangentis HT, & reſiſtentia etiam in loco aliquo H ſit ad vim gravitatis ut $3\,AC$ ad PQ, corpus illud deſcribet circuli quadrantem FHQ. *Q.E.I.*

At

(b) * *Id eſt, ut tangentis longitudo illa HT &c.* Jungatur radius AH, & ob angulum rectum quem tangens TH cum radio AH conſtituit, parallelaſque AT, CH, triangulum AHC ſimile erit triangulo ATH, & inde eſt TH ad HA, ut AC ad HC, id eſt, $\frac{AC}{HC}$ eſt ut $\frac{HT}{AH}$, ſeu ut HT ob datum radium AH.

(c) * *Velocitas autem erit ut* $\sqrt{CH}$. Nam (ex demonſtr. prop. X.) velocitas eſt ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$, id eſt, ut $\sqrt{2e}$, vel $\sqrt{2CH}$ ideoque ut $\sqrt{CH}$.

119. Quoniam igitur velocitas eſt ut $\sqrt{CH}$, medii denſitas ut tangens HT, & reſiſtentia ut AC, (quia gravitas & circuli diameter PQ data ſunt) corpore perveniente ad punctum Q lineæ horizontalis, velocitas ejus nulla erit, medii denſitas infinita, reſiſtentia finita. Si verò ponatur CH negativa, ut corpus infra horizontalem PQ pergat; fiet velocitas ut $\sqrt{-CH}$, quantitas imaginaria; & ideo corpus non poteſt infra horizontalem PQ deſcendere. At dum corpus eſt in F, velocitas ejus eſt ut $\sqrt{AF}$, medii denſitas nulla, & reſiſtentia nulla.

At ſi corpus idem de loco P, ſecundum lineam ipſi PQ perpendicularem egrederetur, & in arcu ſemicirculi PFQ moveri inciperet, ſumenda eſſet AC ſeu a ad contrarias partes centri A, & propterea ſignum ejus mutandum eſſet & (d) ſcribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret medii denſitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem denſitatem, hoc eſt, quæ motus corporum accelerat, natura non admittit: & propterea naturaliter fieri non poteſt, ut corpus aſcendendo à P deſcribat circuli quadrantem PF. Ad hunc effectum deberet corpus à medio impellente accelerari, non à reſiſtente impediri.

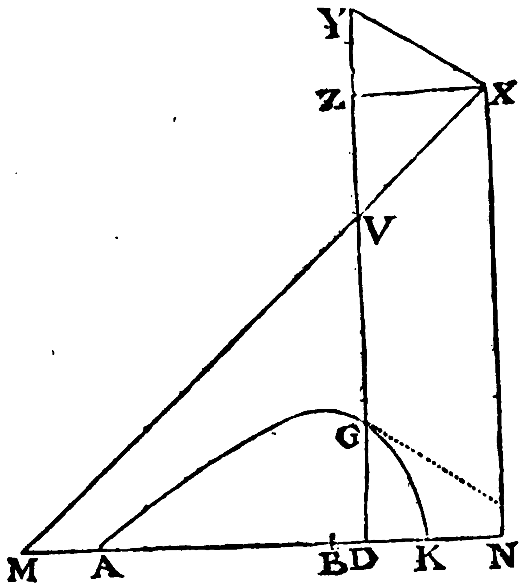
Exempl. 2. Sit linea PFQ parabola, axem habens AF horizonti PQ perpendicularem, & requiratur medii denſitas, quæ faciat ut projectile in ipſâ moveatur.

Ex

(d) * *Scribendum* $-a$ *pro* $+a$. Nam formula quæ denſitatem medii exponit, corporis aſcenſui, & deſcenſui communis eſt, ſicut & aliæ formulæ quæ reſiſtentiam & velocitatem exponunt (116); & idcirco ut quantitas quæ denſitatem medii corpore deſcendente exponit eamdem exponat pro corporis aſcenſu per eumdem vel ſimilem & æqualem arcum, ſubſtituendus eſt in illâ quantitate valor abſciſſæ, quæ corpore deſcendente hic poſitiva eſt, aſcendente negativa.

120. Atque hinc generatim colligitur eumdem curvæ arcum, vel ſimiles & æquales utrinque ab axe arcus, non poſſe aſcenſu & deſcenſu deſcribi in uno medio denſitatis utcumque variabilis, id eſt, ſi arcus unus aſcenſu deſcribi poteſt, deſcenſu deſcribi non poſſe, & contra. Nam ſi in ſolutione problematis hujuſce pro corporis deſcenſu per arcum F Q, origo abſciſſæ poſitivæ A C ſtatuatur in A, & pro C B, C D, C E ſcribantur $-o$, o, $2o$, erit reſiſtentia ut $\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$. Pro aſcenſu per eumdem arcum à Q ad F, abſciſſa eadem A C ſumenda erit negativè, cùmque ſit o abſciſſæ fluxio, loco C B, C D, C E ſcribendum erit o $-o$ $-2o$ in valoribus linearum M I, N I, D I, E K & B G; & abſoluto calculo, ut in eâdem pro deſcenſu ſolutione, reſiſtentia pro aſcenſu invenietur proportionalis quantitati $-\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$, quæ negativa eſt, ſi prior $+\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$, quæ pro deſcenſu erat, poſitiva ſit; & contra.

ſeriei terminus ſecundus $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ uſurpandus eſt pro Qo, tertius cum ſigno mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro Ro^2, & quartus cum ſigno



etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$ pro So^3, eorumque coefficientes $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ & $\frac{bb}{a^4}$ ſcribendæ ſunt in regula ſuperiore pro Q, R & S. Quo

hujus æquantur; id eſt, $c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a}$ eſt P, ſeu ordinata quæ per punctum B ad hyperbolam duceretur; $+\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ eſt $-Qo$, & ideo $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa} = -Q$; ſed quia in expreſſionibus reſiſtentiæ, denſitatis, & velocitatis ſemper reperitur quadratum QQ, quod idem manet, ſeu radix illius Q affirmativè ſumatur, ſeu negativè, nihili intereſt ſcribere $\frac{bb}{aa} - \frac{m}{n}$, aut $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$ pro Q. Secundus autem ſeriei terminus $\frac{-bb}{a^3}o^2$ eſt $-Ro^2$, & ideo, mutatis ſignis, fit $\frac{bb}{a^3} = R$; tertius terminus $\frac{-bb}{a^4}o^3$ eſt $-So^3$, atque proinde $\frac{bb}{a^4} = S$.

Quo facto prodit medii denſitas ut $\dfrac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}}$

ſeu (l) $\dfrac{1}{\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}}$ id (m) eſt ſi in VZ ſumatur VY æqualis VG, ut $\frac{1}{XY}$. Namque aa & $\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}$ ſunt ipſarum XZ & ZY quadrata. (n) Reſiſtentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet $3\,XY$ ad $2\,YG$; & (o) velocitas ea eſt, quâcum corpus in parabolâ pergeret verticem G, diametrum DG, & latus rectum $\frac{XY\ quad.}{VG}$ habente. Ponatur itaque quod medii denſitates in locis ſingulis G ſint reciprocè ut diſtantiæ XY, quodque reſiſtentia in loco aliquo G ſit ad gravitatem ut $3\,XY$ ad $2\,YG$; & corpus de loco A, juſtâ cum velocitate emiſſum, deſcribet hyperbolam illam AGK. *Q. E. I.*

Exempl.

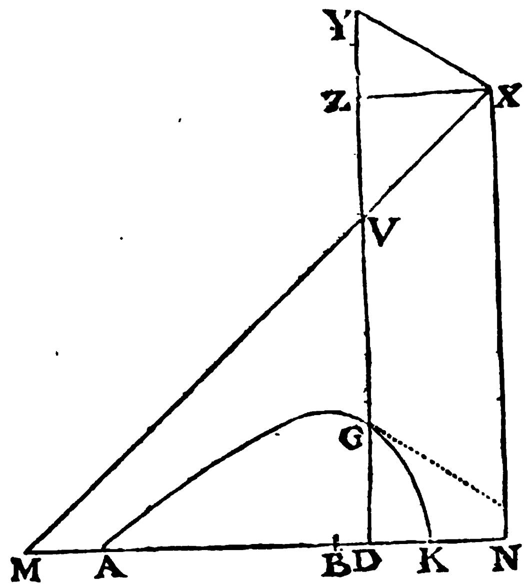
(l) * *Seu*, numeratore & denominatore in $\frac{a^4}{bb}$ ductis.

(m) * *Id eſt, ſi in V Z ſumatur &c.* Eſt enim $VG = \frac{bb}{a-o} = \frac{bb}{a}$, & $VZ = \frac{m}{n}\overline{a-o} = \frac{m}{n}a$, ubi evaneſcit BD, ſeu o. Quare $VY - VZ = ZY = \frac{bb}{a} - \frac{m}{n}a$; & quia $ZX = DN = a$, & $YX^2 = YZ^2 + ZX^2$ erit $YX^2 = aa + \frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}$; ideoque medii denſitas ut $\frac{1}{XY}$.

(n) * *Reſiſtentia autem &c.* Reſiſtentia eſt ad gravitatem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$, id eſt, ut $\frac{3bb}{a^4} \times \sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mb^2}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}$ ad $\frac{4b^4}{a^6}$, ſive 120 dividendo per $\frac{bb}{a^5}$, ut $3\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}$ ad $\frac{4bb}{a}$, ſeu ut $3\,XY$ ad $4\,VG = 2\,YG$.

(o) * *Et velocitas &c.* Hujus parabolæ latus rectum eſt $\frac{1+QQ}{R} = \dfrac{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}} = \dfrac{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}{\frac{bb}{a}} = \frac{YX^2}{VG}$. Velocitas autem eſt ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$ adeoque ut $\frac{YX}{\sqrt{VG}}$.

ſeriei terminus ſecundus $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ uſurpandus eſt pro Qo, tertius cum ſigno mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro Ro^2, & quartus cum ſigno



etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$ pro So^3; eorumque coefficientes $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ & $\frac{bb}{a^4}$ ſcribendæ ſunt in regula ſuperiore pro Q, R & S.

Quo

hujus æquantur; id eſt, $c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a}$ eſt P, ſeu ordinata quæ per punctum B ad hyperbolam duceretur; $+\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ eſt $-Qo$, & ideo $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa} = -Q$; ſed quia in expreſſionibus reſiſtentiæ, denſitatis, & velocitatis ſemper reperitur quadratum QQ, quod idem manet, ſeu radix illius Q affirmativè ſumatur; ſeu negativè, nihili intereſt ſcribere $\frac{bb}{aa} - \frac{m}{n}$, aut $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$ pro Q. Secundus autem ſeriei terminus $\frac{-bb}{a^3}o^2$ eſt $-Ro^2$, & ideo, mutatis ſignis, fit $\frac{bb}{a^3} = R$; tertius terminus $\frac{-bb}{a^4}o^3$ eſt $-So^3$, atque proinde $\frac{bb}{a^4} = S$.

Quo facto prodit medii denſitas ut $\dfrac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}}$ ſeu (l) $\dfrac{1}{\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}}$ id (m) eſt ſi in VZ ſumatur VY æqualis VG, ut $\frac{1}{XY}$. Namque aa & $\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}$ ſunt ipſarum XZ & ZY quadrata. (n) Reſiſtentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet $3\,XY$ ad $2\,YG$; & (o) velocitas ea eſt, quâcum corpus in parabolâ pergeret verticem G, diametrum DG, & latus rectum $\frac{XY\ quad.}{VG}$ habente. Ponatur itaque quod medii denſitates in locis ſingulis G ſint reciprocè ut diſtantiæ XY, quodque reſiſtentia in loco aliquo G ſit ad gravitatem ut $3\,XY$ ad $2\,YG$; & corpus de loco A, juſtâ cum velocitate emiſſum, deſcribet hyperbolam illam AGK. *Q. E. I.*

Exempl.

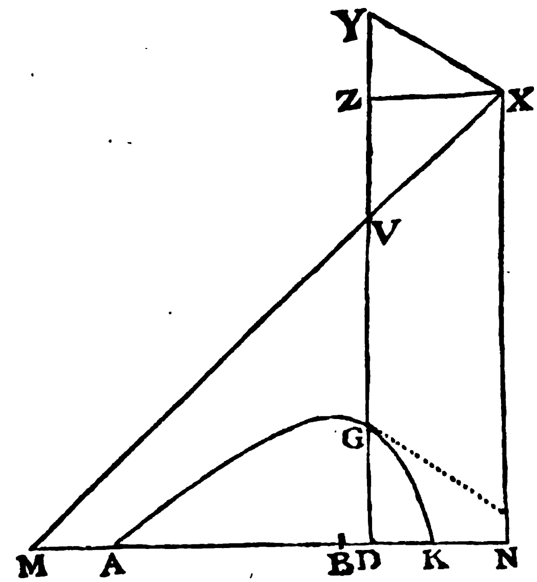
(l) * *Seu*, numeratore & denominatore in $\frac{a^4}{bb}$ ductis.

(m) * *Id eſt, ſi in V Z ſumatur &c.* Eſt enim $VG=\frac{bb}{a-o}=\frac{bb}{a}$, & $VZ=\frac{m}{n}\overline{a-o}=\frac{m}{n}a$, ubi evaneſcit BD, ſeu o. Quare $VY-VZ=ZY=\frac{bb}{a}-\frac{m}{n}a$; & quia $ZX=DN=a$, & $YX^2=YZ^2+ZX^2$ erit $YX^2=aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}$; ideoque medii denſitas ut $\frac{1}{XY}$.

(n) * *Reſiſtentia autem &c.* Reſiſtentia eſt ad gravitatem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$, id eſt, ut $\frac{3bb}{a^4}\times\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mb^2}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}$ ad $\frac{4b^4}{a^6}$, ſive dividendo per $\frac{bb}{a^5}$, ut $3\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}$ ad $\frac{4bb}{a}$, ſeu ut $3\,XY$ ad $4\,VG=2\,YG$. 110.

(o) * *Et velocitas &c.* Hujus parabolæ latus rectum eſt $\frac{1+QQ}{R}=\dfrac{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}}=\dfrac{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}{\frac{bb}{a}}=\frac{YX^2}{VG}$. Velocitas autem eſt ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$ adeoque ut $\frac{YX}{\sqrt{VG}}$.

XY. Sunt enim A^2 & $\frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$ (ſ) ipſarum XZ & ZY quadrata. Reſiſtentia autem in eo-



dem loco G (t) fit ad gravitatem ut $3S$ in $\frac{XY}{A}$ ad $4RR$, id eſt, ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$. Et velocitas ibidem ea ipſa eſt, quâcum corpus projectum in parabolâ pergeret, verticem

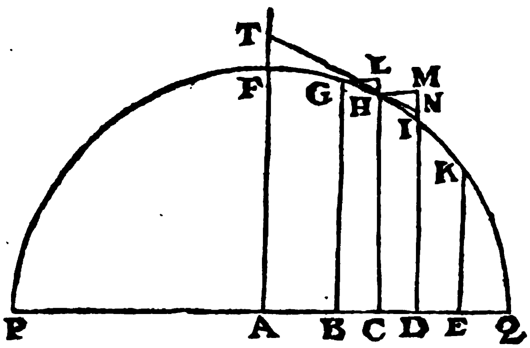
(ſ) * *Ipſarum XZ & ZY quadrata.* Nam $XZ = DN = A$ (hyp.), & $ZY = VY - VZ = n \times VG - \frac{d}{e}A = \frac{nbb}{A^n} - \frac{d}{e}A$; aut $ZY = VZ - VY = \frac{d}{e}A - \frac{nbb}{A^n}$, prout YV major vel minor eſt quam VZ. Quare cùm ſit $XY^2 = XZ^2 + ZY^2$, denſitas erit ut $\frac{1}{XY}$.

(t) * *Fit ad gravitatem ut &c.* Quoniam (ex dem.) $\frac{XY}{A} = \sqrt{1+QQ}$, erit $3S\sqrt{1+QQ} = \frac{3S \times XY}{A}$, & inde reſiſtentia ad gravitatem ut $\frac{3S \times XY}{A}$ ad $4RR$, vel ut XY ad $\frac{4RR \times A}{3S}$; ſed $4RR \times A = \frac{\overline{nn+n}^2 \times b^4}{A^{2n+1}}$, & $3S = \frac{\overline{nn+n} \times \overline{n+2}\, bb}{2A^{n+1}}$, ideoque $\frac{4RRA}{3S} = \frac{\overline{2nn+2n} \times bb}{\overline{n+2} \times A^n} = \frac{2nn+2n}{n+2} \times VG$,

cem G, diametrum GD & (u) latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ ſeu $\frac{2\,XY\ quad.}{nn+n \text{ in } VG}$ habente. *Q. E. I.*

Scholium.

Eâdem ratione quâ prodiit denſitas medii ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ in corollario primo, ſi reſiſtentia ponatur ut velocitatis V dignitas quælibet V^n, (x) prodibit denſitas medii ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \overline{\frac{AC}{HT}}\Big|^{n-1}$. Et (y) propterea ſi curva inveniri poteſt eâ lege, ut data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\overline{\frac{HT}{AC}}\Big|^{n-1}$, vel $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}\,|^{n-1}$: corpus movebitur in hâc curvâ in uniformi medio cum reſiſtentia quæ ſit ut velocitatis dignitas V^n. Sed redeamus ad curvas ſimpliciores. Quo-



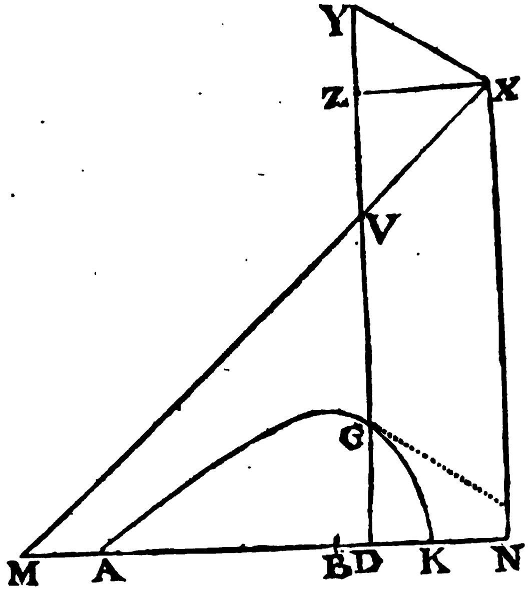
ob $VG = \frac{bb}{A^n}$. Quare reſiſtentia eſt ad gravitatem ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2} \times VG$.

(u) * *Et latus rectum &c.* Eſt enim $\frac{XY^2}{A^2} = 1+QQ$, & hinc $\frac{1+QQ}{R} = \frac{2\,XY^2 \times A^n}{nn+n \times bb} = \frac{2\,XY^2}{nn+n \times VG}$, ob $VG = \frac{bb}{A^n}$. Unde velocitas quæ eſt ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$, erit ut $\frac{YX}{\sqrt{VG}}$, ob datam numerum $\frac{2}{nn+n}$. 120.

(x) * *Prodibit denſitas medii ut &c.* (115).

(y) * *Et propterea &c.* Si enim fuerit $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$ in ratione a ad b, erit $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} = \frac{a}{b} \times \frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$, & $\frac{S \times AC^{n-1}}{R^{\frac{4-n}{2}} \times HT^{n-1}} = \frac{a}{b}$, id eſt denſi-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.



Quoniam motus non fit in parabolâ niſi in medio non reſiſtente, in hyperbolis verò hic deſcriptis fit per reſiſtentiam perpetuam; perſpicuum eſt quod linea, quam projectile in medio uniformiter reſiſtente deſcribit, propius (z) accedit ad hyperbolas haſce quàm ad parabolam. Eſt utique linea illa hyperbolici generis, ſed (a) quæ circa verticem magis diſtat ab aſymptotis; in partibus à vertice remotioribus propius ad ipſas accedit quàm pro ratione hyperbolarum quas hic deſcripſi. Tanta verò non eſt inter has & illam differentia, quin illius loco poſſint hæ in rebus practicis non incommodè adhiberi. Et utiliores forſan futuræ ſunt hæ, quàm hyperbola magis accurata & ſimul magis compoſita. Ipſæ verò in uſum ſic deducentur.

Com-

tas medii ut quantitas data $\frac{a}{b}$, & proinde uniformis. Eſt autem (*per cor.* 1. *prop.* X.) $\frac{HT}{AC} = \sqrt{\overline{1+QQ}}$: quare ſi data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$, data quoque erit ratio quadratorum $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}|^{n-1}$, & contra.

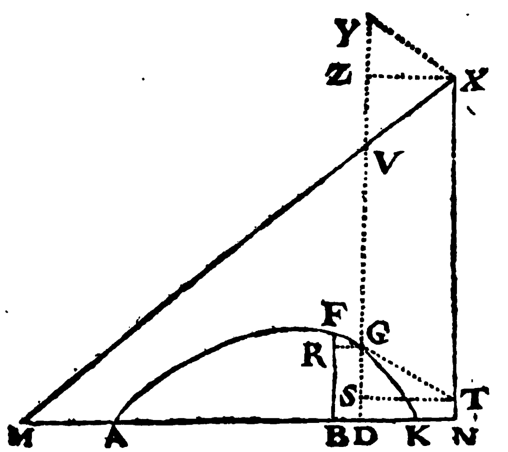
(z) * *Accedit ad hyperbolas haſce*, cum iis tamen perfectè convenire nunquam poteſt, quod in hiſce hyperbolis denſitas medii reciprocè proportionalis ſit rectæ variabili XY, & præterea non ſatis manifeſtum ſit curvam, quam projectile in medio uniformi deſcribit in hypotheſi reſiſtentiæ velocitatis quadrato proportionalis, habere aſymptotum verticalem ut XN: cùm præſertim in hâc reſiſtentiæ hypotheſi ſpatium motu horizontali inſito deſcriptum, ſemotâ gravitate, infinitum evadat (*per cor.* 1. *prop.* V). Verum tamen inveniri poſſunt hyperbolæ in quibus pro parte illâ exiguâ curvæ AGK, quæ in rebus practicis neceſſaria eſt, recta XY ſit quam proximè conſtans, & proindè medii denſitas quam proxime uniformis; quo ſit ut curvæ illæ in rebus practicis non incommodè adhiberi poſſint.

(a) * *Sed quæ circa verticem &c.* Hæc demonſtrabuntur infra in notâ *h*.

Compleatur parallelogrammum $XYGT$, & (b) recta GT tanget hyperbolam in G, ideoque denſitas medii in G, eſt reciprocè ut tangens GT, & velocitas ibidem ut $\surd \frac{GTq}{GV}$, reſiſtentia autem ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in GV.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

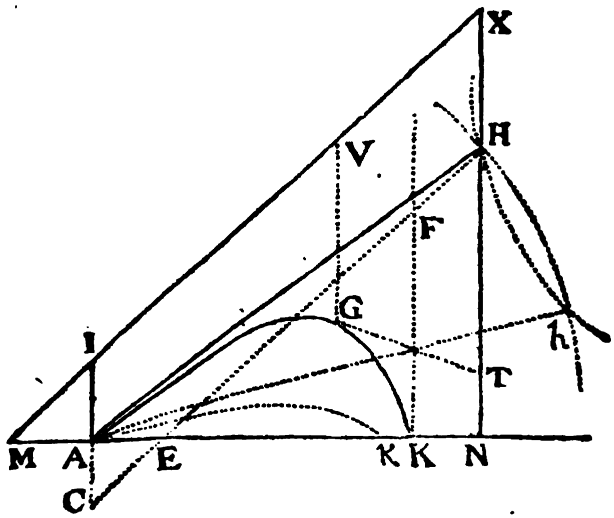
Proin-



(b) * *Et recta* G T *tanget hyperbolam in* G. Ex puncto G ad ordinatam B F per B ductam, & ex puncto T ad ordinatam D G demiſſa ſint perpendicula G R & T S, ſitque G T tangens in G. Erit F R ad R G ſeu B D, ut G S ad S T, ob triangula ſimilia F R G, G S T. Sed F R eſt $Q o$ ſeu $\frac{nbbO}{A^{n+1}} - \frac{d}{e}O$, B D eſt O, & S T = Z X = A. Quare erit $\frac{nbb}{A^{n+1}} - \frac{d}{e}$ ad 1, ſeu $\frac{nbb}{A^n} - \frac{d}{e}A$ ad A, ut G S ad Z X ſeu A. Supra invenimus Z Y $= \frac{nbb}{A^n} - \frac{d}{e}A$. Ergo Z Y = G S; & ideo tangens G T æqualis eſt & parallela rectæ Y X. Eſt autem (*ex demonſtr.*) denſitas medii in G reciprocè ut Y X: quare denſitas medii in G eſt reciprocè ut tangens G T, velocitas ibidem ut $\surd \frac{GT^2}{GV}$, & reſiſtentia ad gravitatem ut G T ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ G V. 120.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

Proinde ſi corpus de loco *A* ſecundùm rectam *A H* projectum deſcribat hyperbolam *A G K*, & *A H* producta occurrat aſymptoto *N X* in *H*, actaque *A I* eidem parallela occurrat alteri aſymptoto *M X* in *I*: erit (c) medii denſitas in *A* reciprocè



ut *A H*, & corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq}{AI}}$, ac reſiſtentia ibidem ad gravitatem ut *A H* ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in *A I*. Unde prodeunt ſequentes regulæ.

Reg. (d) 1. Si ſervetur tum medii denſitas in *A*, tum velocitas quâ-

(c) * *Erit medii denſitas &c.* Coincidente puncto G cum A, tangens G T cum tangente A H congruit, & recta V G cum A I, proindeque *medii denſitas in A eſt reciprocè ut A H, & corporis &c.*

(d) * *Reg.* 1. Manentibus indice hyperbolæ n & denſitate medii in A, manet tangentis longitudo A H quæ denſitati reciprocè proportionalis eſt. Manente velocitate quâcum corpus è loco A projicitur, manet linea $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$ quæ eſt ut velocitas; & ideo cùm data ſit A H, datur & A I. Ob parallelas G T, Y X, eſt $TX = GY = GV + VY = GV + n \times GV$ (*Exemp.* 4.), & quia coincidente puncto G cum A, fit $GV = AI$, & $TX = HX$; erit $HX = AI + n \times AI$. Quare ob datas quantitates A I & *n*, datur & H X. Unde ſi longitudines illæ A H, A I, & H X in aliquo caſu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo N A H expedite determinari poteſt. His enim datis, dantur puncta A, H & I. Per H ducatur

XHN

quâcum corpus projicitur, & mutetur angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX. Ideoque ſi longitudines illæ in aliquo caſu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo NAH expeditè determinari poteſt.

Reg. (e) 2. Si ſervetur tum angulus NAH, tum medii denſitas in A, & mutetur velocitas quâcum corpus projicitur; ſervabitur longitudo AH, & mutabitur AI in duplicatâ ratione velocitatis reciprocè.

Reg. (f) 3. Si tam angulus NAH, quàm corporis velocitas in A, gravitaſque acceleratrix ſervetur, & proportio reſiſtentiæ in A ad gravitatem motricem augeatur in ratione quâcunque; augebitur proportio AH ad AI in eâdem ratione, manente parabolæ prædictæ latere recto, eique proportionali longitudine $\frac{AHq}{AI}$: & propterea minuetur AH in eâdem ratione, & AI minuetur in ratione illâ duplicatâ. (g) Augetur verò proportio reſiſtentiæ ad pondus, ubi vel gravitas ſpecifica ſub

XHN recta horizontali AN Verticalis, & dabitur punctum N; & quia data eſt HX, dabitur etiam punctum X; datis verò punctis duobus X & I, dabitur recta XIM cum puncto M ubi horizontalem MN ſecat. Unde ductâ quâvis rectâ VD ad horizontalem AN normali, ſi in ea capiatur VG ad AI, ut eſt AN^n ad DN^n, vel ut XI^n ad XV^n, dabitur punctum G in trajectoria AGK. Eſt enim (*Exemplo* 4.) ordinata quævis VG ad alteram ordinatam IA, ut AN^n ad DN^n, ſeu ut XI^n ad XV^n.

(e) * *Reg.* 2. Servatâ medii denſitate in A, ſervabitur tangentis longitudo AH, quæ eſt ut denſitas inversè. Et quia velocitas in A eſt ut $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, & velocitatis quadratum ut $\frac{AH^2}{AI}$, id eſt, ut $\frac{1}{AI}$ ob datam AH; erit AI velocitatis quadrato reciprocè proportionalis.

(f) * *Reg.* 3. Datâ corporis velocitate & gravitate acceleratrice in A, datur longitudo $\frac{AH^2}{AI}$ tum velocitatis quadrato, tum lateri recto parabolæ (*Exemp.* 4.) proportionalis. Eſt autem reſiſtentia motrix, ſi ita loqui fas eſt, ad gravitatem motricem, ut AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2} \times AI$ (*Exemp.* 4.). Quare ſi proportio reſiſtentiæ motricis in A ad gravitatem motricem augeatur in ratione quacumque, augebitur proportio AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ AI, ſeu, ob datum numerum $\frac{2nn+2n}{n+2}$ augebitur proportio AH ad AI in eâdem ratione; & quia longitudo $\frac{AH^2}{AI}$ conſtans eſt, ac proinde $\frac{AH}{AI}$ eſt ut $\frac{1}{AH}$, & AI ut AH^2, neceſſum eſt ut AH minuatur in ratione quâ augetur $\frac{AH}{AI}$, & ut AI minuatur in ratione illâ duplicatâ. 120.

(g) 121. * *Augetur verò proportio reſiſtentiæ ad pondus &c.* Corpus ſpecificè gravius vel levius dicitur, quod ſub æquali

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. II. Prop. X. Probl. III.

ſub æquali magnitudine fit minor, vel medii denſitas major, vel reſiſtentia, ex magnitudine diminutâ diminuitur in minore ratione quàm pondus.

Reg. (h) 4. Quoniam denſitas medii prope verticem hyperbolæ major eſt quàm in loco A; ut habeatur denſitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium HT ad tangentem AH inveniri, & denſitas in A augeri in ratione paulo ma-

li volumine majus vel minus pondus habet quàm alterum corpus quocum comparatur; & ideo gravitas ſpecifica corporis, volumine dato, eſt ut ipſius pondus abſolutum, id eſt, datâ gravitate acceleratrice, ut corporis maſſa (*per defin.* 7. *&* *not.* 3. *lib.* 1.). At, dato volumine, maſſa eſt ut denſitas (2. *lib.* 1.); quare gravitas ſpecifica corporis eſt ipſius denſitati proportionalis. Augetur itaque proportio reſiſtentiæ ad gravitatem motricem ſeu ad corporis pondus, tum ubi manentibus corporis volumine, figurâ & velocitate ac medii denſitate, manenteque proinde reſiſtentiâ, gravitas ſpecifica fit minor; tum ubi, cœteris paribus, medii denſitas augetur, quo caſu medii reſiſtentia creſcit cum denſitate, & corporis pondus in fluido denſiori & ſpecificè graviori magis ſublevati minuitur; tum ubi reſiſtentia ex magnitudine corporis diminutâ, diminuitur in minori ratione quàm pondus. Ex quibus liquet tertiam regulam determinandis motibus corporum variæ magnitudinis & denſitatis accommodatam eſſe.

122. *Lemma.* Datâ curvâ A G K, invenire minimam tangentium G T. Quoniam (ex dem. in Exemp. 4.) $XY^2 = GT^2 = A^2 + \frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eB^{n-1}} + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$; hujus quantitatis, in quâ ſi detur curva A G K, ſola eſt variabilis A, fluxio ponenda eſt nihilo æqualis (48). Brevitatis causâ dicantur $1 + \frac{dd}{ee} = f$, $\frac{2dnbb}{e} = 2g$, $nnb^4 = h$, & $A = x$; erit $GT^2 = fxx - 2gx^{1-n} + hx^{-2n}$; & ſumptis fluxionibus, $o = 2fxdx + \overline{n-1} \times 2gx^{-n}dx - 2nhx^{-2n-1}dx$. Dividatur æquatio tota per $2xdx$, & fiet $o = f + \overline{n-1}\,gx^{-n-1} - nhx^{-2n-2}$; & multiplicando per x^{2n+2}, $fx^{2n+2} + \overline{n-1}\,gx^{n+1} = nh$, unde eruitur, ut fit in reſolutione æquationum ſecundi gradus,

$$x^{n+1} = \sqrt{\frac{(n-1)^2gg + 4nhf} {}} \frac{- (n-1)g}{2f},$$

$$x^{n+1} = \frac{\sqrt{(n-1)^2gg + 4nhf} - (n-1)g}{2f},$$

& hinc habetur

$$x = \left(\frac{\sqrt{(n-1)^2gg + 4nhf} - (n-1)g}{2f}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

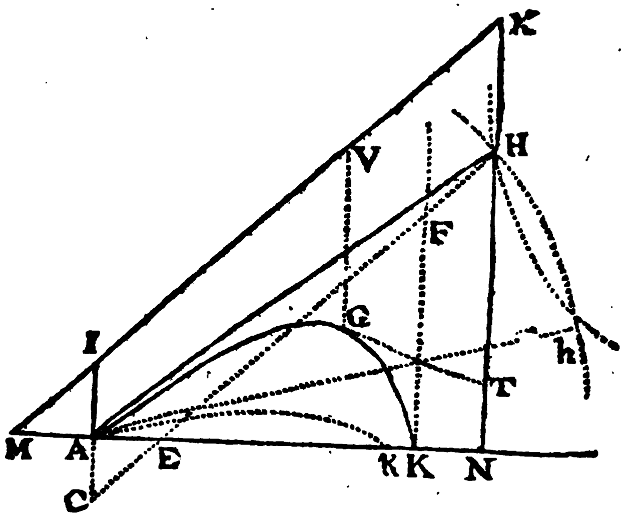
Quare ſi loco x ſubſtituatur, hic ipſius valor in æquatione $GT = \sqrt{fxx - 2gx^{1-n} + hx^{-2n}}$, obtinebitur minima tangentium. Q. E. I.

123. *Cor.* Si curva A G K ſit hyperbola conica, erit index $n = 1$, & ideo $n - 1 = o$, & $x = \sqrt[4]{\frac{h}{f}}$. Unde invenitur $GT^2 = f\sqrt[2]{\frac{h}{f}} - 2g + \frac{h}{\sqrt{\frac{h}{f}}} = 2\sqrt[2]{hf} - 2g = \frac{2bb}{e}\sqrt{ee + dd} - \frac{2dbb}{e} = 2bb \times \frac{[\sqrt{ee + dd} - d]}{e}$. Quia vero (*Exemp.* 4.) $d : e = VZ : XZ = XN : MN$, ac proinde $dd : ee = XN^2 : MN^2$, & componendo $dd + ee : ee = XN^2 + MN^2$, ſeu $MX^2 : MN^2$, atque adeo $\frac{\sqrt{ee + dd}}{e} = \frac{MX}{MN}$, & $\frac{d}{e} = \frac{XN}{MN}$; erit $\frac{\sqrt{ee + dd} - d}{e} = \frac{MX - XN}{MN}$. Præterea (*Exemp.* 4.) eſt $VG = \frac{bb}{DN}$, $AI = \frac{bb}{AN}$, & hinc $2AI \times AN = 2bb$. Erit igitur minimæ tangentium quadratum $GT^2 = \frac{2AI \times AN}{MN} \times \overline{MX - XN}$.

(h) * *Reg.* 4. Quoniam denſitas in loco quovis G eſt reciprocè ut tangens G T, quæ prope verticem hyperbolæ minor eſt quàm in loco A; manifeſtum eſt denſitatem medii prope verticem hyperbolæ majorem eſſe quàm in loco A. Denſitas

jore quàm ſemiſummæ harum tangentium ad minimam tangentium GT.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.



(i) *Reg.* 5. Si dantur longitudines AH, AI, & deſcribenda

ſitas in loco A dicatur K, in loco G per quem ducitur tangentium minima G T, dicatur B; & erit $K : B = GT : AH$, & hinc $K+B : K = GT+AH : GT$, & $\frac{K+B}{2} : K = \frac{GT+AH}{2} : GT$. Eſſet autem $\frac{K+B}{2}$ denſitas mediocris, ſi tangens A H foret omnium maxima, ſicuti G T (hyp.) eſt omnium minima; & ideo, ut medii denſitas ferè tanquam uniformis haberi poſſet, augenda eſſet denſitas in A in ratione ſemiſummæ tangentium $\frac{GT+AH}{2}$ ad minimam tangentium G T. Verùm quia tangens A H non eſt omnium maxima; ſed tangentes aliæ ad partes curvæ verſus K ductæ majores ſunt; denſitas in A augenda eſt in ratione paulo majore quàm ſemiſummæ $\frac{GT+AH}{2}$ ad G T, ut medium tanquam uniforme ferè cenſeatur. Atque hoc pacto errores oriundi ex eo quod medium in loco A denſius ſupponatur, corrigentur ferè aliis erroribus qui naſcuntur ex eo quod in G medium rarius fingatur 123.
quam pro ratione curvæ A G K.

Interim liquet veram trajectoriam quam corpus in medio uniformi deſcribit, circa verticem magis diſtare ab aſymptotis, & in partibus à vertice remotioribus propius ad ipſas accedere quàm pro ratione hyperbolarum in medio non uniformi deſcriptarum. Nam ſi e loco A, cum velocitate $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, & directione A H projiciatur corpus in medio cujus denſitas uniformis æqualis ſit denſitati mediocri medii in quo deſcribitur hyperbola A G K; ob majorem medii uniformis denſitatem in A, qua corporis velocitas impreſſa magis minuitur, trajectoria intra hyperbolam continebitur, adeoque prope verticem ab aſymptotis magis diſtabit; & quia prope verticem eſt magis depreſſa, in partibus verſus K à vertice remotioribus ad aſymptotum N X propius accedet quàm hyperbola A G K; cum præſertim in medio uniformi ſpatium motu horizontali deſcriptum, ſemotâ gravitate, infinitum evadat (*per cor.* 1. *prop. V.*

(i) * *Reg.* 5. Si dentur longitudines

da ſit figura *AGK*: produc *HN* ad *X*, ut ſit *HX* ad *AI* ut $n+1$ ad 1, centroque *X* & aſymptotis *MX*, *NX* per punctum *A* deſcribatur hyperbola, eâ lege, ut ſit *AI* ad quamvis *VG* ut XV^n ad XI^n.

Reg. (k) 6. Quò major eſt numerus *n*, eò magis accuratæ ſunt hæ hyperbolæ in aſcenſu corporis ab *A*, & minus accuratæ in ejus deſcenſu ad *K*; & contra. Hyperbola conica mediocrem rationem tenet, eſtque cæteris ſimplicior. Igitur ſi hyperbola ſit hujus generis, & punctum *K*, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis *AN* per punctum *A* tranſeuntem, quæratur: occurrat producta *AN* aſymptotis *MX*, *NX* in *M* & *N*, & ſumatur *NK* ipſi *AM* æqualis.

Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc hyperbolam ex phænomenis. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia, eâdem velocitate, in angulis diverſis *HAK*, *hAk*, inci-

AH, AI cum angulo HAN, & deſcribenda ſit figura AGK: ex puncto H ad horizontalem AN demitte perpendiculum HN; produc HN ad X, ut ſit HX æqualis facto ſub $n+1$ & AI (demonſtravimus enim in notâ ad reg. 1. eſſe HX æqualem facto $\overline{n+1} \times AI$) centroque X & aſymptotis MX, NX per punctum A deſcribatur hyperbola, eâ lege. ut ſit AI ad quamvis VG ut XV^n ad XI^n: eſt enim (*per hyp. Exemp.* 4.) VG ad AI, ut AN^n ad DN^n, ſeu ut XI^n ad XV^n.

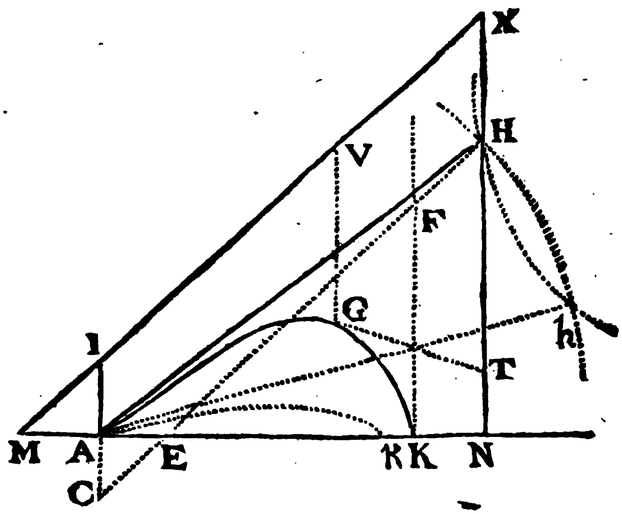
(k) * *Reg.* 6. Quo major eſt numerus *n*, eo magis hæ hyperbolæ in aſcenſu corporis ab A accedunt ad trajectorias in medio uniformi deſcriptas, & eo minus in deſcenſu ad K accuratæ ſunt; & contrà. Nam quò major eſt numerus *n*, eò minus tangens GT, quæ denſitati reciprocè proportionalis eſt, in aſcenſu corporis ab A variatur; & eo magis in deſcenſu ad K mutatur, quippe data ſit medii denſitas in A cum angulo projectionis HAN, & quantitas $\frac{n+2}{AH}$ denſitati in A (*Exemp.* 4.) proportionalis, data erit, ideoque tangens AH eo longior erit quò major fuerit numerus *n*; & quia dato angulo HAN, datur ſpecie triangulum rectangulum HNA, ratioque proinde laterum AH, AN, HN etiam datur, liquet quod creſcente AH aut numero *n*, creſcant quoque latera AN & HN. Ex demonſtratis in Exemplo 4°. corpore aſcendente tangentis GT quadratum $GT^2 = DN^2 + [ZV - nVG]^2$, & corpore deſcendente eſt $GT^2 = DN^2 + [nVG - ZV]^2$. Ex natura hyperbolæ AGK, eſt $DN^n : AN^n = AI : VG$, ideoque $nVG = \frac{nAI \times AN^n}{DN^n}$. Ex demonſtratione regulæ 1æ, $HX = \overline{n+1} \times AI$, & proinde $NX = HN + \overline{n+1} \times AI$, & $NX - AI = HN + nAI$. Sed ob triangula XZV, MNX, MAI ſimilia, ZX ſeu DN eſt ad ZV, ut MN ad NX, & ut MA ad AI, & diviſim DN eſt ad ZV, ut AN ad NX − AI ſeu HN + *n*AI; unde fit $ZV = \frac{DN \times HN + nAI \times DN}{AN}$.

Quarè in corporis aſcenſu $GT^2 = DN^2 + \left(\frac{DN \times HN + nAI \times DN}{AN} \; \frac{nAI \times AN^n}{DN^n}\right)^2$

&

ncidantque in planum horizontis in *K* & *k*; & notetur proportio *AK* ad *Ak*. Sit ea *d* ad *e*. Tum erecto cujuſvis lon-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.



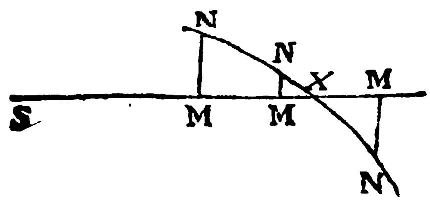
gitudinis perpendiculo *AI*, aſſume utcunque longitudinem *AH* vel *Ah*, & (¹) inde collige graphicè longitudines *AK*; *Ak*,

& in deſcenſu $GT^2 = DN^2 + \left(\frac{nAI\times AN^n}{DN^n} - \frac{DN\times HN + nAI\times DN}{AN}\right)^2$.
Jam verò ſi numerus *n* ſatis magnus fuerit, lineæ AH, AN, HN tam in aſcenſu quam in deſcenſu corporis longiores ſunt, & in aſcenſu ab A eſt fere DN æqualis AN, in deſcenſu verò DN quantum libet minor ipsâ AN. Unde in aſcenſu ab A eſt fere $\frac{nAI\times DN}{AN} = nAI$ & ideo $GT^2 = DN^2 + \left(\frac{DN\times HN}{AN}\right)^2 = DN^2 + HN^2$ ferè. Eſt autem $AH^2 = AN^2 + HN^2$: quare ratio GT ad AH in aſcenſu corporis ab A eſt fere æqualitatis, dum numerus *n* ſatis magnus ſupponitur, ac proinde non multum variatur denſitas: In deſcenſu verò ad K, fit DN quantumlibet exigua reſpectu datæ AN, & ideo quantitas $\frac{nAI\times AN^n}{DN^n}$ vehementer creſcit, & hinc tangens GT multum variatur ubi numerus *n* magnus eſt. Contra fit, ſi numerus ille fit admodum exiguus. Porro cùm numerus *n* poſſit eſſe quilibet integer vel fractus, & in hyperbola conica ſit *n* æqualis unitati, quæ veluti medium locum tenet inter numeros omnes integros & fractos, ſatis manifeſtum eſt hyperbolam conicam inter ſuperiores omnes & inferiores hyperbolas mediocrem rationem tenere, & quia etiam cæteris ſimplicior eſt, poſſe loco veræ trajectoriæ in medio uniformiter denſo adhiberi. Si igitur hyperbola AGK ſit hujus generis, & punctum K, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis AN, horizontalem vel horizonti obliquam, per punctum A tranſeuntem, quæratur: occurrat producta AN aſymptotis MX, NX, in M & N, & ſumatur NK ipſi AM æqualis, & habebitur punctum K (per theor. 1. de conicis).

125.

(I) * *Et inde collige graphicè &c.* Datâ enim tangente AH, tum magnitudine tum poſitione, datur verticalis HN cum

Ak; per reg. 6. Si ratio *AK* ad *A k* ſit eadem cum ratione *d* ad *e*, (m) longitudo *AH* rectè aſſumpta fuit. Sin minus cape in rectâ infinitâ *SM* longitudinem *SM* æqualem aſſumptæ *AH*, & erige perpendiculum *MN* æquale rationum differentiæ $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex aſſumptis pluribus longitudinibus *A H* invenienda ſunt plura puncta *N*, & per omnia agenda (n) curva linea regularis *NNXN*, ſecans rectam *SMMM* in *X*. Aſſumatur demum *A H* æqualis abſciſſæ *SX*, & inde denuo inveniatur longitudo *AK*; & longitudines, quæ ſint ad aſſumptam longitudinem *AI* & hanc ultimam *A H*, ut longitudo *A K* per experimentum cognita ad ultimo inventam longitudinem *AK*, erunt veræ illæ longitudi-

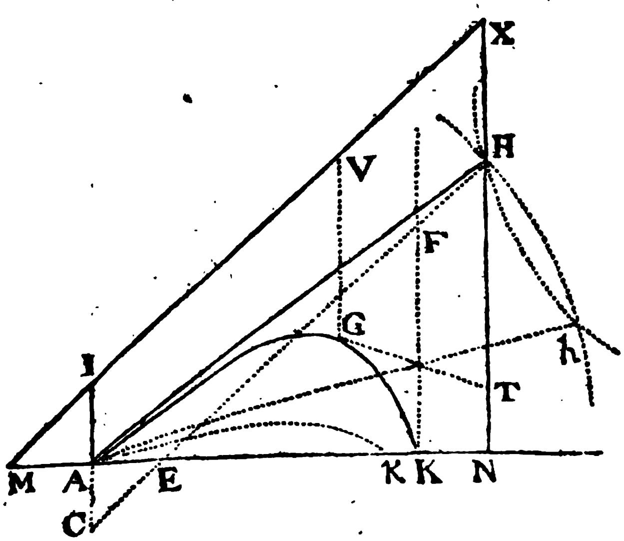


cum puncto N; & quia aſſumitur etiam A I, & eſt H X = 2 A I (per dem. reg. 1^æ.) ob *n* = 1; dabitur hyperbolæ centrum X, & inde ob datum punctum I dabitur aſymptotus altera X I M cum puncto M in horizontali M N; & capiendo N K æqualem datæ M A, dabitur punctum K, & hinc longitudo A K obtinebitur. Eodemque modo invenietur altera longitudo A k.

(m) * *Longitudo A H rectè aſſumpta fuit.* Datâ medii denſitate in A cum velocitate corporis ſub diverſis angulis H A K, h A k projecti, manet perpendiculum A I, & tangens A H æqualis eſt tangenti A h (*per regulam* 1^am). Datis tangente A H, angulo H A K & perpendiculo A I, hyperbola A G K deſcribi poteſt (*per reg.* 6^am. *& notam præced.*) & ideo data eſt tum ſpecie, tum magnitudine. Unde ſi dentur tantum angulus H A K & ratio tangentis H A ad A I, hyperbola A G K ſpecie tantum dabitur, id eſt, omnes hyperbolæ, quæ ex his duobus datis deſcribentur, ſimiles erunt. Quare ſi in hyperbolâ A G K, quæ in chartâ deſcripta ſupponitur, tangens aſſumpta A H ſit ad perpendiculum A I, ut tangens hyperbolæ quam corpus ſub angulo æquali H A K projectum in medio reſiſtente deſcribit, eſt ad ſuum perpendiculum A I; hyperbola A G K in charta deſcripta ſimilis erit hyperbolæ quæ in medio reſiſtente deſcribitur. Et eodem argumento altera hyperbola, cujus eſt amplitudo A k, & tangens A h, manente perpendiculo A I, ſimilis erit hyperbolæ illi quam corpus ſub angulo æquali h A k, projectum in ſecundo experimento deſcribit. Quâ propter, ob figurarum in chartâ & in medio reſiſtente deſcriptarum ſimilitudinem, amplitudines A K, A k erunt inter ſe ut homologæ amplitudines hyperbolarum quæ in experimentis deſcriptæ ſunt, id eſt, A K : A k = d : e.

(n) * *Curva regularis.* Vide notam 75. lib. hujus.

tudines *AI* & *AH*, (o) quas invenite oportuit. Hiſce verò datis dabitur & reſiſtentia medii in loco *A*, (p) quippe quæ ſit ad vim gravitatis ut *AH* ad $\frac{4}{3}$ *AI*. Augenda eſt autem den-



ſitas medii per reg. 4. & reſiſtentia modo inventa, ſi (q) in eâdem ratione augeatur, fiet accuratior.

Reg. 8. Inventis (r) longitudinibus *AH*, *HX*; ſi jam deſide-

(o) * *Quas invenire oportuit.* Cùm enim abſciſſa S M longitudini aſſumptæ A H æqualis ſit, & rationum differentia $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ exponatur per ordinatam M N; ubi ſit S M = S X & proinde M N = o, eſt etiam $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e} = o$, & ideo $\frac{AK}{Ak} = \frac{d}{e}$, atque S X æqualis veræ longitudini aſſumendæ A H (*per not. præced.*). Si itaque ex datis perpendiculo A I & verâ longitudine inventâ A H cum angulo H A N quæratur, ut ſupra, longitudo A K; ob ſimilitudinem figurarum in medio reſiſtente & in charta deſcriptarum, erit longitudo A K experimento cognita ad longitudinem A K ultimo inventam in charta, ut longitudo A H in medio reſiſtente ad longitudinem A H in chartâ ductam, atque etiam ut perpendiculum A I in medio reſiſtente ad perpendiculum A I in charta aſſumptum. Quibus inventis, deſcribi poterit hyperbola ſimilis & æqualis hyperbolæ, quam corpus in medio reſiſtente deſcripſit. 123.

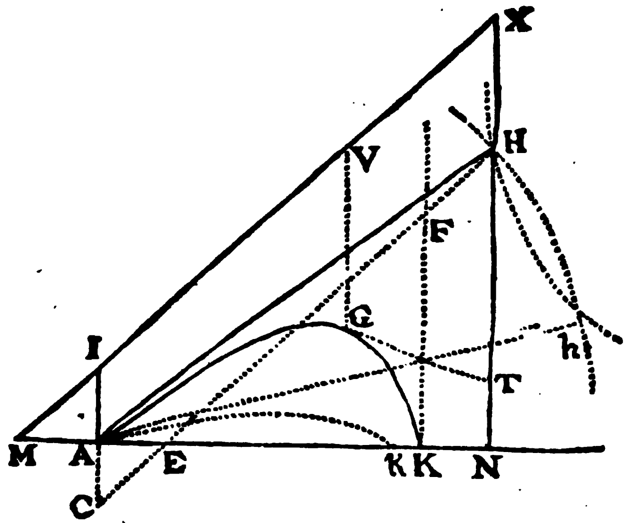
(p) * *Quippe quæ ſit ad vim gravitatis &c.* Ex demonſtratis in hoc ſcholio ante regulam 1am. reſiſtentia eſt ad gravitatem ut A H ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ A I, hoc eſt, ut A H ad $\frac{4}{3}$ A I, ob $n = 1$ (per hyp.).

(q) * *Si in eadem ratione augeatur.* Nam datâ velocitate, reſiſtentia eſt ut medii denſitas.

(r) * *Inventis longitudinibus AH, HX &c.* Inventis enim (*per reg.* 7.) lineis A I & A H, datur linea H X, ut pote quæ æqualis eſt 2 A I, ob $n = 1$, (*reg.* 5.).

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. II. Prop. X. Probl. III.

ſideretur poſitio rectæ *AH*, ſecundum quam projectile, datâ illâ cum velocitate emiſſum incidit in punctum quodvis *K*: ad puncta *A* & *K* erigantur rectæ *A C*, *K F* horizonti perpendiculares, quarum *AC* deorſum tendat, & æquetur ipſi *A I* ſeu $\frac{1}{2}$ *HX*. Aſymptotis *A K*, *K F* (ſ) deſcribatur hyperbola, cujus conjugata tranſeat per punctum *C*, centroque *A* & intervallo



A H deſcribatur circulus ſecans hyperbolam illam in puncto *H*; & projectile ſecundum rectam *A H* emiſſum incidet in punctum *K*. *Q.E.I.* Nam punctum *H*, (t) ob datam longitudinem *A H*, locatur alicubi in circulo deſcripto. Agatur *C H* occurrens ipſis *AK* & *K F*, illi in *E*, huic in *F*; & (u) ob parallelas *C H*, *M X* & æquales *A C*, *AI*, erit *A E* æqualis

(ſ)* *Deſcribatur hyperbola* (346. lib. 1.)

(t) * *Ob datam longitudinem A H*, per reg. 1am.

(u)* *Et ob parallelas C H, M X &c.* Nam ſi ſupponamus H eſſe punctum quæſitum, per quod ducenda eſt recta A H, erit (*per conſtr.*) H X æqualis & parallela I C, & ideo C H parallela I X ſeu M X, ac triangula C A E, I A M ſimilia, proindeque cum ſit C A = A I (*per conſtr.*) erit etiam A E = M A = K N, (*per theor.* 1. *de Conicis*). Sed ob triangula ſimilia C A E, H N E, & ob parallelas K F, N H, eſt C E : A E = E H : E N = F H : K N. Cum igitur ſit A E = K N, erit quoque C E = F H; ac proinde incidit punctum H in hyperbolam (*per theor.* 1. *de hyp.*)

lis AM, & propterea etiam æqualis KN. Sed CE eſt ad AE ut FH ad KN, & propterea CE & FH æquantur. Incidit ergo punctum H in hyperbolam aſymptotis AK, KF deſcriptam, cujus conjugata tranſit per punctum C, atque ideo reperitur in communi interſectione hyperbolæ hujus & circuli deſcripti. *Q.E.D.* Notandum eſt autem, quòd hæc operatio perinde ſe habet, ſive recta AKN horizonti parallela ſit, ſive ad horizontem in (x) angulo quovis inclinata: (y) quodque

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

(x) * *In angulo quovis inclinata.* Demonſtratio enim lineam M A K N per puncta data A & K ductam horizonti parallelam eſſe minime ſupponit, eademque prorſus manet ſi linea illa ad horizontem inclinata fuerit.

(y) * *Quodque ex duabus interſectionibus.* Quoniam punctum H per interſectionem circuli cum hyperbola determinatur (*ex dem.*), & circulus hyperbolam in duobus punctis interſecare poteſt, ex duabus interſectionibus H, h duo prodeunt anguli, ſeu duæ ſunt poſitiones tangentis A H ſecundum quam projectile datâ velocitate emiſſum incidit in punctum K.

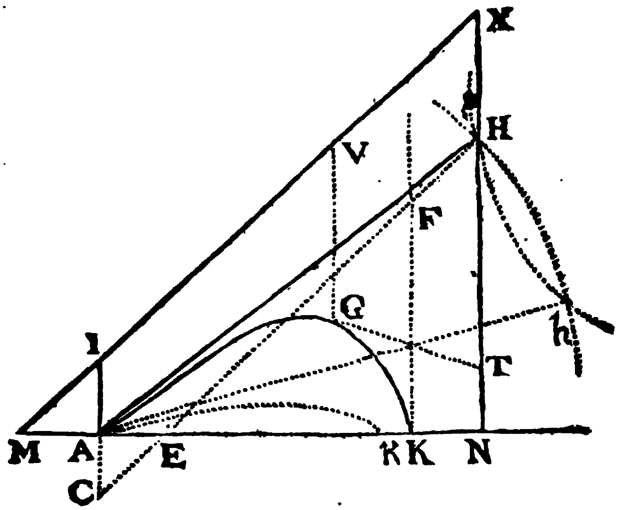
124. *Problema.* Inventis longitudinibus A I & A H, maximam altitudinem G D, ad quam corpus ſub angulo dato H A N projectum pertingere poteſt, definire.

Sit, ut in exemplo 3°. (*vid. fig. pag. 93.*) B N $= a$, B D $= o$, N X $= c$, ratio data V Z ad Z X, ſeu A I ad A M $= \frac{m}{n}$, V G $= \frac{bb}{a}$, ideoque A I $= \frac{bb}{AN}$, & $bb =$ A I $\times$ A N. Et erit (*Exemp.* 3°.) G D $= c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a} + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ &c.; & $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{a}o = Qo$. Eſt autem Qo ut ordinatæ G D fluxio, quæ, ut habeatur ordinata omnium maxima, nihilo æquanda eſt (48): quare erit $\frac{m}{n} = \frac{bb}{aa}$, & $aa = \frac{nbb}{m}$, ſive $DN^2 = \frac{AM \times AI \times AN}{AI} = AN \times AM$. Si ergo capiatur D N media proportionalis inter A N & A M, ducaturque per D ordinata G D, hæc erit omnium maxima. Quoniam verò $\frac{m}{n} = \frac{bb}{aa}$ & proinde $\frac{m}{n}a = \frac{bb}{a}$, erit maxima ordinata G D ſeu $c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a} = c - \frac{2bb}{a} = NX - \frac{2AI \times NA}{DN}$. 124.

Quare G D ordinata maxima æqualis eſt differentiæ inter verticalem N X & quartam proportionalem ad D N, A N & 2 A I. Q. E. I.

125. *Problema.* Datis longitudinibus A I & A H, angulum projectionis H A N maximæ omnium amplitudini A K convenientem invenire. Dicantur A H $= a$, A I $= b$, H X $= 2$ A I $= 2b$, A K $= e$, A N $= x$, H N $= y$, & erit $x - e =$ K N $=$ M A $=$ A E, ac $b =$ A I $=$ A C (*per reg.* 8), proindeque E N $=$ A K $= e$. Triangula ſimilia E A C, E N H hanc proportionem ſuppeditant, A E $(x - e)$: E N (e) = A C (b) : H N (y), & componendo $x : e = b + y : y$, unde habetur $e = \frac{xy}{b+y}$, $x = \frac{be + ey}{y}$, & $xx = ee\frac{[b+y]^2}{yy}$. Eſt etiam, ob angulum A N H rectum, $aa - yy = xx = ee\frac{[b+y]^2}{yy}$, & hinc $aayy - y^4 = ee[b+y]^2$. Capiatur hujus æquationis fluxio, & amplitudinis maximæ e fluxione nihilo æquatâ (48), erit illa $2a^2y\,dy - 4y^3\,dy = 2ee[b+y]\,dy$, &, dividendo per $2\,dy$, $aay - 2y^3 = ee[b+y]$. Erat autem $e = \frac{xy}{b+y}$, & ideo $ee = \frac{xxyy}{[b+y]^2}$

que ex duabus interſectionibus *H*, *h* duo prodeunt anguli *NAH*, *NAh*; & quod in praxi mechanicâ ſufficit circulum ſemel deſcribere, deinde regulam interminatam *CH* ita applicare ad



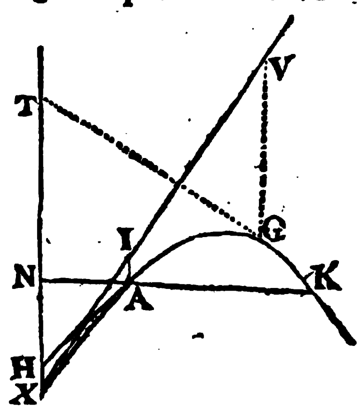
punctum *C*, ut ejus pars *FH*, circulo & rectæ *FK* interjecta, æqualis ſit ejus parti *CE* inter punctum *C* & rectam *AK* ſitæ.

Quæ

$= \frac{aayy - y^4}{[b+y]^2}$, ac proinde $ee(b+y) = \frac{aayy - y^4}{b+y}$. Quare erit $aay - 2y^3 = \frac{aayy - y^4}{b+y}$, ſive $aaby + aay^2 - 2by^3 - 2y^4 = aay^2 - y^4$, unde, reductione factâ & diviſis terminis per y, eruitur $aab = 2byy + y^3$. Hâc igitur æquatione reſolutâ, invenitur y ſeu HN ſinus anguli HAN; exiſtente ſinu toto AH. Q. E. D.

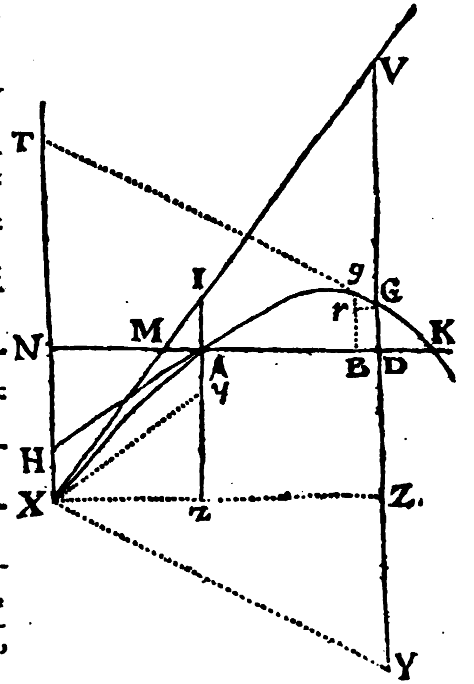
126. *Cor.* Manifeſtum eſt in æquatione $aab = 2byy + y^3$, quantitatem $2byy$ minorem eſſe quantitate aab, & proinde quadratum yy, ſeu HM^2, minus dimidio quadrato $\frac{1}{2}aa$ vel $\frac{1}{2}AH^2$; unde ſequitur angulum quæſitum HAN ſemirecto minorem eſſe, qui, ſi medium non reſiſteret, foret ſemirectus. Sit medii denſitas, adeoque & reſiſtentia, admodum parva, & erit ferè $y = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, atque $aab = 2byy + ayy\sqrt{\frac{1}{2}}$, & hinc $yy = \frac{aab}{2b + a\sqrt{\frac{1}{2}}}$, ac $y = a\sqrt{\frac{b}{2b + a\sqrt{\frac{1}{2}}}}$, quàm proximè.

Quæ de hyperbolis dicta ſunt facilè applicantur ad parabolas. Nam ſi *XAGK* parabolam deſignet quam recta *XV* tangat in vertice *X*, ſintque ordinatim applicatæ *IA*, *VG* ut quælibet abſciſſarum *XI*, *XV* dignitates XI^n, XV^n; agantur *XT*, *GT*, *AH*; quarum *XT* parallela ſit *VG* & *GT*, *AH* parabolam tangant in *G* & *A*: & corpus de loco quovis *A*, ſecundum rectam *AH* productam, juſtâ cum velocitate projectum, deſcribet hanc parabolam, ſi modò denſitas medii, in locis ſingulis *G*, ſit reciprocè ut tangens *GT*. Velocitas autem in *G* ea erit quâcum projectile pergeret, in ſpatio non reſiſtente in parabolâ conicâ verticem *G*, diametrum *VG* deorſum productam, & latus rectum $\frac{2\,GTq}{nn - n \times VG}$ habente. Et reſiſtentia in *G* erit ad vim gravitatis ut *GT* ad $\frac{2nn - 2n}{n - 2}\,VG$. Unde ſi *NAK* lineam horizontalem deſignet, & manente tum denſitate medii in *A*, tum velocitate quâcum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus *NAH*; manebunt longitudines *AH*, *AI*, *HX*, & inde datur parabolæ vertex *X*, & poſitio rectæ *XI*, & ſumendo *VG* ad *IA* ut XV^n ad XI^n, dantur omnia parabolæ puncta *G*, (z) per quæ projectile tranſibit.



(z) *Per quæ projectile tranſibit.* Producatur V G ut horizontalem N K ſecet in D, & rectam X Z horizonti parallelam in Z. Pro B N, B D, N X ſcribantur *A*, *O*, *c*, reſpectivè; ſitque M interſectio linearum X V, N K; & X N ad N M, ſive ob 126.

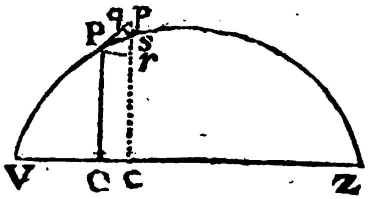
ob triangulorum XNM, VZX ſimilitudinem, VZ ad ZX vel DN ut d ad e; ideoque $DN = A+o$, & $VZ = \frac{d}{e} \times \overline{A+o}$. Quia vero VG eſt ut XV^n (per hypoth.), & VX eſt ad XZ, ſeu DN, in datâ ratione XN ad NM; erit etiam VG ut DN^n. Ponatur ergo $VG = \frac{DN^n}{bb} = \frac{\overline{A+o}^n}{bb} = \frac{A^n}{bb} + \frac{nA^{n-1}o}{bb} + \frac{n.n-1}{1.2}\frac{A^{n-2}}{bb}o^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\frac{A^{n-3}}{bb}o^3 +$ &c., & erit $GD = VZ - NX - VG = \frac{d}{e}\times\overline{A+o} - e - \frac{\overline{A+o}^n}{bb} = \frac{d}{e}A - e - \frac{A^n}{bb} + \frac{d}{e}o - \frac{nA^{n-1}}{bb}o - \frac{(nn-n)A^{n-2}}{2bb}o^2 - \frac{(n^3-3nn+2n)A^{n-3}}{6bb}o^3 -$ &c. Quare erit $Q = \frac{nA^{n-1}}{bb} - \frac{d}{e}$; $R = \frac{\overline{nn-n}A^{n-2}}{2bb}$, & $S = \frac{\overline{n^3-3nn+2n}A^{n-3}}{6bb}$. Per punctum B ducatur ordinata Bg, ad quam demittatur ex G perpendiculum Gr, ſitque XY æqualis & parallela tangenti GT; & ob triangula Grg, XZY ſimilia, erit Gr^2 ad Gg^2 ut XZ^2 ſeu DN^2 ad XY^2 vel GT^2; eſt autem $Gr^2 = o^2$, $rg^2 = QQoo$, & ideo $Gg^2 = oo \times \overline{1+QQ}$: quare cum ſit etiam BN ſeu $DN = A$, erit $GT^2 = AA\times\overline{1+QQ}$, $GT = A\sqrt{1+QQ}$, & $\frac{GT}{A} = \sqrt{1+QQ}$. Per coroll. 1. prop. X. medii denſitas in loco G eſt ut $\frac{S\times A}{R\times GT}$, & (*ex demonſtratis*) $\frac{S}{R} = \frac{n-2}{3A}$, ideoque $\frac{S\times A}{R\times GT}$ eſt ut $\frac{n-2}{3GT}$; quare, ob datum numerum $\frac{n-2}{3}$, denſitas eſt reciprocè ut tangens GT. Velocitas in G (*per prop.* X.) ea eſt, quâ cum projectile pergeret, in ſpatio non reſiſtente, in parabolâ conicâ verticem G, diametrum GD, & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ habente; & ideò cum ſit $\frac{1+QQ}{R} = \frac{GT^2}{A^2R} = \frac{2GT^2}{\overline{nn-n}\times\frac{A^n}{bb}} = \frac{2GT^2}{\overline{nn-n}\times VG}$ (*ex dem.*), parabolæ latus rectum erit $\frac{2GT^2}{\overline{nn-n}.VG}$. Reſiſtentia in G (*per cor.* 1. *prop.* X.) eſt ad vim gravitatis, ut $3S\times GT$ ad $4RR\times DN$, id eſt, ut GT ad $\frac{4RR\times A}{3S}$; ſed $4RR\times A = \frac{\overline{nn-n}^2\times A^{2n-3}}{b^4}$, & $3S = \frac{\overline{nn-n}\times\overline{n-2}}{2}\times\frac{A^{n-3}}{bb}$, atque ideo $\frac{4RR\times A}{3S} = \frac{2nn-2n}{n-2}\times\frac{A^n}{bb} = \frac{2nn-2n}{n-2}\times VG$. Erit igitur reſiſtentia ad gravitatem, ut GT ad



ad $\frac{2nn-2n}{n-2} \times VG$. Velocitas in loco G (*per prop.* X.) eſt ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}} = \sqrt{\frac{2GT^2}{nn-n \times VG}}$, ideoque ob datum numerum $\frac{2}{nn-n}$, ut $\frac{GT}{\sqrt{VG}}$.

Quando igitur corpus eſt in A, medii denſitas eſt ut $\frac{1}{AH}$, & velocitas ut $\frac{AH}{\sqrt{AI}}$; unde manente tum denſitate medii in A, tum velocitate quâcum corpus projicitur, & mutato utcumque angulo NAH, manebunt AH, & $\frac{AH}{\sqrt{AI}}$, ac proinde AI. Quia porro $ZY^2 = XY^2 - XZ^2 = GT^2 - DN^2 = AA \times \overline{1+QQ} - AA = AAQQ$, & ideo $ZY = Q \times A = \frac{nA^n}{bb} - \frac{d}{e}A = nVG - VZ$, atque $ZY + VZ = VY = nVG$; erit in loco A, $Iy = n \times AI$, & hinc $Ay = XH = nAI - AI$. Quare manente AI, manebit etiam HX, ob datum numerum $n-1$. Inveniantur, uti regulâ 7â. pro hyperbolâ factum eſt, longitudines AH, AI & proinde HX; & inde dabitur punctum H, per quod ſi ducatur THX ad horizontem perpendicularis, datâ XH, dabitur poſitio rectæ XI, & ſumendo VG ad IA ut XV^2 ad XI^2, dabuntur omnia parabolæ puncta G, per quæ projectile tranſibit.

Problema elegantiſſimum de inveniendâ trajectoriâ quam corpus in medio juxta duplicatam velocitatum rationem reſiſtente deſcribit, in ſuis Principiis prætermiſit NEWTONUS. Rem generaliter poſtea confecerunt Clariſſimi Mathematici *Joannes Bernoullius, Hermannus, & Eulerus*, qui trajectoriam a projectili deſcriptam in medio quod in quâlibet multiplicatâ velocitatum ratione reſiſtit, analyticè invenerunt. Horum veſtigiis inſiſtentes, tam elegans problema in noſtris commentariis deſiderari nolumus.



PROBLEMA.

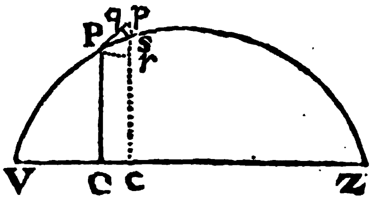
127. Tendente vi gravitatis uniformi ubique perpendiculariter ad planum horizontis VZ, determinare curvam VPp, quam deſcribit projectile in medio uniformi quod in multiplicatâ quâlibet velocitatum ratione reſiſtit. 127.

Ductis ordinatis verticalibus PC, pc infinitè propinquis, & ex puncto P ad pc perpendiculo Pr; dicantur vis gravitatis $= g$, velocitas projectilis in loco P $= v$, reſiſtentia ibidem $= r = \frac{v^{2n}}{2a}$, ita ut ſit a quantitas conſtans quæ determinabitur ex determinatione reſiſtentiæ, ſit Tangens Pp, arcus Ps $= ds$, VC $= x$, PC $= y$, & ideo pr $= dy$, ac Cc ſeu Pr $= dx$; fluxio hæc dx conſtans ſupponatur. * Reſolvatur actio gravitatis quæ exprimitur per ps in actionem sq curvæ perpendicularem; & actionem pq, curvæ parallelam quæ in aſcenſu corporis illud retardat in deſcenſu accelerat, erit actio tota gravitatis ad ejus actionem quâ motum in curva retardat in aſcenſu & accelerat in deſcenſu ut eſt ps ad pq, & ob ſimilia triangula pqs, Ppr, eſt ps ad pq ſicut Pp ſive Ps ad pr, ideoque Ps (ds) ad pr (dy) ſicut gravitas tota g, ad $\frac{g\,dy}{ds}$ quæ eſt actio gravitatis ad retardandum corpus in aſcenſu, & quia in deſcenſu eſt pr $= -dy$, eſt $\frac{-g\,dy}{ds}$ actio gravitatis ad accelerandum corpus in deſcenſu; Unde tota retardatio corporis tam ex gravitate quam ex reſiſtentia orta, eſt $r + \frac{g\,dy}{ds}$ tam in aſcenſu quam in deſcenſu.

Decrementum autem velocitatis $-dv$; eſt ſemper ut vis retardans & tempus quo durante ea vis agit conjunctim, idque tempus eſt ſemper æquale arcui deſcripto Ps

P 2 ad

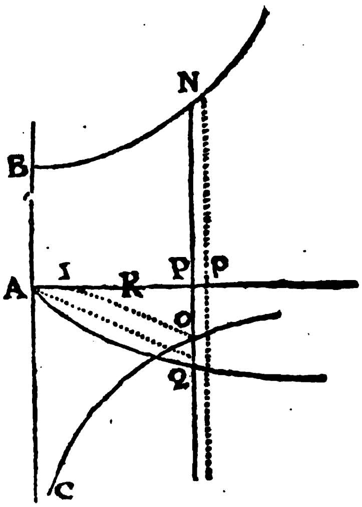
De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. II. Prop. X. Probl. III.



ad velocitatem v applicato, hoc eſt, temporis incrementum $dt = \frac{ds}{v}$ unde velocitatis decrementum $-dv = r + \frac{gdy}{ds} \times \frac{ds}{v} = -\frac{rds + gdy}{v}$, & quia ex Hypotheſi $r = \frac{v^{2n}}{2a}$, eſt $-vdv = \frac{v^{2n}ds}{2a} - gdy$; Ut autem obtineatur valor v, & dv expreſſione quæ ad curvam referatur, notandum quòd lineola ps ſive $-ddy$ eſt ſpatiolum urgente gravitate tempore dt percurſum, ideoque eſt ut vis gravitatis g per temporis quadratum multiplicata, ideoque eſt $-ddy = gdt^2 = \frac{gds^2}{v^2}$ (cum ſit $dt = \frac{ds}{v}$) unde eſt $v^2 = \frac{gds^2}{-ddy}$ ſive $-v^2 ddy = gds^2$, & fluxionem utrinque ſumendo eſt $-v^2 d^3y - 2vddydv = 2gdsdds$, & cum lineolâ pq deſignet dds ſitque Pp ſive Ps (ds) ad Pr (dy) ſicut ps $(-ddy)$ ad pq (dds) eſt $dsdds = -dyddy$ unde hæc ultima æquatio fit $-v^2d^3y - 2vddydv = -2gdyddy$ & $-2vddydv = v^2d^3y - 2gdyddy$ & $-vdv = \frac{v^2d^3y}{2ddy} - gdy$, unde cùm inventum etiam fuerit $-vdv = \frac{v^{2n}ds}{2a} - gdy$, eſt $\frac{v^2d^3y}{ddy} = \frac{v^{2n}ds}{a}$, & valorem inventum $v^2 = \frac{gds^2}{-ddy}$ ſubſtituendo, fit tandem $\frac{gds^2d^3y}{-ddy^2} = \frac{g^n ds^{2n+1}}{-addy^n}$ ſive reductione factâ $ad^3y = \frac{g^{n-1}ds^{2n-1}}{ddy^{n-2}}$.

Ut autem ex hac æquatione eruatur æquatio inter dx, & dy, & inter x & y, deſignet p variabiles quaſcumque quæ in æquatione quæſita ita multiplicant fluxionem dx ut ea ſit æqualis dy, ſitque $dy = pdx$ & $dy^2 = p^2dx^2$, cum ſit $ds^2 = dx^2 + dy^2$ erit $ds^2 = dx^2 + p^2dx^2 = \overline{1+p^2} \times dx^2$, & $ds = dx\sqrt{1+pp}$ unde $ds^{2n-1} = dx^{2n-1} \times \overline{1-pp}^{\frac{2n-1}{2}}$.

Præterea cùm dx conſtans ſupponatur erit $dy = pdx$, $ddy = dxdp$, & ſumpta fluxione erit & $d^3y = dxddp$. Et ſi tandem q deſignet variabiles quæ ita multiplicant fluxionem dx, ut ea fiat æqualis dp, ſitque $qdx = dp$ erit $dxdq = ddp$ & $dx^2dq = dxddp = d^3y$, & æquatio propoſita in hanc vertetur $adx^2dq = \frac{g^{n-1}dx^{n-1} \times \overline{1-pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{dxdp^{n-2}} = \frac{g^{n-1}dx^{n+1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{dp^{n-2}}$, & diviſo utroque termino per dx^2, erit $adq = \frac{g^{n-1}dx^{n-1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{dp^{n-2}}$. Denique loco dx poſito ejus valore $\frac{dp}{q}$ erit $adq = \frac{g^{n-1}dp^{n-1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{q^{n-1}dp^{n-2}}$ ſive $adq = \frac{g^{n-1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{q^{n-1}} \times dp$, hoc eſt $aq^{n-1}dq = g^{n-1}\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$, quæ eſt æquatio fluxionalis inter dp & dq, ex quâ per curvarum quadraturam obtinebitur æquatio inter p & q & inde inter x & y, ut id ipſum nunc exponemus, ſummando enim terminos æquationis $aq^{n-1}dq = g^{n-1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$ habetur $\frac{aq^n}{n} = g^{n-1} \times S\,\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$, hoc eſt $q = \sqrt[n]{\frac{ng^{n-1}}{a}} \times S\,\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$; unde ſit curva cujus



jus abſciſſa qualiſcumque A P ſit $= p$, ſitque ejus ordinata P N ſemper æqualis $\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}$, erit area A B P N $= S\,\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}\,dp$, ducatur ergo ab altera parte P ordinata P O talis ut ſit ſemper æqualis $\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{ng^{n-1}}{a}} \times ABPN}$ erit ea P O æqualis $\frac{1}{q}$, cùmque ſit $dx = \frac{dp}{q} = \frac{1}{q} \times dp$, erit (ſummando) $x = S\frac{1}{q} \times dp$ ſive æqualis area A C P O.

Denique cùm ſit $dy = p\,dx = \frac{p\,dp}{q} = \frac{p}{q} \times dp$ & ſummando $y = S.\frac{p}{q} \times dp$ ideo ſi è puncto P verſus originem A ſumatur P I æqualis unitati, ductaque I O, ducatur ipſi parallela A Q ab origine curvæ quæ ſecet P O productam in Q, erit $1 : PO$ (ſive $\frac{1}{q}$) $= AP$ (ſive p) $: PQ = \frac{p}{q}$, itaque area curvæ A P Q erit $S.\frac{p}{q}dp$ ac per conſequens æqualis y, ergo datis curvarum A C P O, & A P Q quadraturis datur ratio x ad y, & ex earum ordinatis ratio dx ad dy: ſed ut habeatur origo a quâ ſumi debent illarum arearum portiones, ſumendum eſt id punctum in quo P O eſt ad P Q ut Coſinus anguli jactus cum Horizonte ſub quo corpus moveri incepit ad ejus anguli ſinum, quippe ea fuit ipſo motus initio ratio elementorum dx & dy; ſique ille coſinus dicatur c, & ſinus s, erit in ea origine $c : s = \frac{1}{q} : \frac{p}{q}$, unde ſi ſumatur A R ſive $p = \frac{s}{c}$ erit ejus extremitas R origo arearum quarum valor rationem quæſitarum x & y exhibebit. † 127.

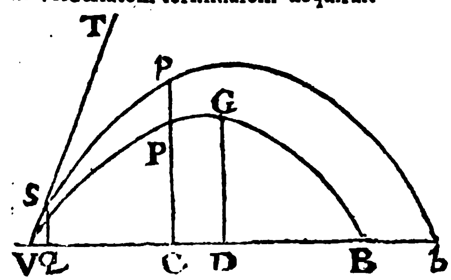
128. *Cor.* 1. Quoniam invenimus $v^2 = \frac{-g\,ds^2}{ddy}$, $ds^2 = dx^2(1+pp)$, & $ddy = dx\,dp$; erit $v^2 = \frac{-g\,dx(1+pp)}{dp}$; ſed $dp = q\,dx$; quare erit $v^2 = \frac{-g(1+pp)}{q}$. Præterea (13) $dt = \frac{ds}{v} = \frac{dx\sqrt{1+pp}}{v} = \frac{dp\sqrt{1+pp}}{qv}$, & $v = \sqrt{\frac{-g(1+pp)}{q}}$; quare erit $dt = \frac{dp}{\sqrt{-gq}}$, & $t = S.\frac{dp}{\sqrt{-gq}}$. Invenietur itaque tum velocitas corporis in loco P trajectoriæ V P p, tum tempus t quo arcus V P deſcribitur.

129. *Cor.* 2. Si in æquatione generali ſupra reperta, $a\,d^3y = \frac{g^{n-1}\,ds^{2n-1}}{ddy^{n-2}}$, ponatur $n = 1$, ſeu reſiſtentia velocitatis quadrato proportionalis; æquatio in hanc migrabit $a\,d^3y = ds\,ddy$; & ponendo $dy = p\,dx$, ac $dx = \frac{dp}{q}$, invenietur $aq = S.\,dp\sqrt{1+pp}$, $x = S.\frac{dp}{q} = S.\frac{a\,dp}{S.\,dp\sqrt{1+pp}}$, $y = S.\frac{p\,dp}{q} = S.\frac{ap\,dp}{S.\,dp\sqrt{1+pp}}$, $vv = \frac{-ag(1+pp)}{S.\,dp\sqrt{1+pp}}$, & $t = S.\frac{a^{\frac{1}{2}}\,dp}{\sqrt{-gS.\,dp\sqrt{1+pp}}}$. Eſt autem $S.\,dp\sqrt{1+pp}$ area hyperbolæ æquilateræ, cujus abſciſſa eſt p & ordinata ducta perpendiculariter ad axem

 con-

conjugatum $\sqrt{1+pp}$, ſemiaxis verò unitas. Unde invenietur q in p per hujus hyperbolæ aream; at abſciſſa x obtinebitur per aream curvæ cujus eſt abſciſſa p & ordinata $\frac{1}{q}$; & correſpondens ordinata y definietur per aream curvæ, cujus abſciſſa eſt p & ordinata $\frac{p}{q}$. Ex quibus manifeſtum ſit veræ trajectoriæ V P Z deſcriptionem adeo perplexam eſſe, ut ex illa vix quidquam ad uſus philoſophicos aut mechanicos accommodatum poſſit deduci.

130. *Coroll.* 3. Quoniam poſito $n=1$, reſiſtentia medii eſt $\frac{v^2}{2a}$ (127), & ubi reſiſtentia ſit gravitati æqualis, id eſt, ubi v æqualis eſt velocitati terminali, habetur $\frac{v^2}{2a}=g$, & $u^2=2ag$, ideò (30. *lib.* 1.) a eſt altitudo ex quâ corpus in medio non reſiſtente vi conſtante g ſollicitatum caderet ut velocitatem terminalem acquirat.



131. *Coroll.* 4. Si in hypotheſi corollarii ſecundi reſiſtentia parva fuerit qualem ferè experitur globus ferreus non parvus magnâ ſatis velocitate per aera projectus, trajectoria V P B, quam globus ille in medio reſiſtente deſcribit, non multùm aberrat a Parabolâ conicâ V p b, quam eâdem urgente vi gravitatis uniformi g ſeu 1 deſcriberet. Quia tamen reſiſtentia velocitatem projectionis minuit, ordinata C P, ad trajectoriam V P B, in medio reſiſtente paulò minor erit quam ordinata C p ad parabolam conicam V p b. Porrò ſi abſciſſa V C dicatur x ordinata C p dicatur z, amplitudo V b, h & proindè C b, $h-x$, erit (ex naturâ parabolæ) rectangulum ſub abſciſſis V C × C b, ſeu $hx-xx$, æquale rectangulo ordinatæ C p, vel z in datam quantitatem l, & ideò æquatio erit $z=\frac{hx}{l}-\frac{xx}{l}$. Cùm igitur ordinata C P (quæ dicatur y) paulò minor ſit quam C p, ſeu z, ponatur $y=\frac{hx}{l}-\frac{xx}{l}-ex^3$, & æquatio iſta in quâ eſt e quantitas exigua, naturam trajectoriæ V P B exponere poterit quam proximè; loco $\frac{h}{l}$, & $\frac{1}{l}$, ſcribantur b & c ut æquatio ſit $y=bx-cx^2-ex^3$. Ut jam determinentur coëfficientes b, c, e, capiantur æquationis fluxiones, prima, ſecunda & tertia, factâ dx conſtante, erunt illæ $dy=bdx-2cxdx-3ex^2dx$; $ddy=-2cdx^2-6exdx^2$, $d^3y=-6edx^3$. Coincidentibus punctis V & C, ſit $x=0$, & ideo $dy=bdx$, $ddy=-2cdx^2$ & $d^3y=-6edx^3$. Ex æquatione $dy=b\,dx$, deducitur proportio $dx:dy=1:b$; & coincidente C cum V, dx eſt ad dy ut ſinus totus V Q ad tangentem Q S, anguli projectionis T V Q; Quare ſi ſinus totus dicatur 1, erit b tangens anguli projectionis, & ideò dato hoc angulo datur b. Si velocitas cum quâ corpus è loco V projicitur ſit v, & f, altitudo ex quâ corpus urgente vi conſtante g, in ſpatio non reſiſtente cadendo acquirit velocitatem illam v, erit $2gf=vv$ (18.19.20. *hujuſce lib.*) ſed (30) $vv=-\frac{gds^2}{ddy}$, ideoque $2gf=-\frac{gds^2}{ddy}$, & $2f=-\frac{ds^2}{ddy}$; Eſt autem $ds^2=dx^2+dy^2=dx^2+bbdx^2$, & $ddy=-2cdx^2$ in loco V, (ex dem.). Quarè erit $2f=\frac{1+bb}{2c}$, & hinc $c=\frac{1+bb}{4f}$. Cùm igitur quantitates b, & f, datæ ſint, data erit c. Invenietur quantitas tertia e, per æquationem $a\,d^3y=ds\,ddy$ (129) & per æquationes ſuprà repertas $ds=dx\sqrt{1+bb}$, $ddy=-2cdx^2$, & $d^3y=-6edx^3$; ex quibus eruitur $-6aedx^3=-2cdx^3\sqrt{1+bb}$ & hinc $e=\frac{c\sqrt{1+bb}}{3a}=\frac{\overline{1+bb}\times\sqrt{1+bb}}{12af}$. Tota igitur æquatio aſſumpta $y=bx-cx^2-ex^3$ ſit $y=bx-x^2\times\left(\frac{1+bb}{4f}\right)=$

$x^3 \times \left(\frac{\overline{1+bb}^{\frac{3}{2}}}{12af}\right)$ in quâ datâ velocitate terminali datur a, (130). Poterit etiam linea a, per experimentum reperiri; Nam ſi e loco V ſub angulo dato T V B datâ cum velocitate projiciatur corpus in medio ſuppoſito & obſervetur amplitudo jactûs V B, quæ dicatur A, in æquatione ad trajectoriam V P B, loco x, ſcribatur A, & loco y, ſcribatur o, quia ordinata C P, ſeu y evaneſcit in B invenietur $o = bA - AA \times \frac{(1+bb)}{4f} - A^3 \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$; undè deducitur $a = AA \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12fb - 3A\times(1+bb)}$.

132. *Coroll.* 5. Jactûs amplitudo V B, invenitur, factâ $y = o$, undè eruitur $xx \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af} + x \times \frac{(1+bb)}{4f} = b$, &. $VB = x = -\frac{3a}{2\sqrt{1+bb}} + \sqrt{\left(\frac{9a^2}{4+4bb} + \frac{12afb}{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}\right)}$.

133. *Coroll.* 6. Maxima jactûs altitudo D G reperitur, ſumptâ æquationis ad trajectoriam V P B, fluxione & factâ $dy = o$ (48); fit enim $o = bdx - 2xdx \times \frac{1+bb}{4f} - 3x^2dx \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$ undè deducitur $VD = x = -\frac{a}{\sqrt{1+bb}} + \sqrt{\frac{aa}{1+bb} + \frac{4afb^{\frac{3}{2}}}{1+bb}}$. Quo valore loco x, in æquatione ad trajectoriam ſubſtituto, obtinebitur y, ſeu maxima altitudo D G.

134. *Coroll.* 7. Ut determinetur tangens anguli T V B, ſub quo corpus datâ celeritate projectum, per datum punctum P tranſibit, loco x & y in æquatione ad trajectoriam ſcribantur datæ V C & V P, atque hinc eruatur valor tangentis b; dicatur V C $= p$, C P $= q$, & erit $q = bp - pp \times \frac{\sqrt{1+bb}}{af} - p^3 \times \frac{\overline{1+bb}^{\frac{3}{2}}}{12af}$. Si medii denſitas infinitè parva eſſet, altitudo a foret infinita (130), & idcircò $q = bp - pp \times \frac{1+bb}{4f}$. Inveniatur per hanc æquationem valor tangentis b qui dicatur k, & in æquatione ſuperiori loco $(1+bb)^{\frac{3}{2}}$, ſcribatur $(1+bb) \times \sqrt{1+kk}$ & illa in hanc abibit $q = bp - pp \times \frac{(1+bb)}{af} - p^3 \times \overline{1+bb} \times \frac{\sqrt{1+kk}}{12af}$, quæ cum ſit duarum dimenſionum facilè ſuppeditabit valorem ipſius b, quamproximè. 134.

135. *Coroll.* 8. Datâ celeritate jactûs, invenitur angulus maximæ omnium amplitudini conveniens, ſi in æquatione corollarii 5. in quâ x exponit quamlibet amplitudinem V B, ſumatur tangens b variabilis & ſumptis fluxionibus ponatur $dx = o$ (48). Calculo enim inito invenietur $4f \times (1-2bb)^2 = 3ab \times (1-bb) \times \sqrt{1+bb}$. Quoniam verò tangens anguli projectionis eſt b, ſinus totus 1, & proindè ſecans $\sqrt{1+bb}$; ſi ejuſdem anguli ſinus dicatur s, erit $\sqrt{1+bb} : b = 1 : s$, adeóque $1+bb : bb = 1 : ss$, & dividendo $1 : bb = 1-ss : ss$, atque ità $bb = \frac{ss}{1-ss}$, & $b = \frac{s}{\sqrt{1-ss}}$. Loco b ſubſtituatur $\frac{s}{\sqrt{1-ss}}$ in æquatione modo inventâ & illa in hanc mutabitur, $4f \times \frac{(1-3ss)^2}{(1-ss)^2} = 3as \times \frac{(1-2ss)}{(1-ss)^2}$, hoc eſt, $4f \times (1-3ss)^2 = 3as \times (1-2ss)$. Ex quâ æquatione, ſi eruatur valor ſinûs s dabitur angulus quæſitus. Per approximationem ità poteſt obtineri. Scribatur in æquatione $3as = 3a\sqrt{\frac{1}{2}}$; Nam ſi trajectoria in medio non reſiſtente deſcriberetur, angulus T V B foret ſemirectus, & proindè ſinus ejus $\sqrt{\frac{1}{2}}$, cum ſit ſinus totus $= 1$; & ideò in medio valdè raro eſt ferè $s = \sqrt{\frac{1}{2}}$; æquatio igitur erit $4f \times (1-3ss)^2 = (1-2ss) \times 3a\sqrt{\frac{1}{2}}$; quæ facillimè reſolvetur ad inſtar æquationis duarum dimenſionum. Hinc autem invenitur s paulò minor quam $\sqrt{\frac{1}{2}}$; adeóque angulus projectionis ſemirecto paulò minor.

136. *Coroll.* 9. Si medium eſſet paulò denſius, aſſumenda foret æquatio ad tra-

trajectoriam, $y = bx - xx \times \frac{(1+bb)}{4f} - x^3 \times \frac{(1+bbb)^{\frac{3}{2}}}{12af} - hx^4$; aut etiam alia plurium terminorum. In illâ autem itâ determinatur valor coefficientis h. Pro coefficientibus datis $\frac{1+bb}{4f}$, $\frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$. ſcribantur c, e, ut ſit æquatio $y = bx - cx^2 - ex^3 - hx^4$, & ſumptis ut ſuprà (131) fluxionibus primis, ſecundis & tertiis, factâ dx, conſtante, invenietur (129)

$$\frac{ad^3y}{ds\,ddy} = 1 = \frac{6ae + 24ahx}{(2c + 6ex + 12hx^2)} \times \frac{1}{\sqrt{1+bb-4bcx+4ccx^2-6bex^2\ \&c.}}$$

$$= \frac{6ae + 24ahx}{2c + 6ex \times \sqrt{1+bb - \frac{2bcx}{\sqrt{1+bb}}}}$$

neglectis terminis ubi x^2 occurrit & extracta Radice per formulam *Newtonianam*. Ut autem hæc quantitas conſtans ſit & æqualis unitati, termini homologi in numeratore $6ae + 24ahx$, & denominatore $2c\sqrt{1+bb} + 6ex\sqrt{1+bb} - \frac{4bccx}{\sqrt{1+bb}}$ ponendi ſunt æquales, id eſt, $6ae = 2c\sqrt{1+bb}$, & $24ahx = 6ex\sqrt{1+bb} - \frac{4bccx}{\sqrt{1+bb}}$. Ex his ſuppoſitionibus eruitur $e = \frac{c\sqrt{1+bb}}{3a} = \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$, & $h = e\frac{\sqrt{1+bb}}{4f} - \frac{bcc}{6a\sqrt{1+bb}} = \frac{(1+bb)^2}{48a^2f} - \frac{b\times(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{96aff}$. Quarè æquatio aſſumpta erit $y = bx - x^2 \times \frac{(1+bb)}{af} - x^3 \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af} - x^4 \times \frac{(1+bb)^2}{48a^2f} + x^4 b \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{96aff}$. Et eodem modo determinarentur coefficientes in æquationibus plurium terminorum ſeu ad parabolas ſuperiorum generum.

137. *Coroll.* 10. Si reſiſtentia medii uniformis, partim conſtans ſupponeretur & partim velocitatis quadrato proportionalis, poſſet etiam trajectoriâ VPB quamproximè definiri. Sit enim reſiſtentiæ pars uniformis $= \frac{1}{2}kg$, & reſiſtentia tota $r = \frac{kg}{2} + \frac{v^2}{2a}$, & erit (28) $g\,dy + \frac{kg\,ds}{2} + \frac{v^2 ds}{2a} = -v\,dv$ & (30) $v^2 = -\frac{g\,ds^2}{ddy}$ adeóque (127) $v\,dv = -g\,dy + \frac{g\,ds^2 d^3y}{2\,ddy^2}$, his valoribus loco v^2 & $v\,dv$, in priori æquatione ſubſtitutis fit $g\,dy + \frac{kg\,ds}{2} - \frac{g\,ds^3}{2a\,ddy} = g\,dy - \frac{g\,ds^2 d^3y}{2\,ddy^2}$, ideóque $k = \frac{ds^2}{a\,ddy} - \frac{ds\,d^3y}{ddy^2}$. Jam ſi reſiſtentia tota r, exigua fuerit, ponatur æquatio ad trajectoriam VPB, $y = bx - cx^2 - ex^3$, & factâ dx, conſtante, capiantur fluxiones primæ, ſecundæ & tertiæ quæ coincidente puncto C, cum V, erunt $dy = b\,dx$, $ddy = -2c\,dx^2$, & $d^3y = -6e\,dx^3$ (131); undè invenitur ut (in coroll. 4. 131.) b, tangens anguli projectionis, exiſtente ſinu toto 1, & $c = \frac{1+bb}{4f}$, ubi f eſt altitudo ex quâ corpus urgente vi conſtante g cadendo in ſpatio non reſiſtente acquirit jactûs velocitatem. Quantitas e determinabitur per æquationem $k = \frac{ds^2}{a\,ddy} - \frac{ds\,d^3y}{ddy^2}$. Nam ſi in illâ loco ds, ddy, d^3y, ſubſtituantur ipſorum valores $dx \times (1+bb)^{\frac{1}{2}}$, $-2c\,dx$, & $-6e\,dx^3$, erit $k = -\frac{(1+bb)}{2ac} + \frac{3e\times(1+bb)^{\frac{1}{2}}}{2cc}$; undè eruitur $e = \frac{2kcc}{3\times(1+bb)^{\frac{1}{2}}} + \frac{c\times(1+bb)^{\frac{1}{2}}}{3a} = \frac{k\times(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{24ff} + \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$. Quapropter æquatio aſſumpta in hanc abit $y = bx - \frac{xx\times(1+bb)}{4f} - x^3 \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$;

$- x^3 k$

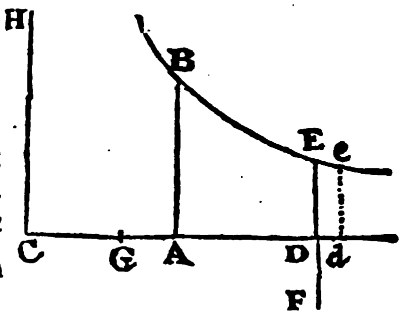
SECTIO III.

De motu corporum quibus reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicatâ.

PROPOSITIO XI. THEOREMA VIII.

Si corpori reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicatâ, & idem ſolâ vi inſitâ in medio ſimilari movetur: ſumantur autem tempora in progreſſione arithmeticâ; quantitates velocitatibus reciprocè proportionales, datâ quâdam quantitate auctæ, erunt in progreſſione geometricâ.

Centro C, aſymptotis rectangulis $CADd$ & CH, deſcribatur hyperbola BEe, & aſymptoto CH parallelæ ſint AB, DE, de. In aſymptoto CD dentur puncta A, G: Et ſi tempus exponatur per aream hyperbolicam $ABED$ uniformiter creſcentem; dico quod velocitas exponi poteſt per longitudinem DF, cujus reciproca GD unâ cum datâ CG componat longitudinem CD in progreſſione geometricâ creſcentem.



Sit enim areola $DEed$ datum temporis incrementum quàm minimum, & (a) erit Dd reciprocè ut DE, ideoque directè ut CD. Ipſius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod (b) per hujus

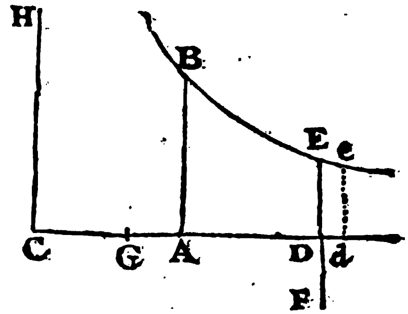
$- x : k \times \frac{(1 + bb)^{\frac{3}{2}}}{24ff}$, & quantitates a & k, ex phænomenis poterunt determinari ut ſuprà (131.).

(a) * *Et erit D d reciprocè ut D E.* Eſt enim areola evaneſcens D E e d æqualis rectangulo D E × D d, quod, ob datum temporis incrementum, erit ut quan- 137.
titas data, & ideò D d, eſt ut quantitas data diviſa per D E, id eſt, reciprocè ut D E; ſed (*per theor. 4. de hyperb.*) datum eſt rectangulum C D × D E, proindè C D, eſt reciprocè ut D E; quarè erit D d directè ut C D.

(b) * *Per hujus Lemma* 2. Caſ. 4.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. III. PROP. XI. THEOR. VIII.

hujus lem. 11.) eſt $\frac{Dd}{GDq}$, erit ut $\frac{CD}{GDq}$ ſeu $\frac{CG+GD}{GDq}$, id eſt, ut $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GDq}$. Igitur tempore *ABED* per additionem datarum particularum *EDde* uniformiter creſcente, decreſcit $\frac{1}{GD}$ in eâdem ratione cum velocitate. Nam (c) decrementum velocitatis eſt ut reſiſtentia, hoc eſt (per hypotheſin) ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt ut velocitas, altera ut quadratum velocitatis; & ipſius $\frac{1}{GD}$ decrementum eſt ut ſumma quantitatum $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GDq}$, quarum prior eſt ipſa $\frac{1}{GD}$, & poſterior $\frac{CG}{GDq}$ eſt ut $\frac{1}{GDq}$: (d) proinde $\frac{1}{GD}$, ob analogum decrementum, eſt ut velocitas. Et ſi quantitas *GD*, ipſi $\frac{1}{GD}$ reciprocè proportionalis, quantitate datâ *CG* augeatur; ſumma *CD*, tempore *ABED* uniformiter creſcente, (e) creſcet in progreſſione geometricâ. *Q.E.D.*



Corol. 1. Igitur ſi, datis punctis *A*, *G*, exponatur tempus per aream hyperbolicam *ABED*, exponi poteſt velocitas per ipſius *GD* (f) reciprocam $\frac{1}{GD}$.

Co-

(c) *Nam decrementum velocitatis*, dato temporis momento, *eſt ut reſiſtentia* (15).

(d) * $\frac{1}{GD}$. *Ob analogum decrementum eſt ut velocitas.* Si enim duarum quantitatum fluentium incrementa vel decrementa dato tempuſculo producta analoga ſint, eorum incrementorum vel decrementorum ſummæ ſeu fluentes ipſæ ab eodem initio ſumptæ, ſunt analogæ (*per Cor. Lem.* 4. *lib.* 1.).

(e) * *Creſcet in progreſſione geometricâ* (380. lib. 1.).

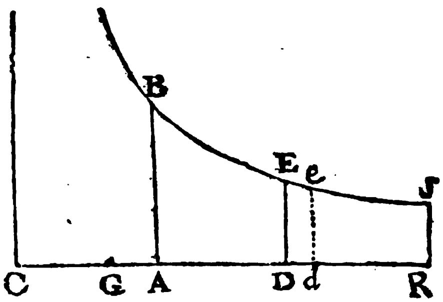
(f) * *Exponi poteſt velocitas per ipſius* GD

(g) *Corol.* 2. Sumendo autem *G A* ad *G D* ut velocitatis reciproca ſub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujuſvis *A B E D*, invenietur punctum *G*. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri poteſt.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. III. PROP. XII. THEOR. IX.

PROPOSITIO XII. THEOREMA IX.

Iiſdem poſitis, dico quòd ſi ſpatia deſcripta ſumantur in progreſſione arithmeticâ, velocitates datâ quâdam quantitate auctæ erunt in progreſſione geometricâ.



In aſymptoto *CD* detur punctum *R*, & erecto perpendiculo *R S*; quod occurrat hyperbolæ in *S*, exponatur deſcriptum ſpatium per aream hyperbolicam *R S E D*; & velocitas erit ut longitudo *G D*, quæ cum datâ *CG* componit longitudinem *C D* in progreſſione geometricâ decreſcentem, interea dum ſpatium *R S E D* augetur in arithmeticâ.

(h) Etenim ob datum ſpatii incrementum *E D d e*, lineola *D d*, quæ decrementum eſt ipſius *G D*, erit reciprocè ut *E D*, ideoque directè ut *C D*, hoc eſt, ut ſumma ejuſdem *G D* & lon-

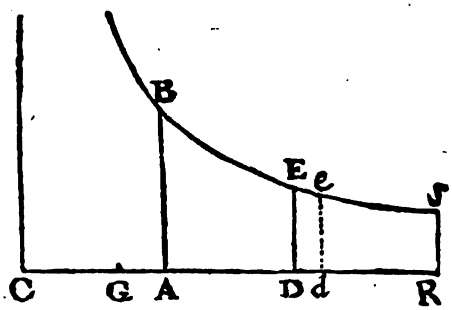
GD *reciprocam* $\frac{1}{GD}$. Undè patet velocitatem nonniſi tempore infinito extingui poſſe, * erit enim $\frac{1}{GD} = 0$, ſive velocitas nulla ubi G D erit infinita, tunc autem area BADE, quæ tempus exprimit infinita etiam eſt, ex naturâ Hyperbolæ.

(g) * *Coroll.* 2. Punctum A ad arbitrium aſſumitur in aſymptoto C R & aſſumpto etiam quovis puncto D ut area A B E D tempus datum exponat, ità determinandum eſt punctum G, ut ſit G A ad G D, ut velocitatis reciproca ſub initio 137. ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujuſvis A B E D, quòd per coroll. 1. liquet. Invento autem puncto G, ex dato quovis alio tempore quod v. gr. ſit ad tempus primò datum ut area A B S R, ad aream A B E D, dabitur velocitas quæ erit reciprocè ut G R, ſeu quæ erit ad velocitatem ſub initio in A, ut G A ad G R datam.

(h) * *Etenim ob datum ſpatii incrementum*, per hypotheſim quâ ſpatia ſupponuntur in arithmeticâ progreſſione creſcere.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. III. PROP. XII. THEOR. IX.

longitudinis datæ *CG*. Sed velocitatis decrementum, tempore ſibi reciprocè proportionali, quo data ſpatii particula *DdeE* deſcribitur, eſt (i) ut reſiſtentia & tempus conjunctim, id eſt directè ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inversè ut velocitas; ideoque directè ut ſumma duarum quantitatum, quarum una datur, altera eſt ut velocitas. Decrementum igitur tam velocitatis quam lineæ *GD*, eſt ut quantitas data & quantitas decreſcens conjunctim, & propter analoga decrementa, (k) analogæ ſemper erunt quantitates decreſcentes; nimirum velocitas & linea *GD*. *Q. E. D.*



Corol. 1. Si velocitas exponatur per longitudinem *GD*, ſpatium deſcriptum erit ut area hyperbolica *DESR*.

Corol. 2. Et ſi utcunque aſſumatur punctum *R*, invenietur punctum *G* capiendo *GR* ad *GD*, ut eſt velocitas ſub initio ad velocitatem poſt ſpatium quodvis *RSED* deſcriptum. (l) Invento autem puncto *G*, datur ſpatium ex datâ velocitate, & contra.

Corol. 3. Unde cùm (*per prop.* XI.) detur velocitas ex dato tempore, & per hanc propoſitionem detur ſpatium ex datâ velocitate; dabitur ſpatium ex dato tempore: & contra.

PRO-

(i) * *Eſt ut reſiſtentia & tempus conjunctim.* Velocitatis decrementum eſt ut reſiſtentia & tempus conjunctim (15), tempus verò eſt ut incrementum ſpatii directè & velocitas inversè, adeóque dato ſpatii incremento ut velocitas inversè. Quarè dato ſpatii incremento, velocitatis decrementum eſt ut reſiſtentia directè & velocitas inversè, id eſt, directè ut ſumma duarum quantitatum &c.

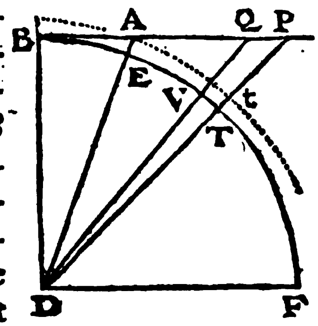
(k) * *Analogæ ſemper erunt* &c. (Per cor. lem. 4. lib. 1.).

(l) * *Invento autem puncto* G, *&c.* Si enim velocitas data, ſit ad velocitatem ſub initio ut G A ad G R, dabitur punctum A, & hinc dabitur area A B S R, ſeu ſpatium deſcriptum. Et contrà dato ſpatio, ſive datâ areâ A B S R, dabitur punctum A, & indè velocitas G A. Ex his autem patet ſpatium finitum infinito tempore deſcribi; ubi enim punctum D coincidit cum puncto G, velocitas omnis extinguitur, & ſpatium deſcriptum exponitur per aream finitam quam ordinata

R S

PROPOSITIO XIII. THEOREMA X.

Poſito quod corpus ab uniformi gravitate deorſum attractum rectâ aſcendit vel deſcendit; & quod eidem reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicatâ: dico quod, ſi circuli & hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates ſint ut ſegmenta quædam parallelarum à dato puncto ducta; tempora erunt ut arearum ſectores, rectis à centro ad ſegmentorum terminos ductis abſciſſi: & contra.

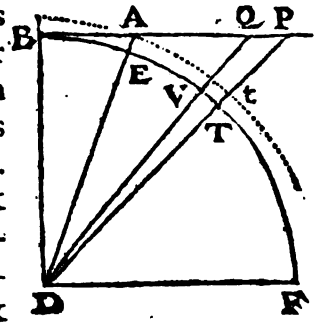


Caſ. 1. Ponamus primò quòd corpus aſcendit, centroque *D* & ſemidiametro quovis *D B* deſcribatur circuli quadrans *B E T F*, & per ſemidiametri *D B* terminum *B* agatur infinita *B A P*, ſemidiametro *D F* parallela. In eâ detur punctum *A*, & capiatur ſegmentum *A P* velocitati proportionale. Et cùm reſiſtentiæ pars altera ſit ut velocitas, & pars altera ut velocitatis quadratum; ſit reſiſtentia tota ut *AP quad.* + 2 *BAP*. Jun-

R S abſcindit cum alterâ ordinatâ per G ductâ; velocitas verò nonniſi infinito tempore poteſt evaneſcere (*per cor.* 1. *prop. XI.*).

138. *Schol.* Eadem per analyſim facilè inveniuntur. Dicantur reſiſtentia r celeritas initialis c, ſpatium deſcriptum s, tempus t, velocitas reſidua v, ponaturque $r = \frac{av+vv}{b}$, erit (16, 17) $r\,ds = -v\,dv$, ſeu $av\,ds + vv\,ds = -bv\,dv$, & hinc $ds = -\frac{b\,dv}{a+v}$, atque adeò $s = Q - b\times L.\overline{a+v}$; quia verò ubi $s = 0$ ſit $v = c$, invenitur conſtans $Q = b\times L.\overline{a+c}$, & ideò $s = b\times L.\frac{a+c}{a+v}$. Sit L. $h = 1$, & erit $\frac{s\times L.h}{b} = L.\frac{a+c}{a+v}$, ac $h^{\frac{s}{b}} = \frac{a+c}{a+v}$; undè eruitur $v = \frac{a+c}{h^{\frac{s}{b}}} - a$; Quarè dato ſpatio dabitur velocitas & contrà. Cùm autem ſit 138.
(13) $dt = \frac{ds}{v} = -\frac{b\,dv}{av+vv} = \frac{b}{a}\times\frac{dv}{a+v} - \frac{b}{a}\times\frac{dv}{v}$, erit $t = Q + \frac{b}{a}\times L.\overline{a+v} - \frac{b}{a}\times L.v = Q + \frac{b}{a}\times L.\frac{a+v}{v}$, & poſito $t = 0$ & $v = c$, ſit $Q = -\frac{b}{a}\times L.\frac{a+c}{c}$, adeóque $t = \frac{b}{a}\times L.\frac{a+v}{v} - \frac{b}{a}\times L.\frac{a+c}{c}$, & hinc $t = \frac{b}{a} L.\frac{ac+cv}{av+cv}$, & $h^{\frac{at}{b}} = \frac{ac+cv}{av+cv}$; unde eruitur $v = \frac{ac}{ah^{\frac{at}{b}} + ch^{\frac{at}{b}} - c}$. Dato igitur tempore dabitur velocitas & ſpatium ac contrà.

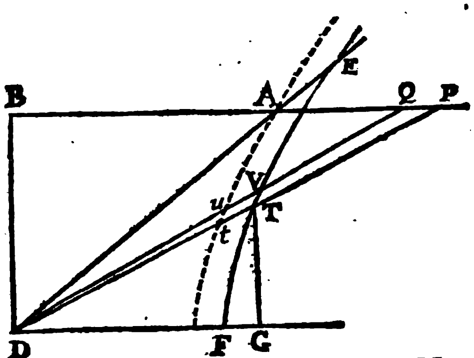
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. III. PROP. XIII. THEOR. X.



Jungantur DA, DP circulum ſecantes in E ac T, & (m) exponatur gravitas per DA *quad.* ita ut ſit gravitas ad reſiſtentiam in P ut DAq ad $APq + 2\,BAP$: & tempus aſcenſus totius erit ut circuli ſector EDT.

Agatur enim DVQ, abſcindens & velocitatis AP momentum PQ, & ſectoris DET momentum DTV dato temporis momento reſpondens; & velocitatis decrementum illud PQ erit ut (n) ſumma virium gravitatis DAq & reſiſtentiæ $APq + 2\,BAP$, id eſt (*per prop.* 12. *lib.* 2. *elem.*) ut DP *quad.* Proinde area DPQ, (o) ipſi PQ proportionalis, eſt ut DP *quad.* & area DTV, quæ eſt ad aream DPQ ut (p) DTq ad DPq, eſt ut datum DTq. Decreſcit igitur area EDT uniformiter ad modum temporis futuri, per ſubductionem datarum particularum DTV, & propterea tempori aſcenſus totius proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Si velocitas in aſcenſu corporis exponatur per longitudinem AP ut prius, & reſiſtentia ponatur eſſe ut $APq + 2\,BAP$, & ſi vis gravitatis minor ſit quam quæ per DAq exponi poſſit; capiatur BD ejus longitudinis, ut ſit $ABq - BDq$ gravitati proportionale, ſitque DF ipſi DB perpendicularis & æqualis, & per verticem F deſcribatur hyperbola $FTVE$, cujus ſemidiametri conjugatæ ſint DB & DF, quæque ſecet DA in E, & DP, DQ in T & V; & erit tempus aſcenſus totius ut hyperbolæ ſector TDE.



Nam

(m) * *Et exponatur gravitas per* D *Aq.* Corpore aſcendente ratio gravitatis uniformis ad reſiſtentiam vel major eſt ratione quadrati dati AB^2 ad quantitatem $AP^2 + 2\,BAP$, vel minor vel æqualis. In 1°. caſu gravitas exponi ſemper poterit per quadratum ſecantis AD quæ quantumvis magna aſſumi poteſt; In 2°. caſu per differentiam $AB^2 - BD^2$ quæ quantumvis parva eſſe poteſt; & in 3°. caſu per quadratum AB^2.

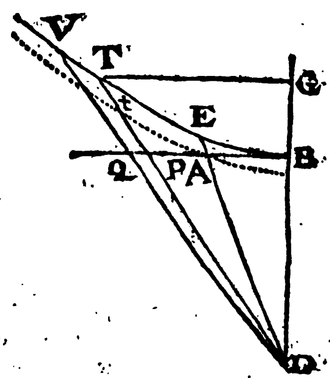
(n) * *Ut ſumma virium* (18).

(o) * *Ipſi P Q proportionalis.* Nam area D P Q eſt $\frac{1}{2}\,BD \times PQ$, & ideò ob datam $\frac{1}{2}$ B D eſt ut P Q.

(p) * *Ut D T q ad D P q.* Triangulum

Nam velocitatis decrementum PQ, in datâ temporis particulâ factum, eſt ut ſumma reſiſtentiæ $APq + 2BAP$ & gravitatis $ABq - BDq$, (q) id eſt, ut $BPq - BDq$. Eſt autem area DTV ad aream DPQ ut DTq ad DPq; ideoque, ſi ad DF demittatur perpendiculum GT, ut GTq ſeu $GDq - DFq$, ad BDq, utque GDq ad BPq, & diviſim ut DFq ad $BPq - BDq$. Quare cùm area DPq ſit ut PQ, id eſt, ut $BPq - BDq$; erit area DTV ut datum DFQ. Decreſcit igitur area EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per ſubductionem particularum totidem datarum DTV, & propterea tempori proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Sit AP velocitas in deſcenſu corporis, & $APq + 2BAP$ reſiſtentia, & $BDq - ABq$ vis gravitatis, exiſtente angulo DBA recto. Et ſi centro D, vertice principali B, deſcribatur hyperbola rectangula $BETV$ ſecans productas DA, DP & DQ in E, T & V; erit hyperbolæ hujus ſector DET ut tempus totum deſcenſûs.



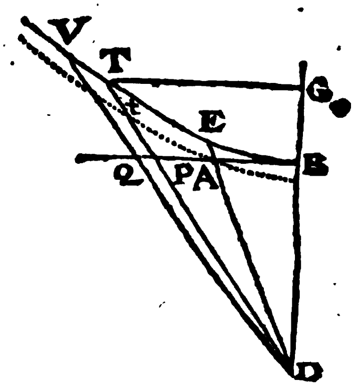
Nam velocitatis incrementum PQ, eique proportionalis area DPQ, eſt ut exceſſus gravitatis ſupra reſiſtentiam, id eſt, ut $BDq - ABq - 2BAP - APq$ ſeu $BDq - BPq$. Et area DTV eſt ad aream DPQ ut DTq ad DPq, ideoque ut (r) GTq ſeu $GDq - BDq$ ad BPq, utque GDq ad BDq, & diviſim ut BDq ad $BDq - BPq$. Quare cùm area DPQ ſit ut $BDq - BPq$, erit area DTV ut datum BDq. Creſcit igitur area EDT

lum evaneſcens D P Q, non differt a ſectore circuli centro D & radio D Q deſcripti, inter lineas D Q & D P; hic verò ſector eſt ad ſimilem ſectorem D T V, ut DP^2 ad DT^2, quarè area D T V, eſt ad aream D P Q, ut DT^2 ad DP^2, & permutando, area D T V eſt ad DT^2, ut area D P Q ad DP^2. Cùm igitur (*ex dem.*) area D P Q ſit ut DP^2, erit etiam area D T V ut DT^2, ſeu ut datum quadratum DB^2; ergo, tempore dato, data eſt area D T V, & ideò temporibus 138 æqualibus *æqualiter decreſcit area* E D T, *ad modum temporis futuri &c.*

(q) * *Id eſt ut* $BPq - BDb$. Eſt enim $APq + 2BAP + ABq = BPq$.

(r) *Ut* GTq. Nam ob ſimilitudinem triangulorum D G T, P B D eſt D T q ad D P q ut G T q = G D q − B D q (ex conic. vid. not. in caſ. 2. prop. 9.) ad B D q, *utque* G D q *ad* B D q, *& diviſim &c.*

EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum *DTV*, & propterea tempori deſcenſus proportionalis eſt. *Q. E. D.*



Corol. Si centro *D* ſemidiametro *DA* per verticem *A* ducatur arcus *At* ſimilis arcui *ET*, & ſimiliter ſubtendens angulum *ADT*: velocitas *AP* erit ad velocitatem, quam corpus tempore *EDT*, in ſpatio non reſiſtente, aſcendendo amittere vel deſcendendo acquirere poſſet, ut area trianguli *DAP* ad aream ſectoris *DAt*; ideoque ex dato tempore datur. (ſ) Nam velocitas, in medio non reſiſtente, tempori, atque ideo ſectori huic proportionalis eſt; in medio reſiſtente eſt ut triangulum; & in medio utroque, ubi quàm minima eſt, accedit ad rationem æqualitatis, pro more ſectoris & trianguli.

Scho-

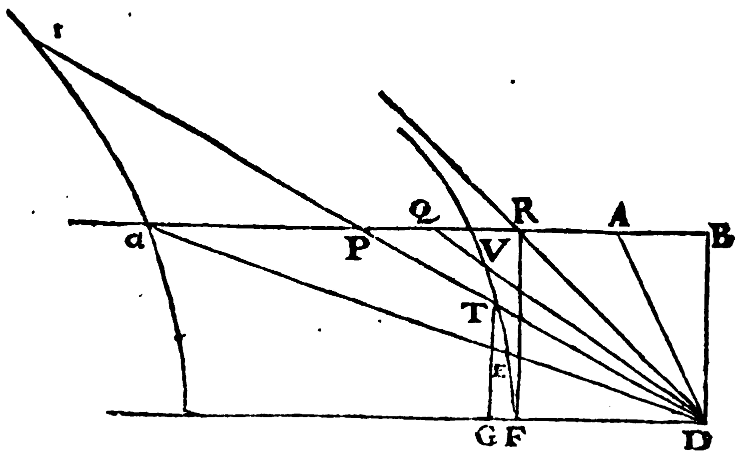
(ſ) * *Nam velocitas in medio non reſiſtens* (25. lib. 1.) *tempori* atque adeò ſectori EDT, & proindè *ſectori DAt, proportionalis eſt*; in medio reſiſtente eſt ut AP, ſeu ob datam BD ut $\frac{1}{2}$ BD × AP; ſivè ut triangulum ADP; & in medio utroque ubi quàm minima eſt, nempe initio deſcensûs è quiete vel in fine aſcensûs accedit ad rationem æqualitatis ob reſiſtentiam evaneſcentem, evaneſcente velocitate, pro more, ſectoris DAt & trianguli DAP coeuntibus punctis t & P cum puncto A.

139. Quoniam ubi in corporis deſcenſu BP fit = BD, angulus BDP ſemirectus evadit, & recta DP aſymptotus hyperbolæ æquilateræ BET; manifeſtum eſt quod corpus è quiete cadendo nonniſi finitam velocitatem infinito tempore poſſit acquirere. Erit enim velocitas tempore infinito acquiſita BD — AB. Si verò corpus verticaliter deorſum datâ cum velocitate projiciatur, vel illa velocitas maximæ ſeu terminali BD — AB æqualis eſt, & in hoc caſu corpus motu uniformi deſcendit ob reſiſtentiam gravitati æqualem; vel terminali minor eſt, & corporis cadentis motus perpetuò acceleratur, donec infinito tempore velocitatem maximam acquirat; vel tandem terminali major eſt, tumque corporis motus perpetuò retardatur, donec infinito tempore elapſo ad velocitatem terminalem reducatur; hoc autem caſu ſic abſolvitur conſtructio.

Sit Aa velocitas datæ projectionis terminali major, AP velocitas perpetuò decreſcens, $AP^2 + 2BAP$ reſiſtentia, & $BD^2 \; AB^2$ vis gravitatis; exiſtente angulo DBA recto; & ſi capiatur BR = BD, compleaturque quadratum DBRF, ac centro D & vertice principali F deſcribatur hyperbola rectangula FETV, ſecans rectas Da, DP & DQ, in E, T, V; tempus deſcensûs ab initio uſquequò reſidua corpori velocitas ſit AP, erit ut ſector hyperbolicus DET; nam velocitatis decrementum PQ, in datâ temporis particulâ factum eique proportionalis area DPQ

Scholium.

Demonſtrari (†) etiam poſſet caſus in aſcenſu corporis, ubi vis gravitatis minor eſt quàm quæ exponi poſſit per *DAq* ſeu *ABq* + *BDq*, & major quàm quæ exponi poſſit per *ABq* — *BDq*, & exponi debet per *ABq*. Sed propero ad alia.



D P Q eſt ut exceſſus reſiſtentiæ ſuprà gravitatem (18), id eſt, ut $AP^2 + 2BAP + AB^2 - BD^2$, ſeu $BP^2 - BD^2$; & area D T V eſt ad aream D P Q, ut DT^2 ad Dp^2, ideoque ut GT^2, (ſeu $GD^2 - BD^2$) ad BD^2, & ut GD^2 ad BP^2, & diviſim, ut BD^2 ad $BP^2 - BD^2$. Quarè cum area D P Q, ſit ut $BP^2 - BD^2$, erit area D T V ut datum BD^2. Creſcit igitur area E D T, uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus per additionem totidem datarum particularum D T V, & propterea tempori deſcenſûs proportionalis eſt. Coincidente verò puncto P, cum R, & ideò rectâ D P, cum aſymptoto D R, velocitas A P terminali A R ſeu B D — A B æqualis evadit, & ſector D E T infinitus, proindeque tempus etiam infinitum fit. Q. E. D.

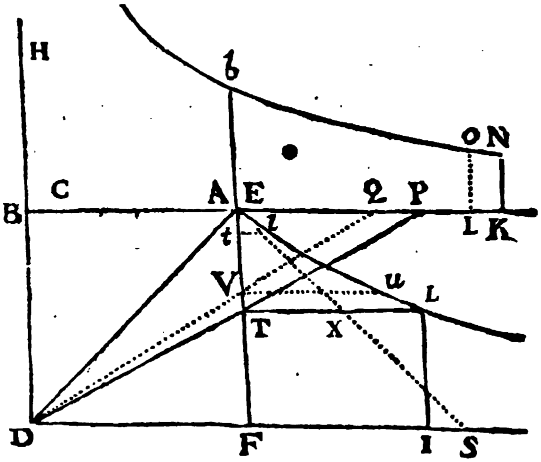
140. Hinc etiam ſi centro D, ſemidiametro D a, per verticem a, ducatur arcus Hyperbolicus a t ſimilis arcui E T, & ſimiliter ſubtendens angulum a D T; velocitas a P, in medio reſiſtente tempore E D T, extinctâ, erit ad velocitatem quam corpus eodem tempore in ſpatio non reſiſtente è quiete deſcendendo acquirere poſſet, ut area trianguli D a P, ad aream ſectoris D a t, ideòque ex dato tempore datur, & hinc datur quoque velocitas reſidua A P. Nam velocitas in medio non reſiſtente acquiſita tempori, atquè ideò ſectori D E T, & proindè ſectori ſimili D a t proportionalis eſt; velocitas in medio reſiſtente extinctâ, eſt ut triangulum D a P, & in medio utroque ubi quàm minima eſt, accedit ad rationem æqualitatis pro more ſectoris D a t, & trianguli D a P. 140.

(†) 141. *Demonſtrari poſſet caſus in aſcenſu corporis, ubi vis gravitatis..... exponi debet per A B q.* * Velocitas in aſcenſu exponatur per A P ut prius, ſit reſiſtentia ut

ut $APq + 2BAP$, exponatur vis gravitatis per ABq capiatur BD & $DF = BA$ erectoque perpendiculo FTA erit tempus aſcenſus totius ut ſector ſive Triangulum DTA, agatur enim DVQ abſcindens & velocitatis momentum PQ & ſectoris DTA momentum DTV, velocitatis decrementum PQ eſt ut ſumma reſiſtentiæ & gravitatis ſive ut $APq + 2BAP + ABq$ id eſt (per 4. 2^i. Elem.) ut BPq; eſt autem area DTV ad aream DPQ ut DTq ad DPq, ſive ob Triangula ſimilia DTF, DPB, ut DFq ad BPq, eſt ergo area DTV ut datum DFq. *Decreſcit igitur area DTA ad modum temporis futuri per ſubductionem particularum DTV, & propterea tempori aſcenſus totius proportionalis eſt.* *

Si itaque reſiſtentia ponatur eſſe ut $AP^2 + 2BAP$, vis autem gravitatis ut AB^2; tempus aſcenſûs totius erit ut AT & etiam ut $\frac{AP}{BP}$. Nam triangulum DTA, ob altitudinem conſtantem DF, eſt ut baſis AT & propter Triangula ſimilia DTF, ATP eſt $DF:TF = AP:AT$; & jungendo terminos ſecundæ rationis cum terminis primæ eſt $DF + AP$ (ſive BP) $: TF + AT$ (ſive BD) $= AP:AT$, eſt ergo $AT = \frac{AP \times BC}{BP}$ ſive ob datum BD, AT eſt ut $\frac{AP}{BP}$.

142. In iſto caſu velocitas AP eſt ad velocitatem quam corpus tempore DAT ſive $\frac{AP}{BP}$, in ſpatio non reſiſtente aſcendendo amittere poſſet, ut BP ad AB. Nam velocitas in medio non reſiſtente tempori atquè ideò areæ DAT ſive rectæ AT proproportionalis eſt; in medio reſiſtente eſt ut AP, & in medio utroque ubi quàm minima eſt, accedit ad rationem æqualitatis; nam cum capiatur $BD = AB$, ratio linearum AP, AT, in puncto A ubi quàm minima eſt, accedit ad rationem linearum AF, FD quæ eſt æqualitatis. Quare velocitas AP, in medio reſiſtente erit ad velocitatem in medio non reſiſtente eodem tempore DAT amiſſam vel acquiſitam ut AP ad AT; hoc eſt ob Triangula ſimilia APT, BPD ut BP ad BD vel AB. Q. E. D.

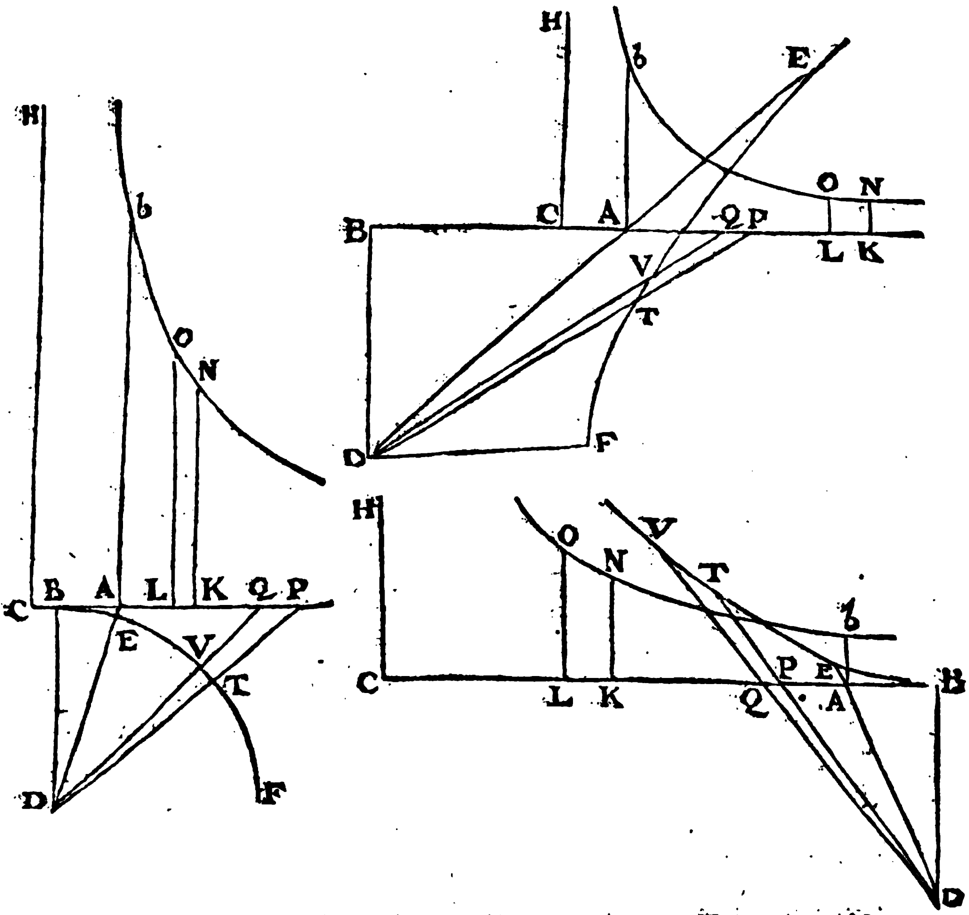


143. Ex formulis quas (19) dedimus facilè intelligitur quomodo ad hoc Theorema X. deveniatur. Nam ſi dicatur gravitas g, velocitas v, reſiſtentia $2av + vv$, & tempus t; corpore aſcendente erit (16. 17) $g\,dt + 2av\,dt + vv\,dt = -dv$, & ideò $dt = \frac{-dv}{vv + 2av + g}$. Ponatur $v + a = x$, & ideò $dv = dx$, & $vv + 2av = xx - aa$, fiet $dt = \frac{-dx}{xx + g - aa}$. Undè ſi fuerit $g = aa$, erit $dt = \frac{-dx}{xx}$; ſi $g - aa = bb$, erit $dt = \frac{-dx}{xx + bb}$. Si $g - aa = -bb$ erit $dt = \frac{-dx}{xx - bb}$. Fluens quantitatis $-\frac{dx}{xx}$, eſt $\frac{1}{x}$, fluens quantitatis $\frac{-dx}{xx + bb}$, pendet a quadraturâ ſectoris circularis (107), fluens quantitatis $\frac{-dx}{xx - bb}$, à quadraturâ ſectoris hyperbolici; atquè hi ſunt tres caſus pro corporis aſcenſu; pro deſcenſu verò eſt (19) $g\,dt - 2av\,dt - vv\,dt = dv$, & ideò $ds = \frac{dv}{g - 2av - vv} = \frac{dx}{g + aa - xx} = \frac{dx}{bb - xx}$, ponendo $v + a = x$ & $g + aa = bb$, fluens autem quantitatis $\frac{dx}{bb - xx}$, pendet a quadraturâ hyperbolæ.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XI.

Iiſdem poſitis, dico quod ſpatium aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum, eſt ut differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujuſdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progreſſione arithmeticâ; ſi vires ex reſiſtentiâ & gravitate compoſitæ ſumantur in progreſſione geometricâ.

Capiatur *AC* in (fig. tribus ultimis) gravitati, & *AK* reſiſtentiæ proportionalis. Capiantur autem ad eaſdem partes pun-



cti *A* ſi corpus deſcendit, aliter ad contrarias. Erigatur *Ab*, quæ ſit ad *DB* ut *DBq* ad 4 *BAC*: & deſcriptâ ad aſymp-

totos rectangulas CK, CH hyperbolâ bN, erectaque KN ad CK perpendiculari, ([t]) area $AbNK$ augebitur vel diminuetur in progreſſione arithmeticâ, ([u]) dum vires CK in progreſſione geometricâ ſumuntur. ([x]) Dico igitur quòd diſtantia corporis ab ejus altitudine maximâ ſit ut exceſſus areæ $AbNK$ ſupra aream DET.

Nam cùm AK ſit ut reſiſtentia, id eſt, ut $APq + 2BAP$; aſſumatur data quævis quantitas Z, & ponatur AK æqualis $\frac{APq+2BAP}{Z}$; & (*per hujus lemma* 11.) erit ipſius AK momentum KL æquale $\frac{2APQ+2BA \times PQ}{Z}$ ſeu $\frac{2BPQ}{Z}$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ æquale $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ ([z]) ſeu $\frac{BPQ \times BD\ cub.}{2Z \times CK \times AB}$.

Caſ. 1. Jam ſi corpus aſcendit, ([a]) ſitque gravitas ut $ABq + BDq$ exiſtente BET circulo (in figurâ primâ) linea ([b]) AC, quæ gravitati proportionalis eſt, erit $\frac{ABq+BDq}{Z}$, & ([c]) DPq ſeu $APq + 2BAP + ABq + BDq$ erit $AK \times Z +$

(t) * *Area AbNK augebitur vel &c.* (380. Lib. 1.).

(u) * *Dum vires CK &c.* Sunt enim vires acceleratrices vel retardatrices ut C K, ſiquidem in corporis aſcenſu vis retardatrix eſt A C + A K, ſeu ſumma virium gravitatis & reſiſtentiæ, & in deſcenſu vis acceleratrix eſt A C − A K = C K ſeu exceſſus vis gravitatis ſupra reſiſtentiam (18).

(x) * *Dico igitur quod diſtantia corporis aſcendentis ab ejus altitudine maximâ* & diſtantia deſcendentis à puncto quietis & quo decidit *ſit ut exceſſus* &c.

(z) * *Seu &c.* Nam (*per theor.* 4. *de hyp.*) eſt LO : Ab = CA : CK, & per conſtr.) Ab : DB = DB² : 4BA×AC, ideoque (ex æquo) LO : DB = DB² : 4BA × CK, & hinc $LO = \frac{DB^3}{4CK \times BA}$. Quarè momentum $KLON = LO \times KL = \frac{2BPQ \times LO}{Z} = \frac{BPQ \times BD^3}{2Z \times CK \times AB}$.

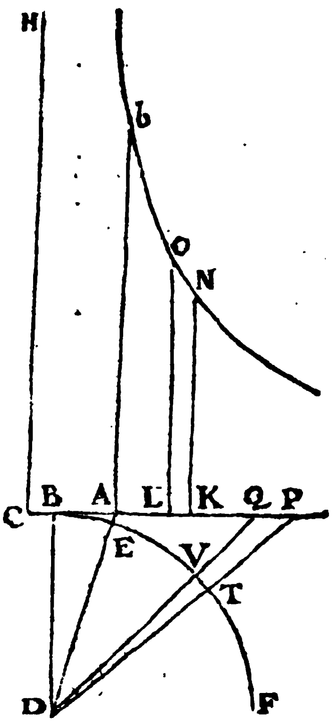
(a) * *Sitque gravitas &c.* In caſ. 1°. prop. 13. gravitas erat ut $DA^2 = AB^2 + BD^2$.

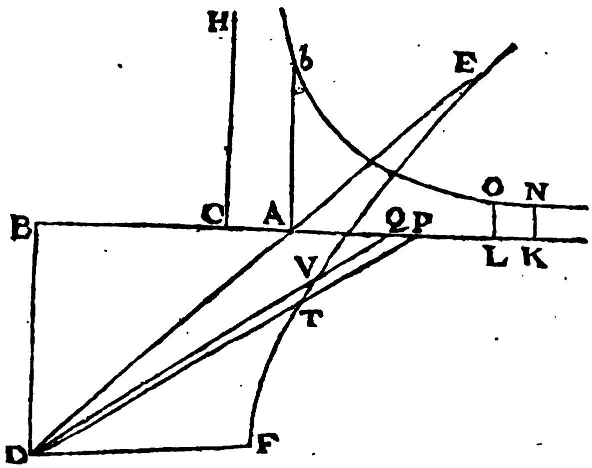
(b) * *Linea AC &c.* Eſt enim in caſ. 1°. prop. 13. gravitas ad reſiſtentiam ut $AB^2 + BD^2$ ad $AP^2 + 2BAP$, & (per hyp.) ut A C ad A K, ſeu $\frac{AP^2+2BAP}{Z}$. Quarè erit $AB^2 + BD^2$ ad $AP^2 + 2BAP$ ut A C ad $\frac{AP^2+2BAP}{Z}$, & hinc habetur $AC = \frac{AB^2+BD^2}{Z}$, & $AC \times Z = AB^2 + BD^2$.

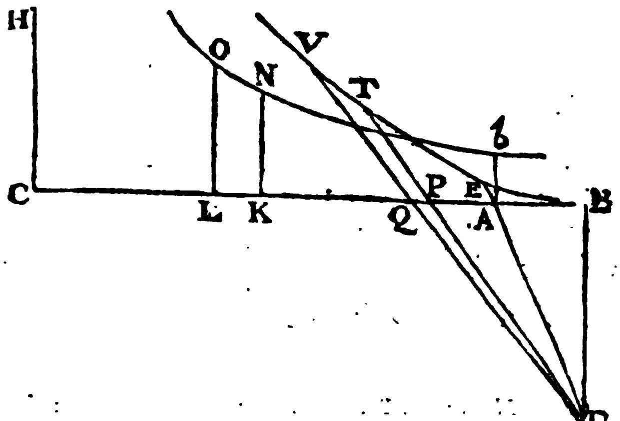
(c) * *Et DPq &c.* Ob angulum DBP rectum, & quia $AK \times Z = AP^2 + 2BAP$, atque $AC \times Z = AB^2 + BD^2$, ut ex ſuperioribus patet.

$AC \times Z$ ſeu $CK \times Z$; (d) ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DTq vel DBq ad $CK \times Z$.

Caſ. 2. Sic corpus aſcendit, & gravitas ſit ut $ABq - BDq$,







(e) linea AC (in figurâ ſecundâ) erit $\frac{ABq - BDq}{Z}$, & (f) DTq erit ad DPq ut DFq ſeu DBq ad $BPq - BDq$ ſeu $APq + 2BAP + ABq - BDq$, id eſt, ad $AK \times Z +$ $AC \times$

(d) * *Ideòque area DTV &c.* Nam (ex dem. in 1°. caſu prop. 13.) area D T V eſt ad aream D P Q, ut DT^2 vel DB^2 ad DP^2, & eſt $DP^2 = CK \times Z$.

(e) * *Linea AC &c.* Patet ut in primo caſu hujus. 143

(f) *Et DTq erit ad DPq.* Patet (ex dem. in caſ. 2°. prop. 13.)

$AC \times Z$ ſeu $CK \times Z$. (g) Ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$.

Caſ. 3. Et eodem argumento, ſi corpus deſcendit, & propterea gravitas ſit ut $BDq - ABq$, & linea AC (in figurâ tertiâ) æquetur $\frac{BDq - ABq}{Z}$ (h) erit area DTV ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$: ut ſupra.

Cum igitur areæ illæ ſemper ſint in hâc ratione; ſi pro areâ DTV, quâ momentum temporis ſibimet ipſi ſemper æquale exponitur, ſcribatur determinatum quodvis rectangulum, putà $BD \times m$, erit area DPQ, id eſt, $\frac{1}{2} BD \times PQ$, ad $BD \times m$ ut $CK \times Z$ ad BDq. Atque inde fit $PQ \times BD$ *cub.* æquale $2 BD \times m \times CK \times Z$, & areæ $AbNK$ (i) momentum $KLON$ ſuperius inventum fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Auferatur areæ DET momentum DTV ſeu $BD \times m$, & reſtabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Eſt igitur differentia momentorum, id eſt, momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; & propterea ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$ ut velocitas AP, id (k) eſt, ut momentum ſpatii quod corpus aſcendendo vel deſcendendo deſcribit. Ideoque differentia arearum & ſpatium illud proportionalibus momentis creſcentia vel decreſcentia & ſimul incipientia vel ſimul evaneſcentia, (l) ſunt proportionalia. *Q. E. D.*

Co-

(g) * *Ideoque area DTV &c.* Nam (ex dem. in 2°. caſ. prop. 13.) area DTV, eſt ad aream DPQ, ut BD^2 ad $BD^2 - BP^2 = BD^2 - AB^2 - 2BAP - AP^2 = AC \times Z - AK \times Z = CK \times Z$.

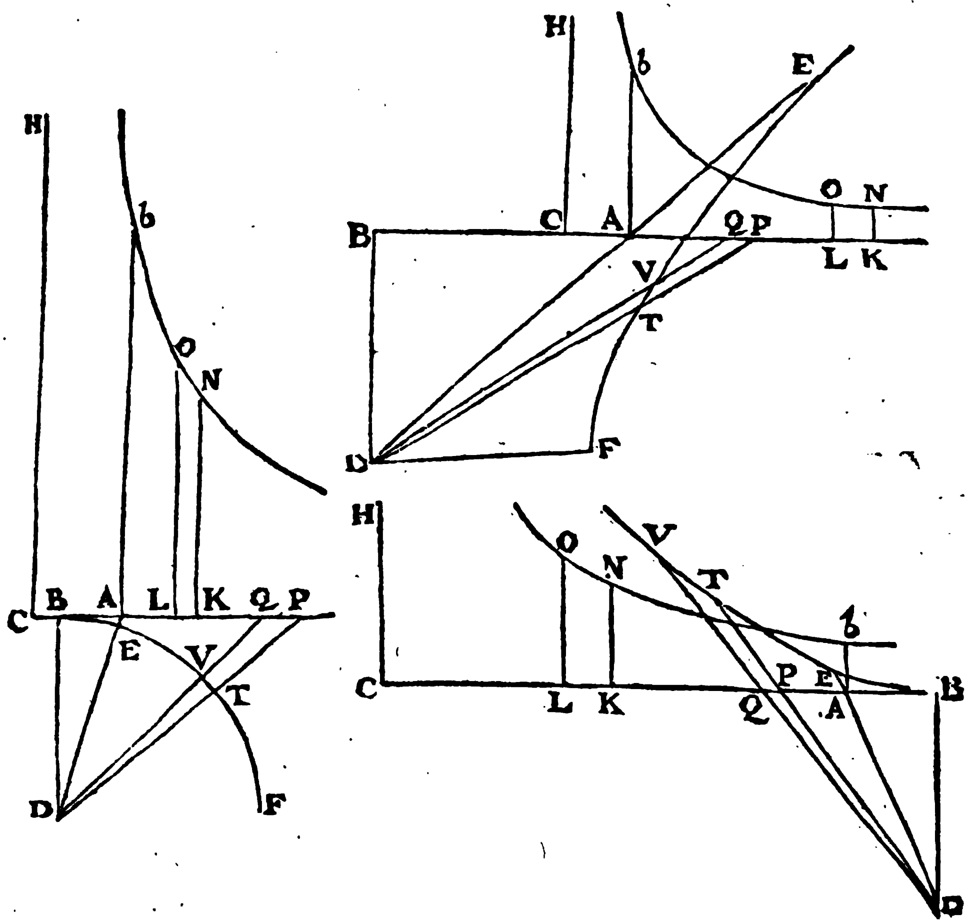
(h) * *Erit area DTV.* (Ex demonſtratis in 3°. caſ. prop. 13.) area DTV eſt ad aream DPQ, ut BD^2 ad $BD^2 - BP^2 = BD^2 - AB^2 - 2BAP - AP^2 = AC \times Z - AK \times Z = CK \times Z$.

(i) * *Momentum KLON ſuperius inventum* eſt $\frac{BPQ \times BD^3}{2Z \times CK \times AB} = \frac{BP \times PQ \times BD^3}{2Z \times CK \times AB}$. Quarè cum ſit $PQ \times BD^3 = 2BD \times m \times CK \times Z$, erit $KLON = \frac{BP \times BD \times m}{AB}$.

(k) * *Id eſt ut momentum ſpatii.* Nam dato temporis momento, momentum ſpatii eſt ut velocitas (11.).

(l) * *Sunt proportionalia.* (Per coroll. Lem. 4. Lib. 1.) Dum autem evaneſcit AP, ſeu velocitas, evaneſcit quoque reſiſtentia AK, cum areâ AbNK, & tempore DTE.

Corol. Si longitudo, quæ oritur applicando aream DET ad lineam BD, dicatur M; & longitudo alia V ſumatur in eâ ratione ad longitudinem M, quam habet linea DA ad lineam DE: ſpatium, quod corpus aſcenſu vel deſcenſu toto in medio reſiſtente deſcribit, erit ad ſpatium, quod corpus in medio



non reſiſtente è quiete cadendo eodem tempore deſcribere poteſt, ut arearum prædictarum differentia ad $\frac{BD \times V^2}{AB}$: ideoque ex dato tempore datur. Nam ſpatium in medio non reſiſten-

ſtente eſt in duplicatâ ratione temporis, ſive (m) ut V^2; & ob datas BD & AB ut $\frac{AD \times V^2}{AB}$. (n) Hæc area æqualis eſt areæ $\frac{DAq \times BD \times M^2}{DEq \times AB}$, & (o) ipſius M momentum eſt m; & propterea hujus areæ momentum eſt $\frac{DAq \times BD \times 2M \times m}{DEq \times AB}$. Hoc autem momentum eſt ad momentum differentiæ arearum prædictarum DET & $AbNK$, viz. ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, ut $\frac{DAq \times BD \times M}{DEq}$ ad $\frac{1}{2} BD \times AP$, ſive (p) ut $\frac{DAq}{DEq}$ in DET ad DAP, ideoque, ubi areæ DET & DAP quam minimæ ſunt, (q) in ratione æqualitatis. Area igitur $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & differentia arearum DET & $AbNK$, quando omnes hæ areæ quam minimæ ſunt, æqualia habent momenta; (r) ideoque ſunt æquales. Unde cum velocitates, & propterea etiam ſpatia in medio utroque in principio deſcenſûs vel fine aſcenſûs ſimul de-

(m) * *Sivè ut* V^2. Nam ob datas BD, DA, DE, longitudo quæ æquatur $DET \times \frac{DA}{BD \times DE}$ (per hyp.) eſt ut area DET, ſeu ut tempus. Spatium autem in medio non reſiſtente eſt in duplicatâ ratione temporis (27. Lib. 1.) ideoque ut V^2.

(n) * *Hæc area.* Quoniam (per hyp.) $V : M = DA : DE$, erit $V = \frac{DA \times M}{DE}$ & $V^2 = \frac{DA^2 \times M^2}{DE^2}$, adeoque $\frac{BD \times V^2}{AB} = \frac{DA^2 \times BD \times M^2}{DE^2 \times AB}$.

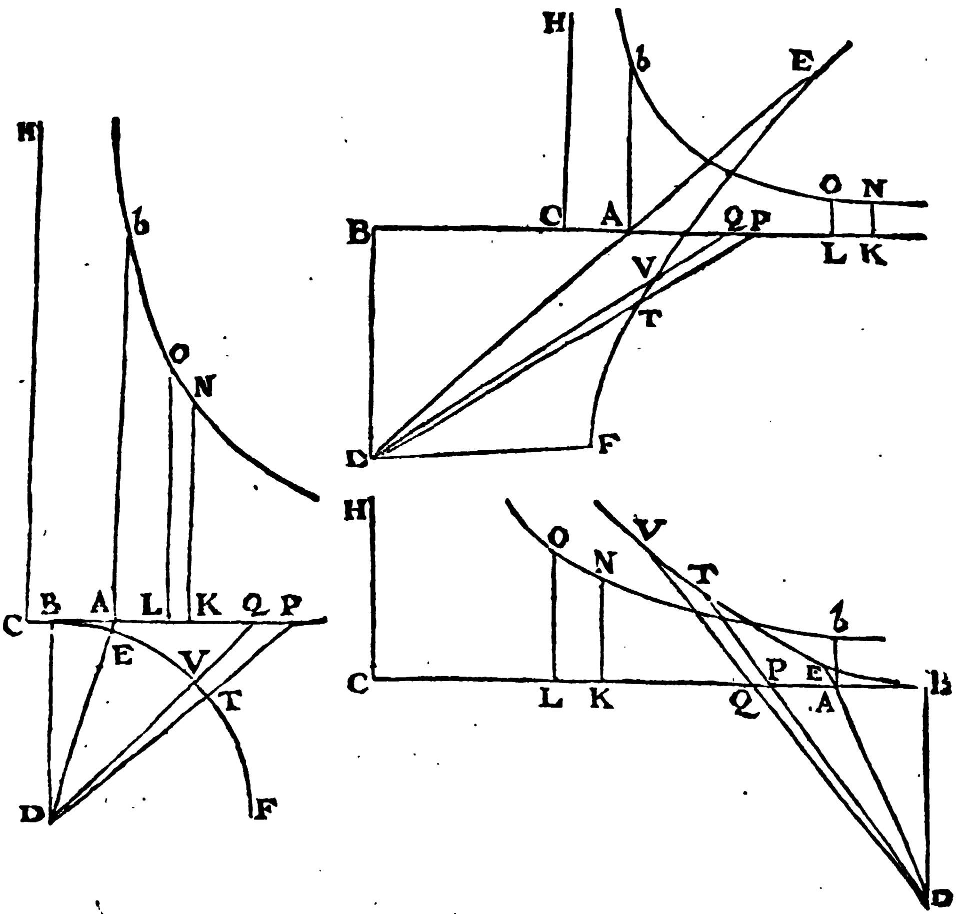
(o) * *Et ipſius M momentum eſt m.* Cùm enim ſit (per hyp.) $M = \frac{DET}{BD}$, momentum ipſius M, erit $\frac{DTV}{BD}$, ſed ſuperiùs ſupponebatur $DTV = BD \times m$; Quarè momentum ipſius M, eſt m; Et ideò momentum quadrati M^2 eſt $2M \times m$ (per caſ. 3. Lem. hujus) & *propereà* ob datas DA, BD, DE & AB, *hujus areæ momentum* &c.

(p) * *Sivè ut* $\frac{DAq}{DEq}$ *in DET &c.* Ob $M = \frac{DET}{BD}$, ideoque $M \times BD = DET$, & $\frac{1}{2} BD \times AP = DAP$.

(q) * *In ratione æqualitatis.* Ubi enim areæ DET & DAP quam minimæ ſunt, fit $DET : DAP = DE^2 : DA^2$, ideóque $\frac{DA^2}{DE^2} \times DET = DAP$.

(r) *Ideóque ſunt æquales.* Quandò ſunt quam minimæ.

deſcripta accedant (f) ad æqualitatem; ideoque tunc ſint ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & arearum DET & $AbNK$ dif-

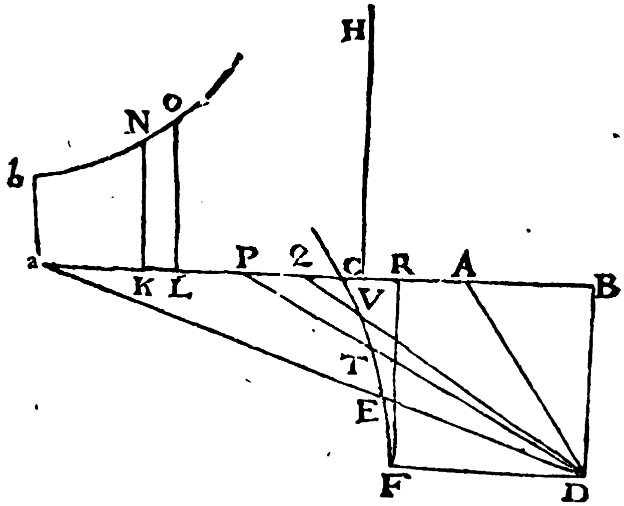


ferentia; & præterea cùm ſpatium in medio non reſiſtente ſit perpetuò ut $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & ſpatium in medio reſiſtente ſit perpetuò ut arearum DET & $AbNK$ differentia: neceſſe eſt, ut ſpa-

(f) *Accedant ad æqualitatem.* Ob reſiſtentiam cum velocitate naſcentem vel evaneſcentem, manente gravitate.

144. Conſtructione casûs 3i. propoſitio-

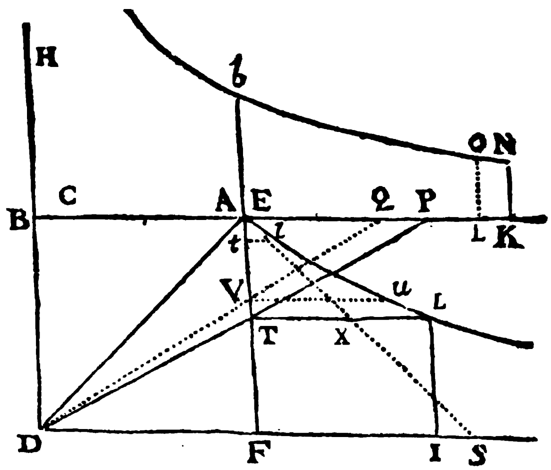
ſpatia in medio utroque, in æqualibus quibuſcunque temporibus deſcripta, ſint ad invicem ut area illa $\frac{CD \times V^2}{AB}$, & arearum DET & $AbNK$ differentia. *Q. E. D.*



tionis hujus 14[æ]. uti poſſumus ad determinandum motum corporis verticaliter deorſum projecti cum velocitate quæ terminali minor eſt. Nam ſi æqualis ipſi fuerit, motus eſt æquabilis; ſi verò celeritas projectionis terminali major ſit, paulò mutanda erit caſûs tertii conſtructio. Iiſdem enim poſitis in not. 139. capiatur A C gravitati & A K reſiſtentiæ proportionalis, ità ut ſit C inter A & K, quod reſiſtentia gravitate major ſupponatur. Sit A a velocitas projectionis terminali major; erigatur perpendicularis a b, quæ ſit ad D B, ut DB^2, ad $4\,AB \times Ca$, & deſcriptâ ad aſymptotos rectangulas C K, C H hyperbolâ b N, erectâque K N ad C K, perpendiculari, area a b N K augebitur in progreſſione arithmeticâ, dum vires C K in progreſſione geometrica minuuntur. Spatium autem tempore D E T deſcriptum erit ut exceſſus areæ a b N K, ſuprà aream D E T; nam ponatur, (*ut in demonſtratione prop.* 14.) $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$, & ideò $KL = \frac{2BPQ}{Z}$ atque areæ ab N K momentum K L O N, $= \frac{2BPQ \times LO}{Z} = \frac{BPQ \times DB^3}{2Z \times AB \times CK}$. Cùm gravitas ſit ut $BD^2 - AB^2$, erit $AC = \frac{BD^2 - AB^2}{Z}$, & area D T V ad aream D P Q ut BD^2 ad $BP^2 - BD^2$ (136) ſive $AP^2 + 2BAP + AB^2 - BD^2$, ſive $AK \times Z - AC \times Z$, vel $CK \times Z$. Si itaque pro areâ conſtante D T V, ſcribatur $BD \times m$, erit area D P Q, id eſt, $\frac{1}{2} BD \times PQ$ ad $BD \times m$, ut $CK \times Z$ ad BD^2, atque indè ſit $PQ \times BD^3 = 2BD \times m \times CK \times Z$, & areæ a b N K momentum K L O N ſuperiùs inventum ſit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$ auferatur areæ D E T momentum D T V ſeu $BD \times m$ & reſtabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Eſt igitur differentia momentorum, id eſt, momentum differentiæ arearum ut velocitas A P, id eſt,

eſt; ut momentum ſpatii quod corpus deſcribit, ideòque differentia arearum ut ſpatium deſcriptum.

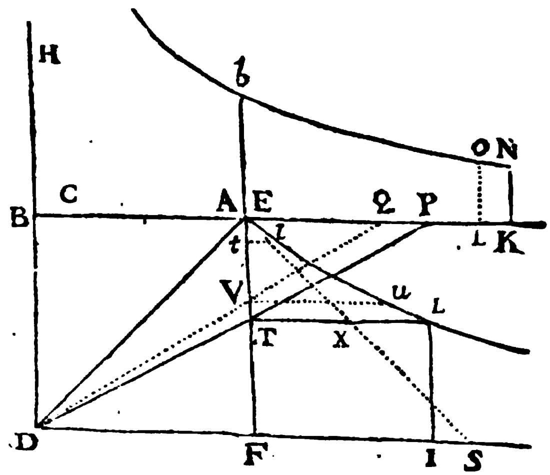
145. Hinc ſpatium tempore D E T, velocitate uniformi A a deſcriptum eſt ad ſpatium eodem tempore deſcriptum in medio reſiſtente ut factum A a × D E T ad arearum a b N K & D E T differentiam in A B ductam. Nam ſpatium tempore D E T, velocitate uniformi A a deſcriptum, eſt ut A a × D E T (5. lib. 1.) & ſpatii hujus momentum eſt ut A a × D T V; momentum autem ſpatii in medio reſiſtente deſcripti eſt ut A P × D T V, ſeu ut velocitas in momentum temporis ducta (12) & quia evaneſcente D E T, ſit A P = A a, hæc momenta A a × D T V, A P × D T V, initio temporis æqualia ſunt, ſicut & ſpatia initio deſcripta. Sed A P × D T V = A P × B D × m & momentum differentiæ arearum a b N K & D E T; eſt $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$ (144). Ergo A P × D T V æquale eſt momento differentiæ arearum a b N K & D E T per A B ducto, unde manifeſtum eſt propoſitum. 145.



146. Si corporis aſcendentis velocitas exponatur per longitudinem A P, & reſiſtentia per A K quæ ponatur eſſe ut $AP^2 + 2BAP$, ita ut aſſumptâ datâ quâvis quantitate Z, ſit $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$; vis autem gravitatis exponatur per A C, quæ ſit ſemper ut AB^2, ita ut ſit $AC = \frac{AB^2}{Z}$ eademque conſtructio fiat quæ (not. 141.) *& in A erigatur perpendiculum $Ab = \frac{AB^2}{4CA}$. Denique erecto perpendiculo in C deſcribatur ad Aſymptotos Rectangulos C K, C H hyperbolâ b N, erectâque K N ad C K perpendiculari, area A b N K diminuetur in progreſſione Arithmeticâ dum vires C K in progreſſione Geometricâ decreſcente ſumuntur. Et diſtantia corporis ab ejus altitudine maximâ erit ut exceſſus areæ A b N K ſupra Triangulum D E T.

Cùm enim ſit $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$ erit ipſius A K momentum K L (*per lib. 2. Lem. II.*) $= \frac{2APQ + 2BA \times PQ}{Z} = \frac{2BPQ}{Z}$ & areæ A b N K momentum $KLON = \frac{2BPQ \times LO}{Z}$, & quia, per naturam hyp. eſt $CK : CA = Ab\left(\text{ſive } \frac{AB^2}{4CA}\right) : LO$, eſt $LO = \frac{AD^2}{4CK}$, ideoque $KLON =$

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. III. Prop. XIV. Theor. XI.



$\frac{BP\times AB^2\times PQ}{2Z\times CK}$. Eſt verò area DTV ad aream DPQ ut DT^2 ad DP^2, ſive etiam ob Triangula ſimilia TDF, BDP, ut DF^2 ſive AB^2 ad BP^2, ſeu $AP^2+2BAP+AB^2$ (*per* 4. 2. *El.*) hoc eſt (quia ex hypotheſi eſt, $AP+2BAP=AK\times Z$, & $AB^2=CA\times Z$) ad $CK\times Z$. Hinc ſi pro area DPQ ſcribatur ejus valor $\frac{1}{2}BD\times PQ=\frac{1}{2}AB\times PQ$, erit area $DTV=\frac{AB\times AB^2\times PQ}{2Z\times CK}$, quæ valorem conſtantem exprimere debet, quia momentum temporis ſibi ſemper æquale exponit, ejus itaque loco ſcribatur Rectangulum $AB\times m$ in quo *m* erit momentum conſtans, eſt $m=\frac{AB^2\times PQ}{2Z\times CK}$, erit ergo areæ AbNK momentum ſuperius inventum $\frac{BP\times AB^2\times PQ}{2Z\times CK}=BP\times m$, igitur differentia momentorum KLON & DTV, eſt $BP\times m-AB\times m=AP\times m$ & propterea ob datum *m* ut velocitas AP, id eſt, ut momentum ſpatii quod corpus aſcendendo deſcribit, & quo minuitur corporis diſtantia ab ejus altitudine maximâ. Ideoque differentia arearum & ſpatium illud proportionalibus momentis decreſcentia, ſimulque evaneſcentia ſunt proportionalia.

Verùm in iſto caſu facilius quam per methodum *Newtonianam* obtinetur ſpatium à corpore aſcendente uſque ad quietem in medio reſiſtente deſcriptum, & ejus relatio ad ſpatium in medio non reſiſtente eodem tempore percurrendum: Etenim per punctum A aſymptotis DB, DF deſcribatur hyperbola, & ex puncto T ducatur perpendiculum T*L* ad Hyperbolam uſque, Trilineum AT*L* erit ut ſpatium quæſitum. Ducatur *L*I ad aſymptotum perpendicularis, erit FI = TL & TF = LI, ſed ex natura Hyperbolæ eſt DF : DI = *L*I (ſive TF) : AF, & dividendo DF : FI (ſive T*L*) = TF : AT, hoc eſt alternando DF : TF = T*L* : AT (ſed per 141) eſt DF : TF = AP : AT, ergo eſt AP = TL, itaque ducta ex V parallela Vu, erit VT*L*u, momentum areæ AT*L* = VT × T*L*, eſt autem VT momentum temporis, & TL = AP ipſa velocitas eo momento, ergo VT × T eſt ut momentum ſpatii eo momento deſcripti, ergo tota area AT*L* eſt ut ſpatium deſcriptum.

Ducatur præterea tangens AS & deſignet At ultimum temporis momentum, & ducta tl, Trilineum evaneſcens AT*L* æquale fiet Triangulo Atl, & eo ultimo momento ſpatia tam in medio reſiſtente quam in non reſiſtente deſcripta erunt æqualia, ideoque per idem triangulum Atl exprimentur; ſpatia verò in medio non reſiſtente deſcripta ſunt ut Quadrata temporum, ideoque ſpatium tempore At in medio non reſiſtente deſcriptum erit ad ſpatium tempore AT in eodem medio deſcriptum ſicut $\overline{At}^2$ ad $\overline{AT}^2$, ſive ut area trianguli Atl ad aream ATX; ſpatium verò in medio reſiſtente deſcriptum tempore At erit ad ſpatium tempore AT in eodem medio deſcriptum ut Atl ad trilineum AT*L*, unde liquet quod ſpatium in medio non reſiſtente deſcriptum, aſcendendo ad quietem uſque, erit ad ſpatium in medio reſiſtente deſcriptum, ut ATX ad AT*L*, exiſtente velocitate, in medio non reſiſtente, ut TX, & in medio reſiſtente, ut TL.

Scho-

Scholium.

([t]) Reſiſtentia corporum ſphæricorum in fluidis oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, & partim ex denſitate medii. Et reſiſtentiæ partem illam, quæ oritur ex denſitate fluidi, diximus eſſe in duplicata ratione velocitatis; pars altera, quæ oritur ex tenacitate fluidi, eſt uniformis, ſive ut momentum temporis: ideoque jam pergere liceret ad motum corporum, quibus reſiſtitur partim vi uniformi ſeu in ratione momentorum temporis, & partim in ratione duplicatâ velocitatis. Sed ſufficit aditum patefeciſſe ad hanc ſpeculationem in propoſitionibus VIII. & IX. quæ præcedunt, & eorum corollariis. In ([u]) iiſdem utique pro corporis aſcendentis reſiſtentiâ uniformi, quæ ex ejus gravitate oritur, ſubſtitui poteſt reſiſtentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii, quando corpus ſolâ vi inſitâ movetur; & corpore rectâ aſcendente addere licet hanc uniformem reſiſtentiam vi gravitatis; eandemque ſubducere, quando corpus rectâ deſcendit. Pergere etiam liceret ad motum corporum, quibus reſiſtitur partim uniformiter, partim in ratione velocitatis, & partim in ratione duplicatâ velocitatis. Et viam aperui in propoſitionibus præcedentibus XIII. & XIV. in ([x]) quibus etiam reſiſtentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii pro vi gravitatis, ſubſtitui poteſt, vel cum eâdem, ut prius, componi. Sed propero ad alia.

SEC-

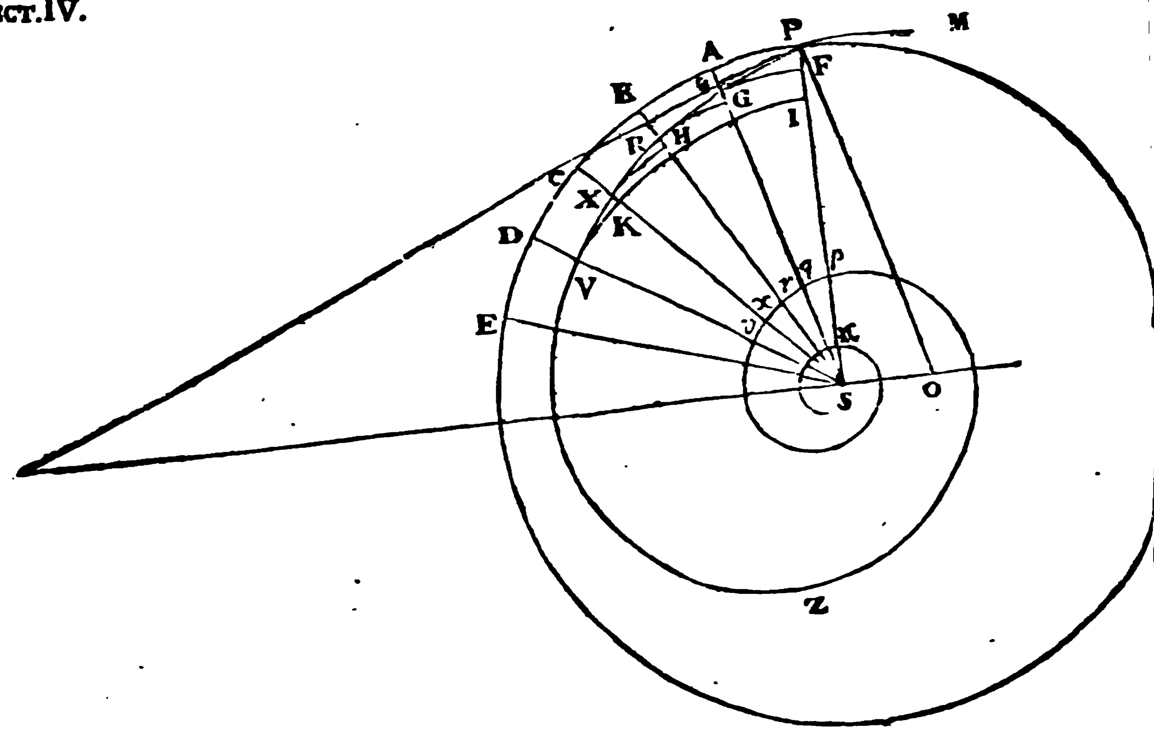
(t) (*) *Reſiſtentia corporum* (Vid. Lemmum. 1.)

(u) (*) *In iiſdem utique* (105).

(x) * *In quibus etiam reſiſtentia uniformis*, hoc eſt, ſi corpus ſolâ vi inſitâ feratur, in conſtructionibus prop. 13. & 14., quæ ſunt pro corporis aſcenſu, loco gravitatis ſubſtituenda eſt reſiſtentia uniformis quæ oritur ex tenacitate medii; ſi corpus aſcendens vi gravitatis etiam urgeatur, quantitas illa quæ ſolam gravitatem exponebat, ſummam gravitatis & reſiſtentiæ uniformis in prædictis conſtructionibus exponet. Tandem ſi corpus vi gravitatis deſcendat, eadem quantitas quæ ſolam gravitatem exponebat, exceſſum gravitatis ſuprà reſiſtentiam uniformem in conſtructionibus quæ ſunt pro deſcenſu repræſentabit (cæteris manentibus.) 146.

SECTIO IV.

De corporum circulari motu in mediis reſiſtentibus (*).



(*) NEWTONUS in hâc ſectione præcipuas ſupponit Logarithmicæ ſpiralis proprietates, poſtulat igitur inſtituti noſtri ratio ut de illâ curvâ aliquid præmittamus.

147. Circulus P A E L, centro S, & radio quovis S P deſcriptus diviſus ſit in arcus quotlibet æquales P A, A B, B C, C D &c., ſintque radiorum P S, A S, B S, C S &c., partes P S, Q S, R S, X S &c. in continuâ progreſſione geometricâ, puncta P, Q, R, X &c., erunt in *Spirali Logarithmicâ* in quâ proindè ſi radii Q S, R S, X S &c., ſint numeri, arcus circuli P A, P B, P C &c., ſicut & anguli P S Q, P S R, P S X &c., erunt ut illorum numerorum Logarithmi, prorsùs ut in vulgari Logarithmicâ axis partes ſunt ut Logarithmi ordinatarum correſpondentium.

148. Quoniam autem progreſſio geometrica in infinitum decreſcere & creſcere poteſt, manifeſtum eſt. ſpiralem Logarithmicam utrinquè tam ad centrum S accedendo quàm ab eodem versùs M recedendo per gyros infinitos continuari poſſe, continuatâ progreſſione radiorum decreſcentium vel creſcentium circà centrum S, ad quod idcircò curva decreſcentibus radiis proportionalibus, magis magiſque accedit, licet numquam illud poſſit attingere, ſive ut lòqui amant, licet illud centrum non attingat niſi poſt infinitas revolutiones.

149. Angulus S Q R, quem radius quilibet S Q, cum curvâ ad eaſdem partes conſtituit conſtans eſt; ſi quidem evaneſcentibus arcubus æqualibus P A, A B, B C &c., triangula evaneſcentia P S Q, Q S R, R S X &c., ſimilia fiunt propter latera circà æquales ad centrum angulos proportionalia (147) & ideò alii anguli homolo-

gi

gi SPQ, SQR, SRX &c., & PQS, QRS, RXS, æquales ſunt.

150. Quoniam itaque ſpira quælibet PQRZp, pqrzπ &c., totidem triangulis PQS & qqS, QRS & qrS &c. ſimilibus ſimiliterque poſitis diviſa eſt, ſpiræ omnes quæ à radio poſitione dato SP, ad eundem radium ductæ ſunt, inter ſe ſimiles radiiſque correſpondentibus proportionales erunt, id eſt PS : pS = PQRZp : pqrzπ &c. Atquè hinc ſequitur (147) tam ſpiras omnes quàm radios ipſis correſpondentes ad centrum uſque in progreſſione geometricâ decreſcere, ſunt enim PS, pS, πS, &c. progreſſionis geometricæ termini æquidiſtantes ob æqualem angulorum æqualium PSQ, QSR, pSq, qSr, &c. numerum in ſingulis ſpiris comprehenſum undè radiorum quoque differentiæ Pp, pπ &c. in eâdem geometricâ progreſſione decreſcunt.

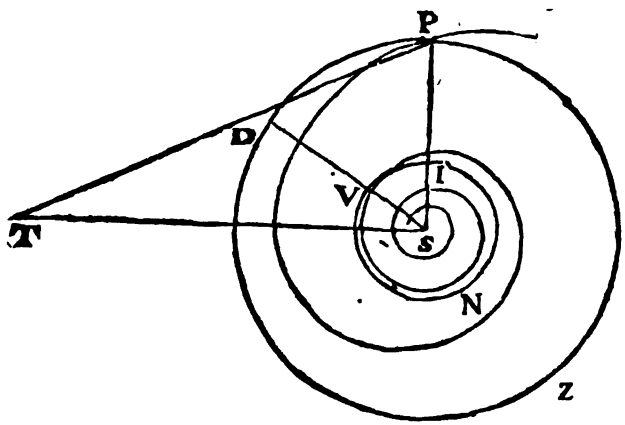
151. Ductâ rectâ PT ſpiralem tangente in P, & rectâ PO ad eandem perpendiculari, per centrum S erigatur ad radium SP perpendiculum TSO rectis PT & PO occurrens in T & O, longitudo ſpiralis PZpzπS, ad centrum uſque S, æquabitur tangenti PT, eritque proindè ad radium SP in datâ ratione PT ad SP, vel OP ad OS. Nam centro S, radiis SQ, SR, SX, SV &c. infinitè propinquis deſcripti ſint arcus circulares QF, RG, XH, VK &c., & ob angulos QFP, RGQ, XHR rectos, anguloſque QPF, RQG, XRH &c. æquales (149), triangula evaneſcentia PFQ, QGR, RHX &c. ſimilia ſunt triangulo PST, eſt igitur PT : PS = PQ : PF = QR : QG = RX : RH &c. & compoſite PT : PS = PQ + QR + RX &c. : PF + QG + RH &c. id eſt, ut longitudo ſpiralis ad totum radium PS. Quarè longitudo ſpiralis æquatur tangenti PT. Eſt autem ubique tangens PT ad radium correſpondentem PS, in ratione datâ, ob triangulum PTS ſpecie datum (149) & ob triangula TPS, POS, (*per conſtr.*) ſimilia, eſt etiam OP : OS = PT : PS, ſeu ut longitudo ſpiralis ad radium.

152. Hinc quoque patet quòd ſi centro S & radio quovis VS deſcribatur circulus ſecans ſpiralem in V & radium PS, in I, pars ſpiralis PV erit ad partem PI, radii PS, ut tangens PT ad totum radium PS. Quarè ſi, manentibus circulorum radiis SP, SI, mutetur utcumque angulus TPS, quem ſpiralis ſeu ipſius tangens continet cum radio PS, longitudo ſpiralis tota ad centrum uſquè S, ſicut & longitudo inter duos circulos radiis SP, & SI deſcriptos comprehenſa, erit ut ſpiralis tangens PT, ſeu ut ſecans anguli TPS. Oſtendimus (151) longitudinem ſpiralis æqualem eſſe tangenti PT, & partem ſpiralis PV, inter prædictos circulos contentam, eſſe ad tangentem PT, in 152.
ratione PI ad PS, quæ (*per hyp.*) data eſt; manente autem radio ſeu ſinu toto PS, eſt PT ſecans anguli PTS.

153. Dicantur radius conſtans PS = a, ſubtangens ST = b, arcus quilibet circuli PC vel PCLP + PC, vel 2 PCLP + PC = x, correſpondens ſpiralis radius SX = y, qui creſcente arcu x decreſcit, erit ob triangulorum XKV, PST ſimilitudinem PS : ST = XK : VK, & ob ſectores SVK, SDC ſimiles, SK ſive SX : SC ſeu PS = VK : DC, ideoque ex æquo SX : ST = XK : DC; id eſt, $y : b = -dy : dx = -\frac{b\,dy}{y}$, hinc ſumptis fluentibus $x = Q - b\,L.\,y$, & quia ubi $x = 0$, fit $y = a$, erit $Q = bL.a$, & ideo $x = b\,L.a - b\,L.y = b\,L.\frac{a}{y}$; ſi itaque datus fuerit radius y cum arcu circulari x, ſeu angulo PSC dabitur b ſubtangens anguli ſpiralis, eſt enim $b = \frac{x}{L.\frac{a}{y}}$.

Si verò datus ſit tum arcus x tum ſubtangens b dabitur radius y; Ponatur enim $L.\,h = 1$ & erit $\frac{x}{b} \times L.\,h = L.\,\frac{a}{y}$, adeòque $h^{\frac{x}{b}} = \frac{a}{y}$; $y = \frac{a}{h^{\frac{x}{b}}}$, & hinc etiam $a = y \times h^{\frac{x}{b}}$.

154. Hinc ſi manentibus radiis SP ſeu a, & SV vel SI ſeu y, adeòque & $L.\,\frac{a}{y}$, mutetur utcumque angulus TPS, quem ſpiralis cum radio continet, arcus circularis PD vel x, comprehenſus inter radios SP & SVD, erit ſemper ut ſubtangens ſpiralis ST, ſeu b, quæ, manente radio ſeu ſinu toto PS, eſt ut anguli TPS tangens.



155. Iiſdem poſitis; hoc eſt, manentibus radiis S P ſive a, & S I ſive y, & utcumque mutato angulo T P S, numerus revolutionum ſpiralis inter circulos P D Z P, & I V N I centro S & radiis datis S P S V vel S I deſcriptos eſt ut tangens S T anguli T P S, quem ſpiralis cum medio continet. Sit enim c circumferentia circuli P T Z P, & n numerus integer vel fractus revolutionum ſpiralis a puncto P ad punctum V inter circulos P D Z P, & I V N I, erit (153) $nc = x = b\,L.\frac{a}{y}$; & hinc $n = \frac{b}{c} \times L.\frac{a}{y}$. Quarè ob datas c; a & y; (per hyp.) erit n ut b, id eſt numerus revolutionum inter circulos datos ut ſubtangens ſpiralis S T, ſeu ut tangens anguli T P S, quem ſpiralis cum radio continet.

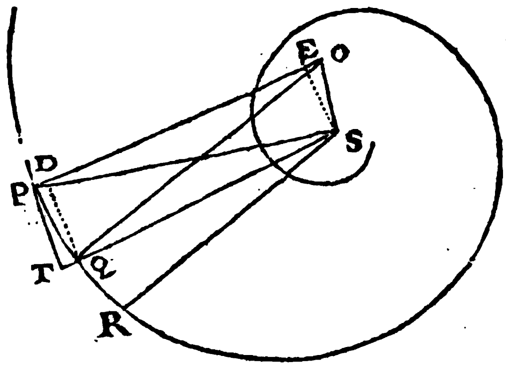
156. Spiralis poſt infinitos ſibi ſuperimpoſitos gyros comprehendit cum radio P S ſpatium duplum trianguli P S T. Iiſdem enim poſitis quæ num. 153. cum ſit (fig. pag. 141.) P S (a) : S T (b) = XK ($-dy$) : VK $= -\frac{bdy}{a}$, erit ſector SVK ſeu SVX $= -\frac{ybdy}{2a}$, & ſumptis fluentibus, ſector S P V $= Q - \frac{by^2}{4a}$; quia verò evaneſcente ſectore S P V, fit $y = a$, erit $Q = \frac{ba^2}{4a}$, & hinc S P V $= \frac{baa - byy}{4a}$. Quarè ubi radius $y = o$, fiet area S P V $= \frac{ba}{4} = \frac{PS \times ST}{4} = \frac{1}{2}$ Triang. P S T.

LEM-

LEMMA III.

Sit P Q R *ſpiralis quæ ſecet radios omnes* SP, SQ, SR, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* PT *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *ſecetque radium* S Q *in* T; *& ad ſpiralem erectis perpendiculis* P O, Q O *concurrentibus in* O, *jungatur* S O. *Dico quod ſi puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* P S O *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* $TQ \times 2PS$ *ad* P Q *quad. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis *O P Q*, *O Q R* ſubducantur anguli æquales *S P Q*, *S Q R*, & manebunt anguli æquales *O P S*, *O Q S*. Ergo circulus qui tranſit per puncta O, S, P tranſibit (y) etiam per punctum *Q*. Coëant puncta *P* & *Q*, & hic circulus in loco coitûs *P Q* tanget ſpiralem, (z) ideoque perpendiculariter ſecabit rectam *O P*. Fiet igitur *O P* diameter circuli hujus, & angulus *O S P* in ſemicirculo rectus. *Q. E. D.*



Ad *O P* demittantur perpendicula *Q D*, *S E*, & (a) linearum rationes ultimæ erunt hujuſmodi: *T Q* ad *P D* ut *T S* vel *P S* ad *P E*, ſeu 2 *P O* ad 2 *P S*; item *P D* ad *P Q* ut *P Q* ad 2 *P O*; & ex æquo perturbatè *T Q* ad *P Q* ut *P Q* ad 2 *P S*. Unde fit *P Q q* æquale $TQ \times 2PS$. *Q. E. D.*

PRO-

(y) * *Tranſibit etiam per punctum Q.* (per prop. 21. lib. 3. Elem.)

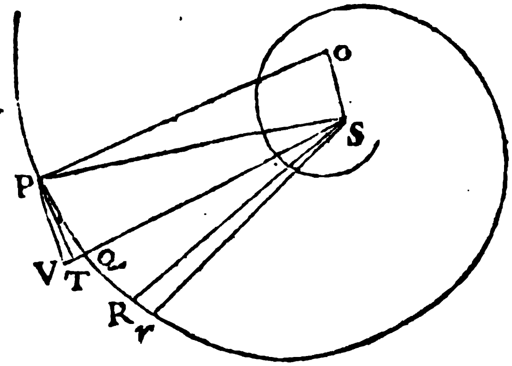
(z) *Ideòque perpendiculariter ſecabit rectam* O P, quæ (*per hyp.*) perpendicularis eſt ad arcum Q P, fiet igitur O P diameter circuli hujus (*per prop.* 19. *lib.* 3. *Elem.*) & angulus O S P in ſemicirculo rectus (*per prop.* 31. *lib.* 3. *Elem.*).

(a) * *Et linearum rationes ultimæ.* Quoniam lineæ P T, D Q, E S ad P O normales, ſunt parallelæ, erit (*per prop.* 10. *lib.* 6. *Elem.*) T Q : P D = T S vel P S : P E, & ob ſimilitudinem triangulorum PSO, P E S, P S : P E = P O : P S, ſeu 2 P O : 2 P S, ideoque T Q : P D = 2 P O : 2 P S. Quia verò radii O P, O Q ſunt ad arcum eva- 156.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. IV. Prop. XV. Theor. XII.

PROPOSITIO XV. THEOREMA XII.

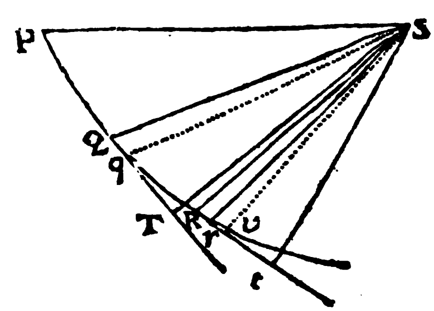
Si medii denſitas in locis ſingulis ſit reciprocè ut diſtantia locorum à centro immobili, ſitque vis centripeta in duplicatâ ratione denſitatis; dico quod corpus gyrari poteſt in ſpirali, quæ radios omnes à centro illo ductos interſecat in angulo dato.



Ponantur quæ in ſuperiore lemmate, & producatur *S Q* ad *V*, ut ſit *S V* æqualis *SP*. Tempore quovis, in medio reſiſtente, deſcribat corpus arcum quàm minimum *P Q*, & tempore duplo arcum quàm minimum *PR*; & decrementa horum arcuum ex reſiſtentiâ oriunda, ſive defectus ab arcubus, qui in medio non reſiſtente iiſdem temporibus deſcriberentur, (b) erunt ad invicem ut quadrata temporum in quibus generantur: Eſt itaque decrementum arcûs *P Q* pars quarta decrementi arcûs *P R*. (c) Unde etiam, ſi areæ *P S Q* æqualis capiatur area *Q S r*,

evàneſcentem P Q perpendiculares, punctum O eſt centrum, P O radius & 2 P O diameter circuli ſpiralem oſculantis in P (121. *lib.* 1.) & (*per lem.* 7. *lib.* 1.) P Q hujus circuli arcus vel chordæ; atque adeo (ex naturâ circuli) abſciſſa P D eſt ad chordam P Q ut P Q ad diametrum 2 P O. Quare *ex æquo perturbatè* &c.

(b) * *Erunt ad invicem.* Cùm enim reſiſtentia per arcum P R conſiderari poſſit tanquam vis retardatrix (4), decrementa arcuum minimorum P Q, P R ex reſiſtentiâ oriunda ſunt ut ſpatia quæ urgente vi acceleratrice reſiſtentiæ æquali corpus deſcriberet iiſdem temporibus quibus deſcribit arcus illos P Q, P R; Quarè decrementa illa ſunt ut quadrata temporum quibus generantur (*per Lem. X. lib.* 1.).



(c) * *Undè etiam ſi area.* Corpus eâ velocitate quam habet in loco P, temporibus æqualibus deſcribat arcus quàm minimos P q, q v, in medio non reſiſtente,

Q S r, erit decrementum arcûs *P Q* æquale dimidio lineolæ *R r*; ideoque vis reſiſtentiæ & vis centripeta ſunt ad invicem ut lineolæ $\frac{1}{2}$ *R r* & *T Q* quas ſimul generant. Quoniam vis centripeta, quâ corpus urgetur in *P*, (d) eſt reciprocè vt *S P q*, & (*per* (e) *lem*. x. *lib*. 1.) lineola *T Q*, quæ vi illâ generatur, eſt in ratione compoſitâ ex ratione hujus vis & ratione duplicatâ temporis quo arcus *P Q* deſcribitur (nam reſiſtentiam in hoc caſu, ut infinitè minorem quàm vis centripeta, negligo) erit *T Q* × *S P q*, id eſt (per lemma noviſſimum) $\frac{1}{2}$ *P Q q* × *S P*, in ratione duplicatâ temporis, (g) ideoque tempus eſt ut *P Q* × √ *S P*; & (h) corporis velocitas, quâ arcus *P Q* illo tempore deſcribitur, ut $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ ſeu $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, hoc eſt, in ſubduplicatâ ratione ipſius *S P* reciprocè. Et ſimili argumento, velocitas quâ arcus *Q R* deſcribitur, eſt in ſubduplicatâ ratione ipſius *S Q* reciprocè. Sunt autem arcus illi *P Q* & *Q R* ut (i) velocitates deſcriptrices ad invicem, id eſt, in ſubduplicatâ ratione *S Q* ad *SP*, ſive ut *S Q* ad $\sqrt{SP \times SQ}$; &

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XV. THEOR. XII.

te, & arcus P Q, Q R in medio reſiſtente, & erit (*ex dem.*) 4 Q q = R v, ſunt autem areæ P S q & q S v æquales (*per prop.* 1. *Lib.* 1.) ideóque ob areas P S Q, & Q S r, etiam æquales (*per hyp.*) erit P S q — P S Q ſeu area Q S q æqualis q S v — Q S r, ſeu r S v — Q S q, & hinc area r S v æqualis eſt 2 Q S q; ſed demiſſis ex centro S ad tangentes Q T & r t per puncta Q & r ductas perpendiculis S T & s t, area evaneſcens Q S q eſt $\frac{1}{2}$ S T × Q q, & area r S v, eſt $\frac{1}{2}$ S t × r v. Quarè S T × Q q æquatur $\frac{1}{2}$ S t × r v, & coeuntibus punctis P & v, fit S t = S T atquè adeo Q q = $\frac{1}{2}$ r v, & 2 Q q = r v. Cùm igitur ſuprà invenerimus 4 Q q = R v, erit 4 Q q — 2 Q q, ſeu 2 Qq = R v — r v = R r, & ideò Q q = $\frac{1}{2}$ R r. Itaque eodem tempore quo reſiſtentia generat decrementum Q q, ſeu $\frac{1}{2}$ R r, vis centripeta quâ corpus à tangente P T (*vid. fig. text.*) ad punctum Q arcûs P Q retrahitur, generat decrementum T Q, & ideò vis reſiſtentiæ eſt ad vim centripetam ut $\frac{1}{2}$ R r ad T Q, (*per cor.* 4. *Lem. X.*) atque hæc omnia generaliter obtinent, quæcumque fuerit tum curva P Q R, cujus proprietates nondum adhibuimus, tum vis centripeta, tum reſiſtentia, tum velocitas corporis. 156.

(d) * *Eſt reciprocè ut S P q* (per hyp.).

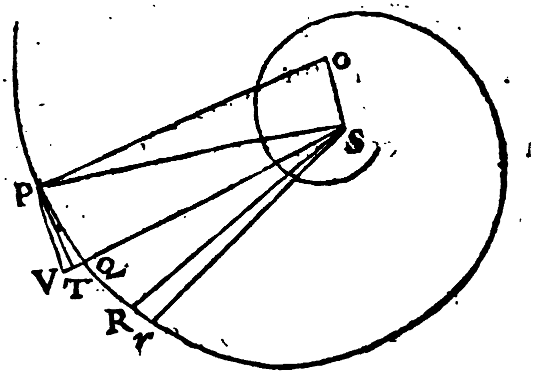
(e) * *Per Lem. X.* (cor. 3.).

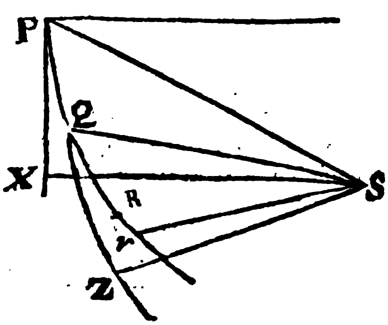
(g) * *Ideoque tempus*. (Neglectâ fractione datâ $\frac{1}{2}$ *eſt ut* &c.

(h) * *Et corporis velocitas*. (14).

(i) * *Ut velocitates deſcriptrices ad invicem* (11), quia arcus illi P Q, & Q R, æqualibus temporibus deſcribuntur (*per Hyp.*).

& (k) ob æquales angulos SPQ, SQr & æquales areas PSQ, QSr, eſt arcus PQ ad arcum Qr ut SQ ad SP. (l) Sumantur proportionalium conſequentium differentiæ, & fiet arcus PQ ad arcum Rr ut SQ ad $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, ſeu $\frac{1}{2} VQ$. Nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, ad $\frac{1}{2} VQ$ eſt (m) æqualitatis. Quoniam decrementum arcûs PQ, ex reſiſtentiâ oriundum, ſive hujus duplum Rr, (n) eſt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim; (o) erit reſiſtentia ut $\frac{Rr}{PQq \times SP}$. Erat autem PQ ad Rr, ut SQ ad





(k) * *Et ob æquales angulos.* Ex centro S ad tangentes P X, Q Z demiſſa ſint perpendicula S X, S Z, & areæ æquales P S Q & Q S r, erunt $\frac{1}{2}$ S X × P Q, & $\frac{1}{2}$ S Z × Q r, ideóque S X ad S Z ut Q r ad P Q; ſed ob angulos rectos ad X & Z, & angulos æquales X P S & Z Q S (*per lem.* 3.) ſimilia ſunt triangula S X P & S Z Q, & ideò S X : S Z = S P : S Q, quare fit Q r : P Q = S P : S Q.

(l) * *Sumantur proportionalium &c.* Cùm enim ſit (*per dem.*) $PQ : SQ = QR : \sqrt{SP \times SQ}$, & $PQ : SQ = Qr : SP$, erit etiam $Qr : SP = QR : \sqrt{SP \times SQ}$, unde erit $PQ : SQ = Qr - QR$ ſeu $Rr : SP - \sqrt{SP \times SQ}$, & hinc $PQ : Rr = SQ :$

(m) * *Eſt æqualitatis.* Eſt enim $SQ = SP - VQ$, & proindè $SP \times SQ = SP^2 - SP \times VQ$, ideoque extrahendo radicem quadratam (per formulam lib. 1: 551.) fit $\sqrt{SP \times SQ} = SP - \frac{1}{2} VQ - \frac{VQ^2}{8\,SP}$ — &c., in infinitum; cæteri verò termini poſt ſecundum negligi poſſunt, quia coeuntibus P & Q, evaneſcunt reſpectu V Q, & ideò erit $\sqrt{SP \times SQ} = SP - \frac{1}{2} VQ$, ac proindè $\frac{1}{2} VQ = SP - \sqrt{SP \times SQ}$.

(n) * *Eſt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim.* (Per cor. 3. Lem. X. lib. 1.)

(o) *Erit reſiſtentia &c.* Nam tempus eſt ut $PQ \times \sqrt{SP}$ (*ex Dem.*).

ad $\frac{1}{2} VQ$; & inde $\frac{Rr}{PQq \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2} VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ ſive ut $\frac{\frac{1}{2} OS}{OP \times SPq}$. Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt, & angulus PVQ fit rectus; & (p) ob ſimilia triangula PVQ, PSO, fit PQ ad $\frac{1}{2} VQ$ ut OP ad $\frac{1}{2} OS$. Eſt igitur $\frac{OS}{OP \times SPq}$ ut reſiſtentia, (q) id eſt, in ratione denſitatis medii in P & ratione duplicatâ velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit medii denſitas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Detur ſpiralis; & (r) ob datam rationem OS ad OP, denſitas medii in in P erit ut $\frac{1}{SP}$. In medio igitur cujus denſitas eſt reciprocè ut diſtantia à centro SP, corpus gyrari poteſt in hâc ſpirali. *Q. E. D.*

Corol.

(p) * *Et ob ſimilia triangula* PVQ; PSO, angulus PSO (*per Lemma noviſſimum*) rectus eſt & ideò æqualis angulo etiam recto PVQ, & prætereà ſi ex angulis rectis QPO & VPS ſubducatur communis angulus QPS, remanent æquales VPQ & SPO; Quarè triangula PVQ & PSO ſunt ſimilia.

(q) * *Id eſt in ratione &c.* (per Hyp.) 156.

(r) * *Ob datam rationem* OS *ad* OP. Datâ ſpirali datur angulus QPS & hinc in Triangulo SPO datur angulus SPO cum iſto QPS rectum faciens, datur etiam rectus PSO (*per Lem.* 3.) atquè ideò trianguli POS anguli omnes dantur, & proindè datur ratio OS ad OP.

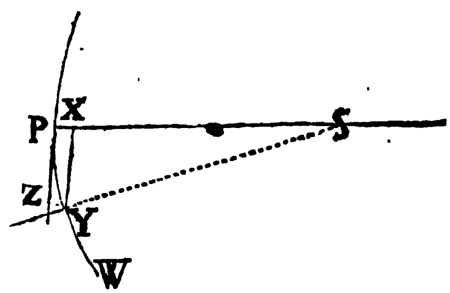
De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. IV. Prop. XV. Theor. XII.

Corol. 1. (ſ) Velocitas in loco quovis P ea ſemper eſt; quâcum corpus in medio non reſiſtente eâdem vi centripetâ gyrari poteſt in circulo, ad eandem à centro diſtantiam SP.

Corol. 2. Medii denſitas, ſi datur diſtantia SP, eſt ut $\frac{OS}{OP}$; ſin diſtantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et (t) inde ſpiralis ad quamlibet medii denſitatem aptari poteſt.

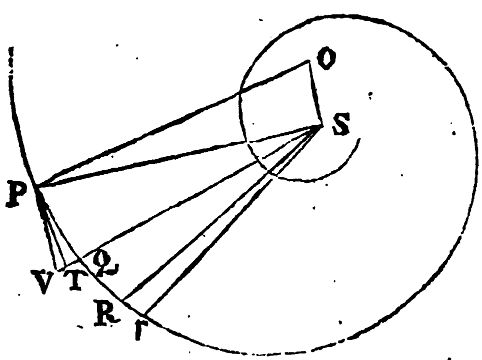
Corol. 3. Vis reſiſtentiæ in loco quovis P, eſt ad vim centripetam in eodem loco ut $\frac{1}{2}$ OS ad OP. Nam vires illæ ſunt

(ſ) * *Velocitas in loco quovis P &c.* * Gyretur corpus in medio non reſiſtente in circulo P W radio P S deſcripto, in eoque retineatur vi centripetâ quæ ſit eadem cum illâ qua corpus urgetur in puncto P ſpiralis (*vide fig. textûs*). Sumatur in radio P S particula P X æqualis T Q, ſive ſpatio quod generatur per vim centripetam quâ corpus retinetur in ſpirali in P, ductâque tangente P Z, è puncto Y ducatur per centrum linea S Y y ad Tangentem uſque, Y y erit ſpatium quod generatur per vim centripetam quâ corpus in circulo retinetur, ſed coëuntibus punctis P & Y, linea y Y ſit ultimò parallela lineæ P S, ideoque y Y ſit æqualis particulæ P X, ſive T Q. Cùm ergo eadem ſit vis centripeta tam in Circulo quàm in ſpirali, & ſpatia æqualia y Y & T Q ab illâ vi centripeta generentur, æquali tempore utrinque generabuntur, unde eodem tempore quo corpus in ſpirali in Q pervenerit, eo ipſo tempore perveniet in Y in circulo, velocitas ergo in ſpirali erit ad velocitatem in hoc circulo ut eſt arcus P Q ad arcum P Y, ſed ex naturâ ſpiralis per Lemma III. eſt $PQ = \sqrt{TQ \times 2PS}$, & ex naturâ circuli eſt $PY = \sqrt{PX \times 2PS}$ & ex conſtructione cùm ſit $PX = TQ$ erit $PY = \sqrt{TQ \times 2PS}$ ergo $PQ = PY$; ergo velocitas in loco quovis ſpiralis ea eſt quâcum corpus eâdem vi centripetâ in medio non reſiſtente ad eandem à centro diſtantiam gyrari poteſt.



(t) * *Et inde ſpiralis &c.* * Fingantur duo media diverſæ denſitatis, talia tamen ut in ſingulo medio denſitas in locis diverſis ſit reciprocè ut diſtantia locorum à centro. Sumptâ verò in utroque æquali à centro diſtantiâ S P, ſit ratio denſitatis prioris medii ad denſitatem poſterioris in eo loco ut a ad b, ea ratio eadem erit in aliâ quâcumque diſtantiâ à centro, putâ in diſtantiâ S X. Nam in utroque medio denſitas in P erit ad denſitatem in X ut $\frac{1}{SP}$ ad $\frac{1}{SX}$; Itaque ſi in priore medio denſitas in P fuerit ut a, denſitas in X erit ut $\frac{a \times SP}{SX}$, & ſi in ſecundo medio denſitas in P fuerit ut

ſunt ad invicem ut $\frac{1}{2}$ *R r* & *T Q* ſive (u) ut $\frac{\frac{1}{4} VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{\frac{1}{2} PQq}{SP}$ hoc eſt, ut $\frac{1}{2}$ *V Q* & *P Q*, ſeu (x) $\frac{1}{2}$ *O S* & *O P*. (y) Datâ igitur ſpirali datur proportio reſiſtentiæ ad vim centripetam, & vice verſâ ex datâ illâ proportione datur ſpiralis.



Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hâc ſpirali, (z) niſi ubi vis reſiſtentiæ minor eſt quàm dimidium vis centripetæ.

ut *b* denſitas in X erit ut $\frac{b \times SP}{SX}$, eſt verò $\frac{aSP}{SX}$ ad $\frac{b \times SP}{SX}$ ut *a* ad *b*, ergo in his duobus mediis denſitates erunt ubique in datâ ratione *a* ad *b*, in æqualibus à centro diſtantiis.

Si itaque data ſit ſpiralis quæ in medio priore deſcribitur, inveniri poterit illa quæ in poſteriore medio deſcribi poſſet; nam ſumpta diſtantia quâvis S P, fiat *a* ad *b* ut $\frac{OS}{OP}$ ad $\frac{b \times OS}{a \times OP}$ hæc erit ratio quæ in hâc novâ ſpirali intercedet inter lineas, lineis O S & O P correſpondentes, ſive quia angulus S in Triangulo O S P eſt rectus, hæc erit ratio inter ſinum anguli quem facit linea P S cum perpendiculari ad curvam, & Radium; quo ſinu dato ejuſque angulo, ſpiralis obtinetur ad hanc medii denſitatem aptata.

Ex quibus illuſtratur quod præcedit in hoc ipſo Corollario, ſi duæ ſpirales in diverſis mediis deſcribantur, mediorum denſitates in eadem diſtantia erunt ut $\frac{OS}{OP}$, ſed ſi diſtantiæ à Centro diverſæ ſumantur, Ratio inverſa diſtantiarum eſt huic conjungenda, eruntque ideo mediorum denſitates ut $\frac{OS}{OP \times SP}$.

(u) * *Sive ut &c.* Nam (per Dem.) 156.
P Q : R r = S Q : $\frac{1}{2}$ V Q, & (per Lem. 3.) $TQ = \frac{PQ^2}{2PS}$, & punctis Q & P coeuntibus, eſt S Q = S P.

(x) * *Seu* $\frac{1}{2}$ *O S & O P.* Quia triangula P V Q, P S O ſimilia ſunt (ex Dem.) eſt $\frac{1}{2}$ V Q : P Q = $\frac{1}{2}$ O S : O P.

(y) * *Datâ igitur ſpirali.* Nam datâ ſpirali datur ſpecie triangulum P S O (ex Dem.) & indè datur ratio O S ad O P, & viceverſâ datâ hâc ratione, datur ſpecie triangulum rectangulum P S O, & hinc datur angulus P O S æqualis angulo Q P S quem ſpiralis cum radio continet, ideóque datur ſpiralis. Iis enim datis & aſſumpto ut libet radio S P, dabitur ſubtangens ſpiralis Logarithmicæ, ſeu tangens anguli Q P S, & hinc dato angulo quovis P S R, dabitur radius S R cum puncto R in ſpirali (153).

(z) * *Niſi ubi vis reſiſtentiæ minor eſt &c.* Cùm enim vis reſiſtentiæ ſit ad vim centripetam ut $\frac{1}{2}$ OS ad OP, & ad dimidium vis centripetæ ut $\frac{1}{2}$ O S ad $\frac{1}{2}$ O P, ſeu ut O S ad O P, ſitque trianguli rectanguli P S O (Lem. 3.) crus O S minus hypothenusâ O P, manifeſtum eſt vim reſiſtentiæ minorem eſſe dimidiâ vi centripetâ.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XV. THEOR. XII.

tæ. ([a]) Fiat reſiſtentia æqualis dimidio vis centripetæ, & ſpiralis conveniet cum lineâ rectâ PS, inque hac rectâ corpus deſcendet ad centrum eâ cum velocitate, quæ ſit ad velocitatem, quâ probavimus in ſuperioribus in caſu parabolæ (*theor.* X. *lib.* I.) deſcenſum in medio non reſiſtente fieri, in ([b]) ſubduplicatâ ratione unitatis ad numerum binarium. ([c]) Et tempora deſcenſûs hic erunt reciprocè ut velocitates, atque ideo dantur.

Corol. 5. Et quoniam in æqualibus à centro diſtantiis velocitas ([d]) eadem eſt in ſpirali PQR atque in rectâ SP, & lon-

(a) * *Fiat reſiſtentia æqualis dimidio vis centripetæ &c.* Ideóque O S æqualis O P, & puncto O in infinitum abeunte, fiet O P perpendicularis ad S P, & angulus P O S ipſique æqualis angulus Q P S quem ſpiralis continet, cum radio P S evaneſcet, convenietque proindè ſpiralis cum lineâ rectâ P S.

(b) * *In ſubduplicatâ ratione unitatis*, Nam (*in theor. X. lib.* I.) corporis in medio non reſiſtente rectâ cadentis velocitas in loco quovis P æqualis eſt velocitati quâ corpus ad diſtantiam dimidiam à centro, ſeu ad diſtantiam $\frac{1}{2}$ S P circulum deſcribere poteſt, & (*per cor.* I. *hujus*) corporis in medio reſiſtente ſpiralem ſeu rectam P S cum quâ ſpiralis convenire ſupponitur deſcribentis velocitas in eodem loco P æqualis eſt velocitati quâcum corpus in medio non reſiſtente gyrari poteſt in circulo ad integram diſtantiam S P. Sed velocitates corporum diverſos circulos deſcribentium) in hypotheſi quòd vires centripetæ ſunt reciprocè ut quadrata radiorum) ſunt inter ſe reciprocè in Radiorum ratione ſubduplicatâ (*pro converſ. cor.* 6. *prop.* 4. *lib.* I.) adeóque velocitas in circulo cujus radius S P eſt ad velocitatem in circulo cujus radius $\frac{1}{2}$ S P, ut $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ad $\sqrt{1}$, ſive ut 1. ad $\sqrt{2}$, erit ergo velocitas corporis in medio reſiſtente per rectam P S deſcendentis ad velocitatem deſcendentis in medio non reſiſtente per rectam eandem & in eodem loco P exiſtentis, ut 1 ad $\sqrt{2}$. Q. E. D.

* Obſervandum verò quòd velocitates initiales utrinque debent eſſe ſecundùm Legem quæ in reliquo motu obtinet, hoc eſt velocitas initialis in medio reſiſtente eſſe debet æqualis celeritati quâ corpus ad eamdem à centro diſtantiam in medio non reſiſtente circulum deſcriberet, & velocitas initialis in medio non reſiſtente æqualis eſſe debet velocitati quâ corpus ad dimidiam à centro diſtantiam in medio non reſiſtente in circulo revolveretur.

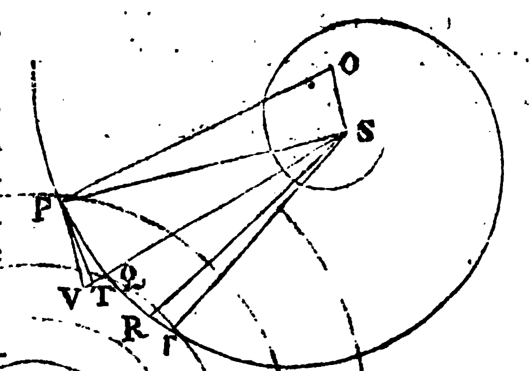
Quoniam itaque velocitas corporis in medio non reſiſtente deſcendentis datur (*per theor.* X. *lib.* I.) dabitur etiam velocitas in medio reſiſtente deſcendentis.



(c) * *Et tempora deſcenſûs, hic erunt reciprocè ut velocitates, atquè ideò dantur.* Nam momenta temporis quibus corpora duo in medio reſiſtente & in eodem non reſiſtente deſcribunt ſpatium idem quam minimum R r, ſunt ut corporum velocitates reciprocè (12) id eſt ut $\sqrt{2}$ & 1 directè (per modò demonſtrata) adeóque in datâ ratione. Quarè (*per cor. Lem.* 4. *lib.* I.) tempora tota quibus corpora illa idem ſpatium quodvis P R deſcribunt, ſunt etiam in eâdem datâ ratione $\sqrt{2}$ ad 1, ſeu ut velocitates reciprocè. Cùm igitur (*per prop.* 36. *&* 37. *lib.* I.) detur tempus quo corpus in medio non reſiſtente cadendo ſpatium quodlibet deſcribit, dabitur quoque tempus quo corpus in medio reſiſtente ſpatium quodvis datum cadendo percurrit.

(d) *Eadem eſt in ſpirali.* (Per cor. I. hujus.

longitudo ſpiralis ad longitudinem rectæ *PS* eſt in datâ ratione, (e) nempe in ratione *OP* ad *OS*; tempus deſcenſûs in ſpirali erit ad tempus deſcenſûs in rectâ *SP* in (f) eâdem illâ datâ ratione, proindeque datur.



Corol. 6. Si centro *S* intervallis duobus quibuſcunque datis deſcribantur duo circuli; & manentibus hiſce circulis, mutetur utcunque angulus quem ſpiralis continet cum radio *PS*: numerus revolutionum quas corpus intra circulorum circumferentias, pergendo in ſpirali à circumferentiâ ad circumferentiam, complere poteſt, eſt ut (g) $\frac{PS}{OS}$, ſive ut tangens anguli illius quem ſpiralis continet cum radio *PS*; (h) tempus verò revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id eſt, ut ſecans anguli ejuſdem, vel etiam reciprocè ut medii denſitas.

(e) * *Nempè in ratione OP ad OS* (151).

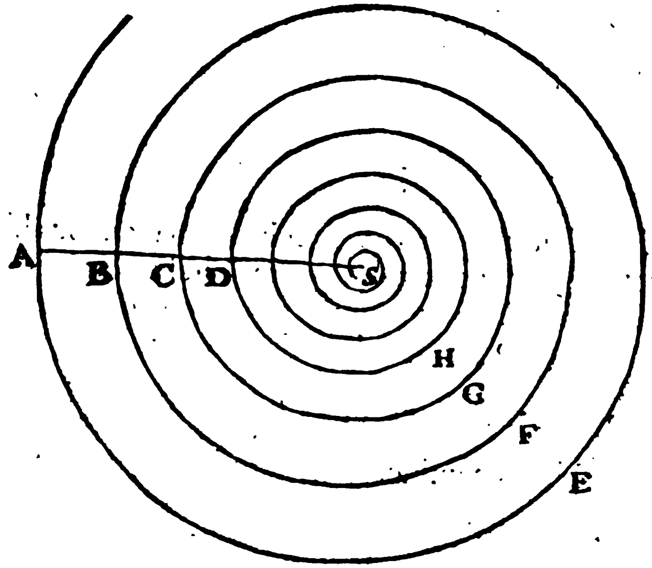
(f) * 157. *Id eâdem illâ ratione.* Spatia enim velocitatibus æqualibus & uniformibus deſcripta ſunt ut tempora quibus deſcribuntur; undè ſi ſpiralis PQR & recta PS, diviſæ intelligantur in partes quam minimas totis proportionales, quod fit dum puncta diviſionum in ſpirali & in radio PS à centro S æquidiſtant (152) tempora quibus partes illæ quàm minimæ in ſpirali & in rectâ PS homologæ deſcribuntur, erunt ut eædem partes, ſeu in datâ ratione, ſiquidem velocitas in ſpirali & in recta PS in iis punctis à centro æquidiſtantibus ſunt æquales eidem, nempe celeritati corporis circa idem centrum ad eandem diſtantiam in circulo revolventis; ideóque (*per cor. lem. 4. lib. 1.*) totum tempus deſcenſûs in ſpirali erit ad totum tempus deſcenſûs in rectâ PS per ſpatia homologâ in datâ illâ ratione longitudinis 157.
nempe ſpiralis ad longitudinem PS, ſeu in ratione OP ad OS.

(g) * *Eſt ut* $\frac{PS}{OS}$ *ſivè ut tangens anguli &c.* (155). Si autem ſinus totus ſit 1, cum ſit OS, ad PS, ut ſinus totus ad tangentem anguli POS, ſeu anguli æqualis QPS, erit tangens illa $\frac{PS}{OS}$.

(h) * *Tempus verò revolutionum earundem ut* $\frac{OP}{OS}$, *id eſt, ut ſecans &c.* Eſt enim tempus illud revolutionum inter circulos duos datos, ad tempus deſcenſûs per partem datam rectæ PS inter circulos contentam ut longitudo revolutionum illarum ad partem hanc rectæ PS, circulis duobus interceptam (157); ſed mutato utcumque angulo, quem ſpiralis continet

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XV. THEOR. XII.

Corol. 7. Si corpus in medio, cujus denſitas eſt reciprocè ut diſtantia locorum à centro, revolutionem in curvâ quâcunque *AEB* circa centrum illud fecerit, & radium primum *AS* in eodem angulo ſecuerit in *B* quo prius in *A*, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem ſuam primam in *A* reci-



procè in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum à centro (id eſt, ut *AS* ad mediam proportionalem inter *AS* & *BS*) (i) corpus illud perget innumeras conſimiles revolutiones *BFC*, *CGD*, &c. facere, & interſectionibus diſtinguet radium *AS* in partes

cum radio PS longitudo revolutionum inter duos circulos datos comprehenſa eſt ut ſecans anguli illius (152). Quarè cùm datum ſit tempus deſcenſûs per partem datam rectæ PS inter circulos datos contentam, erit tempus revolutionum inter circulos ut ſecans anguli quem ſpiralis continet cum radio PS ſeu ut $\frac{OP}{OS}$; Si enim ſinus totus ſit 1, erit OS ad OP ut 1 ad ſecantem anguli POS ſeu QPS, & ideò ſecans eſt $\frac{OP}{QS}$. Porrò datâ rectâ PS, denſitas eſt ut $\frac{OP}{OS}$ reciprocè (*per cor.* 2. *hujus*). Ergò &c.

(i) * *Corpus illud perget &c.* Centro S & radio dato SA deſcripta intelligatur ſpiralis Logarithmica quæ primâ revolutione abſolutâ, tranſeat per punctum B datum in radio SA (153.) & ſpiralis illa ſuis ſemper ſimilibus revolutionibus diſtinguet radium AS in partes AS, BS, CS, DS &c. continuè proportionales (150). Fingamus etiam quòd iiſdem poſitis quæ (in

tes AS, BS, CS, DS, &c. continuè proportionales. Revolutionum verò tempora erunt ut perimetri orbitarum AEB, BFC, CGD, &c. directè, & velocitates in principiis A, B, C, inversè; id eſt, ut $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut ſumma omnium continuè proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; id eſt, ut terminus ille primus $AS^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, ſive ut $\frac{2}{3}AS$ ad AB quam proximè. Unde tempus illud totum expeditè invenitur.

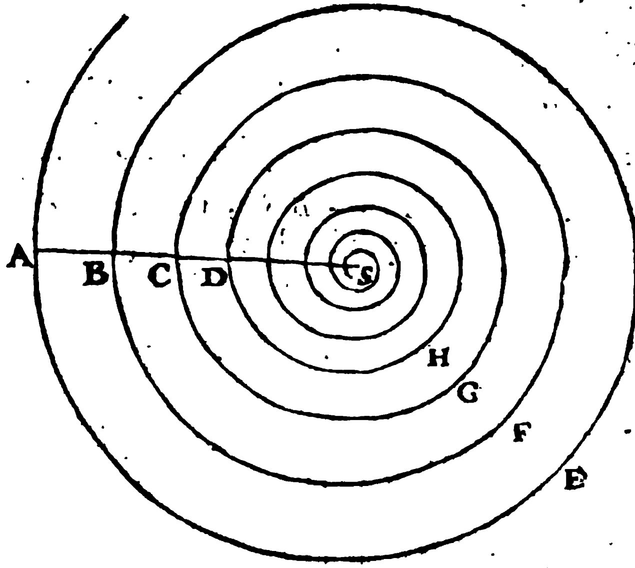
Co-

(*in prop.* 15.) corpus aliquod P in medio juſtæ denſitatis ſpiralem illam Logarithmicam deſcribat, dum corpus aliud Q in alio medio deſcribit curvam A E B F C S & in iiſdem à centro S diſtantiis denſitates duorum mediorum erunt in datâ ratione, cum in utroque medio ſit (*per hyp. cor. hujus & per prop.* 15) denſitas in loco A ad denſitatem in loco B, ut S B ad S A. Simili modo velocitates corporum P & Q in loco B, erunt ut eorumdem velocitates in loco A, *per prop.* 15. *& hyp. coroll. hujus*) ideóque in datâ ratione; vires autem centripetæ quibus corpora P & Q urgentur, ſunt in utroque medio iiſdem in locis eædem (*per hyp.*), & tandem ob angulos datos quos tam ſpiralis Logarithmica, quàm curva A E B continet cum radio A S, directiones motuum in utrâque curvâ pares ſunt in locis A & B; Quarè poſtquam corpus Q primâ revolutione A E B abſolutâ, pervenit in B, per quod punctum tranſit etiam ſpiralis Logarithmica, eodem modo determinatur ad æmulandum motum corporis P ſecundam ſuam revolutionem abſolventis, quo determinatum fuerat in loco A ut æmularetur motum corporis ejuſdem P primam ſuam revolutionem perficientis; cùm (*per dem.*) omnia paria ſint in locis B & A videlicet mediorum denſitates, corporum velocitates, directiones, vireſque centripetæ. Quoniam igitur ſecunda ſpiralis Logarithmicæ revolutio à puncto B ad punctum C priori à puncto A ad punctum B abſolutæ ſimilis eſt (150), neceſſum eſt ut ſecunda quoque curvæ revolutio B F C priori A E B ſit ſimilis; Et ſimili modo oſtendetur revolutiones omnes B F C, C G D &c. & motus corporis Q eas abſolventis eſſe inter ſe ſimiles. Erunt igitur revolutiones A E B, B F C, C G D &c. ut radii A S, B S, C S &c. id eſt, continuè proportionales, & ob ſimilitudinem motuum in ſimilibus revolutionibus A E B, B F C &c. ſi ex centro S ductus intelligatur radius revolutiones illas ſecans in F, E, G &c. quæ erunt in revolutionibus A E B, B F C &c. loca homologa, erit velocitas corporis Q in loco E ad velocitatem ejus in loco A ut velocitas in F ad velocitatem in B, & proinde velocitas in E ad velocitatem in B, ut velocitas in A ad velocitatem in B, id eſt, (*per hyp. cor. hujus*) ut $BS^{\frac{1}{2}}$ ad $AS^{\frac{1}{2}}$; ſed tempora quibus ſpatia homologa quam minima in locis E & F deſcribuntur ſunt ut ſpatia illa directè & velocitates inversè (12); Quare cùm ſpatia homologa in locis E & F ſint ut radii A S & B S, & velocitates ibidem ut $AS^{\frac{1}{2}}$ & $BS^{\frac{1}{2}}$ inversè (*ex dem.*) tempus quo ſpatium minimum revolutionis A E B deſcribitur eſt ad tempus quo deſcribitur ſpatium homolo-

157.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. IV. Prop. XV. Theor. XII.

Corol. 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in mediis, quorum denſitas aut uniformis eſt, aut aliam quamcunque legem aſſignatam obſervat. Centro S, in-



tervallis continuè proportionalibus SA, SB, SC, &c. deſcribe circulos quotcunque, & ſtatue tempus revolutionum inter peri-

logum revolutionis ſimilis B F C ut $AS \times AS^{\frac{1}{2}}$ ad $BS \times BS^{\frac{1}{2}}$, id eſt, ut $AS^{\frac{3}{2}}$ ad $BS^{\frac{3}{2}}$, ideóque in datâ ratione. Undè (*per cor. lem.* 4. *lib.* 1.) tempus totum quo corpus Q primam ſuam revolutionem A E B abſolvit eſt ad tempus quo ſecundam revolutionem B F C, perficit in eâdem ratione $AS^{\frac{3}{2}}$ ad $BS^{\frac{3}{2}}$. Et ſimili argumento liquet tempora revolutionum B F C, C G D &c. eſſe inter ſe ut ſunt $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ &c. Cùm igitur revolutionum tempora ſicut quantitates $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, $DS^{\frac{3}{2}}$, &c. progreſſionem geometricam in infinitum decreſcentem conſtituant, tempus totum quo corpus Q, perveniet ad centrum S erit ad tempus revolutionis primæ A E B ut ſumma omnium continuè proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, $DS^{\frac{3}{2}}$ &c. pergentium, in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; porrò ſumma illa eſt ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$ ut hic terminus primus ad differentiam duorum priorum, nempè $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$. Nam ſcribatur ſic terminorum ſeries, $AS^{\frac{3}{2}} : BS^{\frac{3}{2}} = BS^{\frac{3}{2}} : CS^{\frac{3}{2}} = CS$

perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in medio (k) de quo egimus, eſſe ad tempus revolutionum inter eoſdem in medio propoſito, ut (l) medii propoſiti denſitas mediocris inter hos circulos ad medii, de quo egimus, denſitatem mediocrem inter eoſdem quàm proximè: Sed & in eâdem quoque ratione eſſe ſecantem anguli quo ſpiralis præfinita, in medio de quo egimus, ſecat radium AS, ad ſecantem anguli quo ſpiralis nova ſecat radium eundem in medio propoſito: (m) Atque etiam ut ſunt eorumdem angulorum tangentes ita eſſe numeros revolutionum omnium inter circulos eoſdem duos quàm proximè. Si (n) hæc fiant paſſim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari poſſumus quibus modis ac temporibus corpora in medio quocunque regulari gyrari debebunt.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. IV. Prop. XV. Theor. XII.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in ſpiralibus ad (o) formam ovalium accedentibus peragantur; tamen conci-

$=CS^{\frac{3}{2}}:DS^{\frac{3}{2}}$, &c. in infinitum, & ultimo progreſſionis termino evaneſcente, erit ſumma antecedentium, id eſt, ſumma omnium terminorum quæ dicatur S ad ſummam conſequentium, ſeu ſummam omnium terminorum dempto primo, ut primus ad ſecundum, hoc eſt $S:S-AS^{\frac{3}{2}}=AS^{\frac{3}{2}}:BS^{\frac{3}{2}}$; undè habetur dividendo $S:AS^{\frac{3}{2}}=AS^{\frac{3}{2}}:AS^{\frac{3}{2}}-BS^{\frac{3}{2}}$; Eſt autem $BS=AS-AB$, & ideò $BS^{\frac{3}{2}}=(AS-AB)^{\frac{3}{2}}=AS^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}AS^{\frac{1}{2}}\times AB+\frac{3}{8}\times\frac{AB^{2}}{AS^{\frac{1}{2}}}-$ &c. in infinitum (551. *lib.* 1.). Quapropter ſi diſtantia A B minima fuerit, reſpectu radii A S, fiet $BS^{\frac{3}{2}}=AS^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}AS^{\frac{1}{2}}\times AB$, quàm proximè, neglectis nimirum cæteris terminis ferè evaneſcentibus; erit igitur $S:AS^{\frac{3}{2}}=AS^{\frac{3}{2}}:\frac{3}{2}AS^{\frac{1}{2}}\times AB=\frac{2}{3}AS:AB$ quam proximè; Et hinc dato tempore revolutionis primæ A E B, tempus totum quo corpus pervenit ad centrum expeditè invenitur. Sit, exempli causâ, A S ad A B ut 300000 ad 1, & tempus primæ revolutionis = 1, erit tempus totum = 2000000, quàm proximè.

(k) * *In medio de quo egimus.* (In prop. 15. & cor. ejus), cujus nimirum denſitas eſt reciprocè ut diſtantia locorum à centro.

(l) * *Ut medii propoſiti denſitas* (per cor. 6. hujus) ſupponendo ſpirales Logarithmicas, per puncta A, B, C, D, in utroque medio deſcriptas.

(m) * *Atquè etiam ut ſunt &c.* Per cor. 6. hujus.

(n) * *Si hæc fiant paſſim inter circulos binos*, invenietur in medio regulari lex quâ motus continuabitur per circulos omnes, ſeu, inter circulos omnes, quemadmodum inventis prioribus ſeriei regularis terminis, cognoſcitur lex quâ illa progreditur, *atquè hoc pacto &c.*

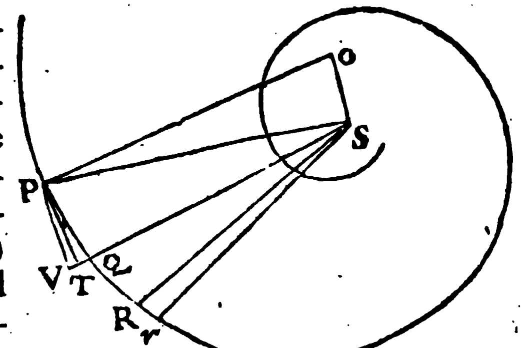
(o) * *Ad formam ovalium accedentibus &c.* Sunt enim ſpirales quarum revolutiones ſingulæ ferè concentricæ ſunt & ad formam circulorum accedunt; aliarum revolutiones accedunt ad formam ova-

V 3 liuim

cipiendo ſpiralium illarum ſingulas revolutiones iiſdem ab invicem intervallis diſtare, iiſdemque gradibus ad centrum accedere cum ſpirali ſuperius deſcriptâ, (p) intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujuſmodi ſpiralibus peragantur.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA XIII.

Si medii denſitas in locis ſingulis ſit reciprocè ut diſtantia locorum à centro immobili, ſitque vis centripeta reciprocè ut dignitas quælibet ejuſdem diſtantiæ: dico quod corpus gyrari poteſt in ſpirali quæ radios omnes à centro illo ductos interſecat in angulo dato.



Demonſtratur eâdem methodo cum propoſitione ſuperiore. Nam ſi vis centripeta in *P* ſit reciprocè ut diſtantiæ *SP*, dignitas quælibet SP^{n+1} cujus index eſt $n+1$: (q) colligetur ut ſupra, quòd tempus, quo corpus deſcribit arcum quemvis *PQ*; erit ut $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$; & reſiſtentia in *P* ut $\frac{Rr}{PQq \times SP^{n}}$, ſive ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times VQ}{PQ \times SP^{n} \times SQ}$, ideoque ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, hoc eſt, ob datum $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP}$, reciprocè ut SP^{n+1}. Et propterea, cùm velocitas ſit reciprocè ut $SP^{\frac{1}{2}n}$, denſitas in *P* erit reciprocè ut *SP*.

Co-

lium centro ſpiralis pro ellipſeos vel ovalis foco accepto.

(p) * *Intelligemus etiam* (ut in cor. 8.) *quomodò &c.*

(q) * *Colligetur ut ſuprà &c.* Quæcumque enim ſit vis centripeta, illa eſt ad vim reſiſtentiæ ut T Q ad $\frac{1}{2}$ R r (*per dem. prop.* 15.). Quoniam igitur vis centripeta quâ corpus urgetur in P, eſt reciprocè ut SP^{n+1}, & (*per cor. Lem. X. lib.* 1.) lineola T Q quæ vi illâ generatur, eſt in ratione compoſitâ ex ratione hujus vis & ratione duplicatâ temporis quo arcus P Q deſcribitur; erit $TQ \times SP^{n+1}$, id eſt, (*per Lem.* 3.) $\frac{1}{2} PQ^{2} \times SP^{n}$, in ratione duplicatâ temporis, ideóque tem-

Corol. 1. (r) Reſiſtentia eſt ad vim centripetam ut $\overline{1 - \frac{1}{2}n} \times OS$ ad OP.

Corol. 2. Si vis centripeta ſit reciprocè ut SP *cub.* (ſ) erit $1 - \frac{1}{2}n = 0$; ideoque reſiſtentia & denſitas medii nulla erit, ut in propoſitione nonâ libri primi.

Corol. 3. Si vis centripeta ſit reciprocè ut dignitas aliqua radii SP cujus index eſt major numero 3, reſiſtentia affirmativa (t) in negativam mutabitur.

Scho-

tempus eſt ut $PQ \times SP^{\frac{n}{2}}$, & corporis velocitas quâ arcus PQ illo tempore deſcribitur ut $\frac{PQ}{PQ \times SP^{\frac{n}{2}}}$, ſeu $\frac{1}{SP^{\frac{n}{2}}}$; & ſimili argumento velocitas quâ arcus QR deſcribitur eſt ut $\frac{1}{SQ^{\frac{n}{2}}}$; ſunt autem arcus illi PQ & QR ut velocitates deſcriptrices ad invicem, id eſt, in ratione $SQ^{\frac{n}{2}}$ ad $SP^{\frac{n}{2}}$, & (*per dem. prop.* 15.) arcus Qr, eſt ad arcum PQ ut SP ad SQ; Quarè (per compoſitionem rationum & ex æquo) $Qr : QR = SP \times SQ^{\frac{n}{2}} : SQ \times SP^{\frac{n}{2}} = SQ^{\frac{1}{2}n - 1} : SP^{\frac{1}{2}n - 1}$, & ſumptis terminorum differentiis $Qr : Rr = SQ^{\frac{1}{2}n - 1} : SQ^{\frac{1}{2}n - 1} - SP^{\frac{n}{2} - 1}$. Quia verò $SP = SQ + VQ$, ideóque (549. *lib.* 1.) $SP^{\frac{1}{2}n - 1} = SQ^{\frac{1}{2}n - 1} + \frac{1}{2}\overline{n - 1} \times VQ \times SQ^{\frac{1}{2}n - 2}$ + &c., neglectis reliquis terminis reſpectu priorum evaneſcentibus, erit $SQ^{\frac{1}{2}n - 1} - SP^{\frac{1}{2}n - 1} = (1 - \frac{1}{2}n) \times VQ \times SQ^{\frac{1}{2}n - 2}$, atque adeò $Qr : Rr = SQ : (1 - \frac{1}{2}n) VQ$. Erat autem $PQ : Qr = SQ : SP$; undè (ex æquo) fit $PQ : Rr = SQ^2 : (1 - \frac{1}{2}n) VQ \times SP$, & hinc $Rr = (1 - \frac{1}{2}n) \frac{VQ \times SP \times PQ}{SQ^2} = \frac{(1 - \frac{1}{2}n) \times VQ \times PQ}{SQ}$, ob $SP = SQ$, ubi puncta Q & P coeunt.

Quoniam decrementum arcûs PQ ex reſiſtentiâ oriundum, ſivè hujus duplum Rr, eſt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim, erit reſiſtentia ut $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP^n}$, id eſt, ut $\frac{(1 - \frac{1}{2}n) VQ}{PQ \times SP^n \times SQ}$. Sivè ut $\frac{(1 - \frac{1}{2}n) OS}{OP \times SP^{n+1}}$ (quia $VQ : PQ = OS : OP$ ex dem. prop. 15.) hoc eſt, ob datum $\frac{(1 - \frac{1}{2}n) OS}{OP}$ ut $\frac{1}{SP^{n+1}}$. Et propterea cùm velocitas (*ex dem.*) ſit ut $\frac{1}{SP^{\frac{1}{2}n}}$, ſi ex reſiſtentiâ auferatur duplicata velocitatis ratio $\frac{1}{SP^n}$, manebit medii denſitas in P, ut $\frac{1}{SP}$, ſeu reciprocè ut SP. 157.

(r) * *Reſiſtentia eſt ad vim centripetam.* Nam vires illæ ſunt ad invicem ut $\frac{1}{2} Rr$ & TQ, ſivè ut $\frac{(1 - \frac{1}{2}n) VQ \times PQ}{2 SQ}$ & $\frac{PQ^2}{2 SP}$, hoc eſt, ut $(1 - \frac{1}{2}n) VQ$ & PQ, ſeu $(1 - \frac{1}{2}n) OS$ & OP.

(ſ) * *Erit* $1 - \frac{1}{2}n = 0$. Cùm enim (*per hyp.*) ſit $n + 1 = 3$; erit $n = 2$, $\frac{1}{2}n = 1$ & $1 - \frac{1}{2}n = 0$.

(t) * *In negativam mutabitur.* Tum enim $n + 1$, erit numerus ternario major, & ideò n binario major, & hinc $1 - \frac{1}{2}n$, numerus negativus.

Co-

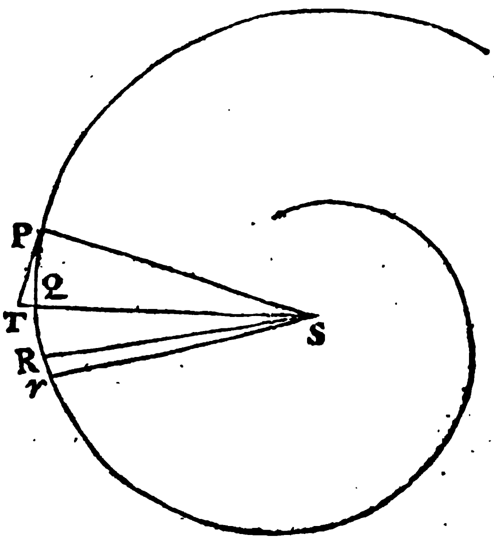
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XVI. THEOR. XIII.

Scholium.

Cæterum hæc propoſitio & ſuperiores, quæ ad media inæqualiter denſa ſpectant, intelligendæ ſunt de motu corporum adeo parvorum, ut medii ex uno corporis latere major denſitas quàm ex altero non conſideranda veniat. Reſiſtentiam quoque cæteris paribus denſitati proportionalem eſſe ſuppono. Unde in mediis, quorum vis reſiſtendi non eſt ut denſitas, debet denſitas eo uſque augeri vel diminui, ut reſiſtentiæ vel tollatur exceſſus vel defectus ſuppleatur.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA VI.

Invenire & vim centripetam & medii reſiſtentiam, quâ corpus in datâ ſpirali, datâ velocitatis lege, revolvi poteſt.



Sit ſpiralis illa PQR. Ex velocitate, quâ corpus percurrit arcum quàm minimum PQ, dabitur tempus, & ex altitudine TQ, quæ eſt ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum PSQ & QSR, differentia

Coroll. 4. Medii denſitas, ſi datur diſtantia SP, eſt ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n)OS}{OP}$; ſin diſtantia illa non datur ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n)OS}{OP \times SP}$, ſeu ob datum numerum $1-\frac{1}{2}n$; ut $\frac{OS}{OP}$, vel $\frac{OS}{OP \times SP}$.

Coroll. 5. Quoniam (*per cor.* 1. *prop.* 15.) mutato utcumque ſpiralis angulo, ità ut

R S r, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur reſiſtentia ac (u) denſitas medii.

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA V.

Datâ lege vis centripetæ, invenire medii denſitatem in locis ſingulis, quâ corpus datam ſpiralem deſcribet.

Ex vi centripetâ invenienda eſt velocitas in locis ſingulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda medii denſitas; ut (x) in propoſitione ſuperiore.

Methodum verò tractandi hæc problemata aperui in hujus propoſitione deciuâ, & lemmate ſecundo; & lectorem in hujuſmodi perplexis diſquiſitionibus diutius detinere nolo. Addenda jam ſunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque denſitate & reſiſtentiâ mediorum, in quibus motus hactenus expoſiti & his affines peraguntur.

ut etiam evaneſcat, & ſpiralis cum radio conveniat, velocitas corporis in loco quo vis P ea ſemper eſt quâcum corpus in medio non reſiſtente eâdem vi centripetâ gyrari poteſt in circulo ad eandem à centro diſtantiam S P (*per Conſt.* 1. *Cor.* 7. *Prop.* IV. *lib.* 1.) liquet (*per cor.* 6. *prop.* 15. & 152.) tempora deſcensûs à puncto dato P ad centrum uſque S, fore etiam (*in hyp. prop.* 16.) ut ſpiralium variarum longitudines; quod obſervavit *Joannes Bernoullius* in Actis Eruditorum Lipſ. an. 1713. ubi hanc materiam eleganter tractat.

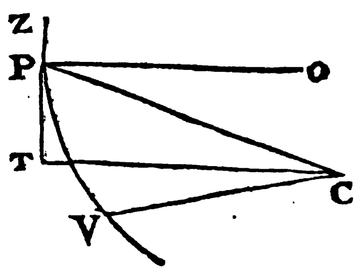
(u) * *Ac denſitas medii.* Sit, exempli causâ, curva P Q R ſpiralis Logarithmica & velocitas in loco quovis P ut $\frac{1}{SP^m}$, erit tempus quo deſcribitur arcus PQ, ut $PQ \times SP^m$ (12); vis autem centripeta quæ (*per cor.* 4. *Lem. X. lib.* 1.) eſt ut Lineola T Q directè & quadratum temporis inversè erit ut $\frac{TQ}{SP^2 \times SP^{2m}}$, id eſt, (*per Lem.* 3. *hujus*) ut $\frac{1}{SP^{2m+1}}$. Inventis tempore & velocitate, invenietur (*ut in not. ad prop.* 16.) reſiſtentia ut $\frac{(1-m)VQ}{SQ \times PQ \times SP^{2m}}$, ſivè ut $\frac{(1-m)OS}{OP \times SP^{2m+1}}$, & auferendo duplicatam velocitatis rationem $\frac{1}{SP^{2m}}$ erit denſitas ut $\frac{(1-m)OS}{OP \times SP}$, ſive ut $\frac{1}{SP}$. 157.

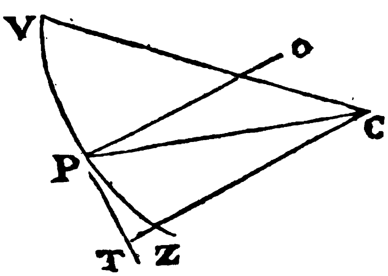
(x) * *Ut in propoſitione ſuperiore.* Sit vis centripeta in P ut $\frac{1}{SP^{n+1}}$ & quoniam T Q eſt ut vis centripeta & quadratum temporis quo deſcribitur arcus P Q, erit $TQ \times SP^{n+1}$, id eſt, (*per Lem.* 3.) $PQ^2 \times SP^n$ ut quadratum temporis, ideoque tempus ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$, & corporis velocitas quâ arcum P Q illo tempore deſcribit ut $\frac{1}{SP^{\frac{1}{2}n}}$ (11); determinatis autem tempore & velocitate, invenietur reſiſtentia & denſitas ut in notâ ſuperiore.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XVIII. PROBL. V.

PROBLEMA.

Vis centripeta tendens ad datum punctum C ſit in loco quovis P ut diſtantiæ CP dignitas CP^n reciprocè, & medii reſiſtentia ſit ut medii denſitas & velocitatis dignitas quælibet conjunctim; requiritur tum medii denſitas in locis ſingulis quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ V P Z moveatur, tum corporis velocitas & medii reſiſtentia in locis ſingulis.



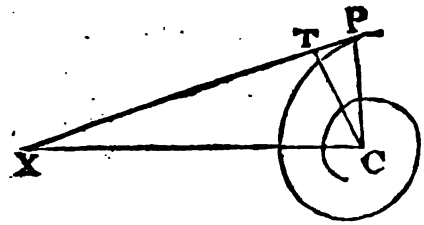


158. Dicantur vis centripeta in loco P, g, reſiſtentia r, medii denſitas k, velocitas corporis v, diſtantia P C, y, radius P O circuli curvam oſculantis in P, R, arcus V P s; perpendiculum C T in tangentem P T ductum p, & a, b, n, m, quantitates datæ, erit (*per hyp.*) $g = \frac{a}{y^n}$, & $r = \frac{kv^m}{b}$, ſed eſt ſemper (27) $vv = \frac{Rpg}{y} = \frac{aRp}{y^{n+1}} = \frac{apdy}{y^n dp}$. Velocitas igitur per alterutram ex his æquationibus dabitur. Porrò (26.) $r = \frac{-vdv - gdy}{ds} = \frac{-vdv}{ds} - \frac{ady}{y^n ds}$, vel etiam (*ibid.*) $\pm r = \frac{-vdv \times \sqrt{yy-pp} - gdy \times \sqrt{yy-pp}}{ydy} = \frac{-vdv \times \sqrt{yy-pp}}{ydy} - \frac{a\sqrt{yy-pp}}{y^{n+1}}$. Quarè ſi in alterutrâ harum æquationum loco vdv ſcribatur ipſius valor, qui reperitur capiendo fluxionem æquationis $vv = \frac{aRp}{y^{n+1}} = \frac{apdy}{y^n dp}$, obtinebitur reſiſtentia r, ſeu $\frac{kv^m}{b}$, ejuſque valore diviſo per $\frac{v^m}{b}$ quod datum eſt inventâ velocitate v, dabitur medii denſitas k. Q. E. I.

159. Exemplo ſit ſpiralis Logarithmica. In illâ ob datum angulum T P C datur ratio P C ad C T ſeu y ad p; ſit ergò $c : a = y : p$, & ideò $p = \frac{ay}{c}$; atque $dp = \frac{ady}{c}$, & erit $vv = \frac{apdy}{y^n dp} = \frac{pc}{y^n} = \frac{a}{y^{n-1}}$. Et his verò habetur $\sqrt{yy-pp} = \frac{y\sqrt{cc-aa}}{c}$, & $vdv = \frac{(1-n)ady}{2y^n}$, undè pro corporis deſcenſu invenitur $r = \frac{(3-n)a\sqrt{cc-aa}}{2cy^n}$; & pro aſcenſu $r = \frac{(n-3)a\sqrt{cc-aa}}{2cy^n}$, ideoque reſiſtentia eſt reciprocè ut y^n. Cùm autem) per hyp.) ſit $r = \frac{kv^m}{b} = \frac{ka^{\frac{m}{2}}}{by^{\frac{mn-m}{2}}}$, erit denſitas k ut $ry^{\frac{mn-m}{2}}$, ſeu ut $\frac{y^{\frac{mn-m}{2}}}{y^n} = y^{\frac{mn-m-2n}{2}}$, & hinc ſi ponatur $m = 2$, erit denſitas k, ut y^{-1}, ſeu ut $\frac{1}{y}$, prorſus ut (*in prop.* 16.) demonſtratum eſt.

160. *Coroll.* 1. Per ſuperiores æquationes (158), ex datâ corporis velocitate inve-

invenitur tum vis centripeta, tum reſiſtentia & medii denſitas. Eſt enim $g = \frac{vvy}{Rp} = \frac{vvdp}{pdy}$; undè habetur vis centripeta g; datis autem vi centripetâ & celeritate, invenitur tum reſiſtentia r, tum medii denſitas k, ut ſupra (158).



161. Exemplum ſit in ſpirali hyperbolicâ cujus hæc eſt proprietas ut ſi per centrum C erigatur ad radium CP, perpendicularis CX tangenti PX per P ductæ occurrens in X ſit ſubtangens illa CX conſtans. Velocitas ſit ut tangens PX, & reſiſtentia r ut denſitas medii & quadratum velocitatis conjunctim, hoc eſt $r = \frac{kv^2}{b}$, dicaturque CX, c, & ideò PX $= \sqrt{yy+cc}$, atque (*per hyp.*) $v = \frac{e\sqrt{yy+cc}}{c}$, & e, quantitas data. Erit ob triangula CPT, XPC ſimilia, PX ($\sqrt{yy+cc}$) : CX (c) = PC (y) : CT (p), & ideò $p = \frac{cy}{\sqrt{yy+cc}}$, $dp = \frac{c^3dy}{\overline{yy+cc}^{\frac{3}{2}}}$, & $\sqrt{yy-pp} = \frac{yy}{\sqrt{yy+cc}}$. Quarè fiet (160) $g = \frac{vvdp}{pdy} = \frac{e^2}{y}$; id eſt, vis centripeta ut diſtantia PC reciprocè. Quia verò $vv = \frac{ee}{cc} \times (yy+cc)$ erit $vdv = \frac{eeydy}{cc}$ & propterea pro corporis deſcenſu $r = \frac{vdv\sqrt{yy-pp}}{ydy} + \frac{g\sqrt{yy-pp}}{y} = \frac{eeyy}{cc\sqrt{yy+cc}} + \frac{e^2}{\sqrt{yy+cc}} = \frac{e^2 \times \overline{yy+cc}}{cc\sqrt{yy+cc}} = \frac{e^2}{c^2} \times \sqrt{yy+cc}$, adeóque reſiſtentia ut tangens PX, ſeu ut velocitas. Cùm igitur ſit $r = kv^2 = \frac{ke^2}{cc} \times (yy+cc) = \frac{e^2}{cc} \times \sqrt{yy+cc}$, erit denſitas medii $k = \frac{1}{\sqrt{yy+cc}}$, ſeu reciprocè ut tangens PX ſivè reciprocè ut velocitas.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XVIII. PROBL. V.

161.

162. *Coroll.* 2. Datâ medii denſitate & conceſſis figurarum quadraturis, dabitur vis centripeta & corporis velocitas. Eſt enim (27. & 160.) $vdv + \frac{vvdp}{p} = -rds = \frac{kv^m ds}{b}$ (158) & dividendo per v^m, & multiplicando per p^{2-m}, fit $p^{2-m}v^{1-m}dv + v^{2-m}p^{1-m}dp = \frac{kp^{2-m}ds}{b}$, & ſumptis utrinque fluentibus habetur, $\frac{1}{2-m} \times p^{2-m} \times v^{2-m} = -S.\frac{kp^{2-m}ds}{b}$, ideòque $v^{2-m} = (m-2)\frac{S.kp^{2-m}ds}{b \times p^{2-m}}$. Quare ſi denſitas medii k, ſit ut functio quævis diſtantiæ PC à centro C, inveniri poterit fluens $S.kp^{2-m}ds$ aut algebraicè aut per figurarum quadraturas, & loco ds, ſcribi poteſt $\pm\frac{ydy}{\sqrt{yy-pp}}$ (26). Inventâ autem velocitate v, obtinetur vis centripeta g per æquationem $g = \frac{vvdp}{pdy} = \frac{vvy}{Rp}$ (160).

163. *Corol.* 3. Si in ſuperiori corollario ſit $m = 2$, id eſt, reſiſtentia ut denſitas & quadratum velocitatis conjunctim; erit $2-m=0$, & æquatio $p^{2-m}v^{1-m}dv + v^{2-m}p^{1-m}dp = -\frac{kp^{2-m}ds}{b}$, in hanc mutabitur $\frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = -\frac{kds}{b}$; undè ſumptis fluentibus, habetur $L.v + L.p = -S.\frac{kds}{b}$, & $L.v = -S.\frac{kds}{b} - L.p$; ex

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. IV. Prop. XVIII. Probl. V.

ex quâ æquatione invenitur v, & hinc habetur g ut ſuprà.

164. *Cor.* 4. Sit in Hypotheſi coroll. 3. denſitas medii k uniformis, velocitas corporis in loco dato $v = c$, & perpendiculum p in eodem loco $= q$ datæ, erit $L.v = -\frac{ks}{b}L.p + Q$, & quia in loco V, fit $s = 0$, $v = c$, $p = q$, erit $Q = L.c + L.q = L.cq$. Et hinc $L.v = L\frac{cq}{p} - \frac{ks}{p}$. Ponatur $L.h = 1$, ut fit $L.v = L.\frac{cq}{p} - \frac{ks}{b} \times L.h = L.\frac{cq}{ph^{\frac{ks}{b}}}$. Undè deducitur

$v = \frac{cq}{ph^{\frac{ks}{b}}}$, $vv = \frac{c^2q^2}{p^2h^{\frac{2ks}{b}}}$, & hinc $g = \frac{vvy}{Rp} = \frac{c^2q^2y}{Rp^3h^{\frac{2ks}{b}}}$, vel $g = \frac{vvdp}{pdy} = \frac{c^2q^2dp}{p^3h^{\frac{2ks}{b}}dy}$.

165. *Cor.* 5. In his autem omnibus inveniri poteſt tempus per æquationem $dt = \frac{ds}{v}$, ſeu $t = S.\frac{ds}{u}$ (13).

166. *Cor.* 6. Datâ vi centripetâ & reſiſtentiâ ac denſitate medii, inveniri poteſt æquatio ad trajectoriam Z P V quam corpus projectile circà centrum virium C deſcribit. Sit, exempli gratiâ, medium uniforme, reſiſtentia ut quadratum velocitatis & vis centripeta $= \frac{a}{y^n}$ & (164.) erit $\frac{a}{y^n} = \frac{c^2q^2dp}{p^3h^{\frac{2ks}{b}}dy}$, ideoque $h^{\frac{2ks}{b}} = \frac{c^2q^2y^ndp}{ap^3dy}$, & $L.h^{\frac{2ks}{s}} = \frac{2ks}{b} = L.\frac{c^2q^2y^ndp}{ap^3dy}$; capiantur utrinque fluxiones, factâ dy conſtante, & fiet (26) $\frac{2kds}{b}\left(= \pm\frac{2kydy}{b\sqrt{yy-pp}}\right) = \frac{ndy}{y} + \frac{ddp}{dp} - \frac{3dp}{p}$ (Notum ſupponimus (40) quantitatis cujuſvis Logarithmicæ L. z fluxionem eſſe $\frac{dz}{z}$). Hinc verò habetur $\frac{2ks}{b} = L.y + L.dp - 3L.p - \frac{L.dy}{Q}$, ubi $\frac{dy}{Q}$, eſt quantitas conſtans, ideoque fit $\frac{2ks}{b} = L.y^n + L.\frac{Qdp}{dy} - L.p^3 = L.\frac{Qy^ndp}{p^3dy}$, & hinc $h^{\frac{2ks}{b}} = \frac{Qy^ndp}{p^3dy}$, æquatio ad trajectoriam.

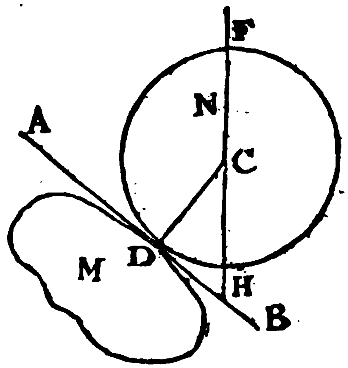
167. *Schol.* Si curva V P Z ſit ſectio conica cujus umbilicus C axis major c ſemiaxis minor e, erit (276. lib. 1.) pro ellipſi $pp = \frac{ey}{c-y}$, pro hyperbolâ $pp = \frac{ey}{c+y}$, & pro parabolâ, ſi latus rectum axis dicatur $4e$, erit (per *Lem.* 14 *lib.* 1.) $pp = ey$. Undè facile eſt ſuperioris problematis ſolutiones ad ſectiones conicas transferre. Sit V P Z parabola, vis centripeta $g = \frac{a}{y^n}$, reſiſtentia $r = \frac{kv^2}{b}$, & quæratur tum corporis velocitas tum reſiſtentia & medii denſitas in loco quovis P. Quoniam $pp = ey$, erit $2pdp = edy$, $dp = \frac{edy}{2p}$, $\frac{p}{dp} = \frac{2pp}{edy} = \frac{2y}{dy}$; undè fit (158) $vv = \frac{apdy}{y^ndp} = \frac{2a}{y^{n-1}}$; Hinc verò habetur $vdv = \frac{(1-n)ady}{y^n}$, atque ideò pro corporis deſcenſu (158) $r = \frac{vdv\sqrt{yy-pp}}{ydy} + \frac{a\sqrt{yy-pp}}{y^{n+1}} = \frac{(2a-na)\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$, & pro aſcenſu $r = \frac{(na-2a)\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$; reſiſtentia igitur eſt ſemper ut $\frac{PT}{PC^{n+1}}$; porrò eſt (per hyp.) $r = \frac{kv^2}{b} = \frac{2ak}{by^{n-1}} = (2a-na)\frac{\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$, vel $= (na-2a)\frac{\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$; Quarè

SECTIO V.

De denſitate & compreſſione fluidorum, deque hydroſtaticâ. (*)

Definitio Fluidi.

Fluidum eſt corpus omne, cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ; & cedendo facilè moventur inter ſe.



Quarè erit medii denſitas k, ut $\frac{\sqrt{yy-ey}}{y^2}$, ſeu ut $\frac{PT}{PC^2}$. Et ſimili modo in ellipſi & hyperbolâ invenitur medii denſitas ut $\frac{PT}{PC^2}$. At in circulo ſit $PT = 0$, ideóque medii denſitas & reſiſtentia nulla. Evaneſcit quoque reſiſtentia, ſi $n = 2$, id eſt, ſi vis centripeta ſit ut quadratum diſtantiæ reciprocè, quo caſu ſectiones conicæ, ut lib. 1°. demonſtratum eſt, in medio non reſiſtente deſcribuntur. Si n eſt numerus binario minor, ſectiones conicæ per deſcenſum deſcribi poſſunt; per aſcenſum verò ſi n, binario major. Tandem ubi eſt $n = 1$, hoc eſt, vis centripeta diſtantiæ PC, reciprocè proportionalis, velocitas in parabolâ ſicut & in ſpirali Logarithmicâ uniformis eſt.

(*) 168. *Hydroſtatica* eſt ſcientia preſſionum quas fluida vel ipſorum partes in ſe mutuò vel in corpora ſolida exercent.

169. *Fluidum homogeneum* dicitur, cujus denſitas eſt uniformis, adeò ut nimirum æqualis materiæ quantitas ſub voluminibus æqualibus ubique per totam fluidi maſſam contineatur, *fluidum heterogeneum* appellatur cujus denſitas uniformis non eſt.

170. *Gravitas ſpecifica* corporis eſt ratio ponderis ejuſdem ad volumen; ità ut corpora ejuſdem gravitatis ſpecificæ dicantur quæ ſub æqualibus voluminibus æquale pondus habent; ſpecificè graviora vel leviora quæ ſub æqualibus voluminibus majus vel minus pondus continet; Quarè cum denſitas ſit ratio maſſæ ad volumen corpo- 170.
ris (2. *lib.* 1.) ubi pondera ſunt ut maſſæ, gravitates ſpecificæ ſunt ut denſitates.

171. Lemma. *Preſſiones quas corpora quævis in ſe mutuò exercent, ſiunt juxtà directiones communi plano contingenti perpendiculares, & per punctum contingentiæ eorumdem corporum tranſeunt.*

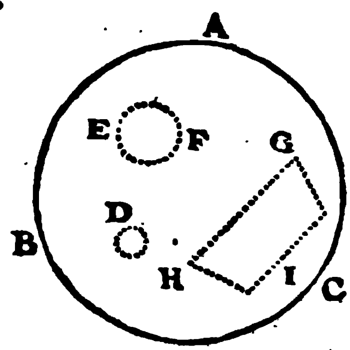
Corpus N vi quâlibet ſecundum directionem FC urgeatur, tangaturque in D à corpore M; producatur FC ut plano AB quod utrumque corpus contingit in D occurrat in H, ductâ per D rectâ DC ad planum AB perpendiculari, vis quâ corpus N urgetur, exponatur per lineam CH, & hæc (*per leg. mot. cor.* 2.) reſolvi poterit in vires æquipollentes CD & DH. Sed corpus M minimè premitur vi DH ſecundùm directionem plani contactûs agente; quarè ſolâ vi CD ad planum AB normali & per punctum contactûs D tranſeunte premitur. Q. E. D.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. V. Prop. XIX. Theor. XIV.

PROPOSITIO XIX. THEOREMA XIV.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vaſe quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (ſepoſitâ condenſationis, gravitatis, & virium omnium centripetarum conſideratione) æqualiter premuntur undique, & ſine omni motu à preſſione illâ orto permanent in locis ſuis.

Caſ. 1. In vaſe ſphærico *A B C* claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejuſdem pars nulla ex illâ preſſione movebitur. Nam ſi pars aliqua *D* moveatur, neceſſe eſt ut omnes hujuſmodi partes ad eandem à centro diſtantiam undique conſiſtentes, ſimili motu ſimul moveantur; atque hoc ideo quia ſimilis & æqualis eſt omnium preſſio, & motus omnis excluſus ſupponitur, niſi qui à preſſione illâ oriatur. Atqui non poſſunt omnes ad centrum propius accedere, niſi fluidum ad centrum condenſetur; contra hypotheſin. Non poſſunt longiùs ab eo recedere, niſi fluidum ad circumferentiam condenſetur; etiam contra hypotheſin. Non poſſunt ſervatâ ſuâ à centro diſtantiâ moveri in plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non poteſt pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco ſuo movebitur. *Q. E. D.*



Caſ. 2. Dico jam, quòd fluidi hujus partes omnes ſphæricæ æqualiter premuntur undique. Sit enim *E F* pars ſphærica fluidi, & ſi hæc undique non premitur æqualiter, augeatur preſſio minor, uſque dum ipſa undique prematur æqualiter; & partes ejus, per caſum primum, permanebunt in locis ſuis. Sed ante auctam preſſionem permanebant in locis ſuis, per caſum eundem primum, & additione preſſionis novæ movebuntur de locis ſuis,

per

per definitionem fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falsò dicebatur quòd ſphæra *E F* non undique premebatur æqualiter. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Dico præterea quòd diverſarum partium ſphæricarum æqualis ſit preſſio. Nam partes ſphæricæ contiguæ ſe mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, per motûs legem III. Sed &, per caſum ſecundum, undique premuntur eâdem vi. Partes igitur duæ quævis ſphæricæ non contiguæ, ([a]) quia pars ſphærica intermedia tangere poteſt utramque, prementur eâdem vi. *Q. E. D.*

Caſ. 4. Dico jam quòd fluidi partes omnes ubique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi poſſunt à partibus ſphæricis in punctis quibuſcunque, & ibi partes illas ſphæricas æqualiter premunt, per caſum 3. & viciſſim ab illis æqualiter premuntur, per motûs legem tertiam. *Q. E. D.*

Caſ. 5. Cùm igitur fluidi pars quælibet *GHI* in fluido reliquo tanquam in vaſe claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus ſe mutuò æqualiter premant & quieſcant inter ſe; manifeſtum eſt quòd fluidi cujuſcunque *GHI*, quod undique premitur æqualiter, partes omnes ſe mutuò premunt æqualiter, & quieſcunt inter ſe. *Q. E. D.*

Caſ. 6. Igitur ſi fluidum illud in vaſe non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter; cedet idem preſſioni fortiori, per definitionem fluiditatis.

Caſ. 7. Ideoque in vaſe rigido fluidum non ſuſtinebit preſſionem fortiorem ex uno latere quàm ex alio, ſed eidem cedet, idque in momento temporis, quia latus vaſis rigidum non perſequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppoſitum, & ſic preſſio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam fluidum, quàm primum à parte magis preſsâ recedere conatur, inhibetur per reſiſtentiam vaſis ad latus oppoſitum; redu-

(a) * *Quia pars ſphærica intermedia tangere poteſt utramque.* Nam pars illa intermedia duas alias partes ſphæricas in punctis contactûs premet; atque ab illis premetur æqualiter, (*ex dem.*) 171.

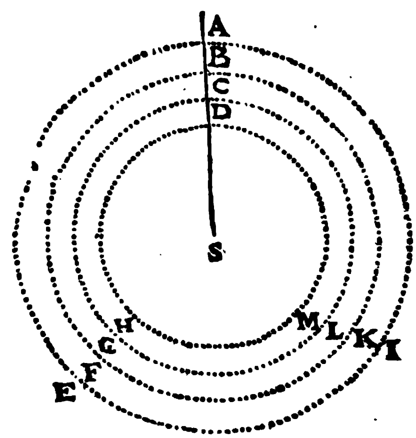
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XIX. THEOR. XIV.

reducetur preſſio undique ad æqualitatem, in momento temporis, ſine motu locali: & ſubinde partes fluidi, per caſum quintum, ſe mutuò prement æqualiter, & quieſcent inter ſe. *Q. E. D.*

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter ſe, per preſſionem fluido ubivis in externâ ſuperficie illatam, mutari poſſunt, niſi quâtenus aut figura ſuperficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intenſiùs vel remiſſius ſeſe premendo difficiliùs vel faciliùs labuntur inter ſe.

PROPOSITIO XX. THEOREMA XV.

Si (b) *fluidi ſphærici, & in æqualibus à centro diſtantiis homogenei, fundo ſphærico concentrico incumbentis partes ſingulæ verſus centrum totius gravitent; ſuſtinet fundum pondus cylindri, cujus baſis æqualis eſt ſuperficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.*



Sit *D H M* ſuperficies fundi, & *A E I* ſuperficies ſuperior fluidi. Superficiebus ſphæricis innumeris *B F K*, *C G L* diſtinguatur fluidum in orbes concentricos æqualiter craſſos; & concipe vim gravitatis agere ſolummodo in ſuperficiem ſuperiorem orbis cujuſque, & æquales eſſe actiones in æquales partes ſuperficierum omnium. Premitur ergo ſuperficies ſuprema *A E* vi ſimplici gravitatis propriæ, quâ & omnes

(b) 172. *Si fluidi ſphærici &c.* Fluidi quieſcentis ſuperficies ad gravitatis directionem perpendicularis eſt ubique, & ideo ſi vis gravitatis ad centrum unum dirigatur, ſphærica eſt. Si enim ſuperficiei fluidi pars aliqua ad gravitatis directionem inclinata ſit, reſolvatur vis gravitatis in duas vires quarum una directionem habeat ſuperficiei fluidi perpendicularem, altera parallelam; & (*ex definitione*) fluidum ſecundùm hanc directionem movebitur, contra hyp. Erit igitur pars quælibet

nes orbis ſupremi partes & ſuperficies ſecunda *B F K* (*per prop.* XIX.) pro (c) menſurâ ſuâ æqualiter premuntur. Premitur præterea ſuperficies ſecunda *B F K* vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit preſſionem duplam. Hâc preſſione, pro menſurâ ſuâ, & inſuper vi propriæ gravitatis, id eſt, preſſione triplâ urgetur ſuperficies tertia *C G L*. Et ſimiliter preſſione quadruplâ urgetur ſuperficies quarta, quintuplâ quinta, & ſic deinceps. Preſſio igitur quâ ſuperficies unaquæque urgetur, non eſt ut quantitas ſolida fluidi incumbentis, ſed ut numerus orbium ad uſque ſummitatem fluidi; & æquatur gravitati orbis infimi multiplicatæ per numerum orbium: hoc eſt, gravitati ſolidi cujus ultima ratio ad cylindrum præfinitum (ſi modo orbium augeatur numerus & minuatur craſſitudo in infinitum, ſic ut actio gravitatis à ſuperficie infimâ ad ſupremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Suſtinet ergo ſuperficies infima pondus cylindri præfiniti. *Q. E. D.* (d) Et ſimili argumentatione patet propoſitio, ubi gravitas decreſcit in ratione quâvis aſſignatâ diſtantiæ à centro, ut & ubi fluidum ſurſum rarius eſt, deorſum denſius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur à toto fluidi incumbentis pondere, ſed eam ſolummodo ponderis partem ſuſtinet quæ in propoſitione deſcribitur; pondere reliquo à fluidi figurâ fornicatâ ſuſtentato.

Co-

libet ſuperficiei ad gravitatis directionem perpendicularis: & quoniam nulla eſt alia ſuperficies, præter ſphæricam, quæ hanc habeat proprietatem, ut lineæ omnes ipſi perpendiculares ad centrum unum concurrant, ſuperficies illa fluidi ſphærica erit. Q. E. D.

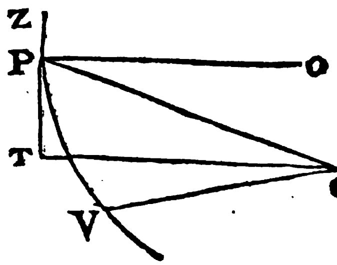
(c) * *Pro menſurâ ſuâ æqualiter premuntur.* Singulæ, nimirum, ſuperficiei ſecundæ partes, ſemotâ partium illarum propriâ gravitate, æque premuntur ac partes æquales ſuperficiei ſupremæ; quod per Prop. XIX. manifeſtum fit, ſi ſpatium, quod illas ſuperficies continet, tanquam vas aliquod conſideretur quod fluidum æqualiter undique compreſſum complectitur.

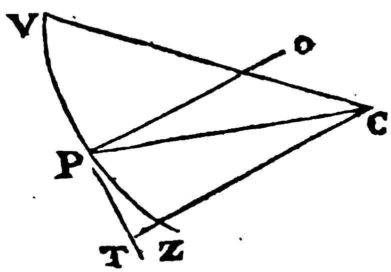
(d) * *Et ſimili argumentatione &c.* 172.
Patet ut in ſuperiori demonſtratione, quod pondus partium omnium æqualium D, C, B, A in totâ rectâ D A exiſtentium ſuſtineatur à parte D correſpondente fundi ſphærici D H M. Hoc igitur fundum ſuſtinet pondus cylindri, cujus baſis æqualis eſt ſuperficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis D A; modò tamen in locis à fundo ſphærico D H M & à baſi planâ cylindri æquidiſtantibus, eadem ſervetur fluidi denſitas, eademque vis gravitatis quæ in baſim cylindri perpendiculariter tendat ubique.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XVIII. PROBL. V.

PROBLEMA.

Vis centripeta tendens ad datum punctum C ſit in loco quovis P ut diſtantiæ CP dignitas CP ^{n} reciprocè, & medii reſiſtentia ſit ut medii denſitas & velocitatis dignitas quælibet conjunctim; requiritur tum medii denſitas in locis ſingulis quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ V P Z moveatur, tum corporis velocitas & medii reſiſtentia in locis ſingulis.



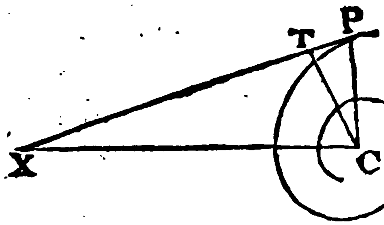


158. Dicantur vis centripeta in loco P, g, reſiſtentia r, medii denſitas k, velocitas corporis v, diſtantia P C, y, radius P O circuli curvam oſculantis in P, R, arcus V P s; perpendiculum C T in tangentem P T ductum p, & a, b, n, m, quantitates datæ, erit (*per hyp.*) $g = \frac{a}{y^n}$; & $r = \frac{kv^m}{b}$, ſed eſt ſemper (27) $vv = \frac{Rpg}{y} = \frac{aRp}{y^{n+1}} = \frac{apdy}{y^n dp}$. Velocitas igitur per alterutram ex his æquationibus dabitur. Porrò (26.) $r = \frac{-vdv - gdy}{ds} = \frac{-vdv}{ds} - \frac{ady}{y^n ds}$, vel etiam (*ibid.*) $\pm r = \frac{-vdv \times \sqrt{yy-pp} - gdy \times \sqrt{yy-pp}}{ydy} = \frac{-vdv \times \sqrt{yy-pp}}{ydy} - \frac{a\sqrt{yy-pp}}{y^{n+1}}$. Quarè ſi in alterutrâ harum æquationum loco vdv ſcribatur ipſius valor, qui reperitur capiendo fluxionem æquationis $vv = \frac{aRp}{y^{n+1}} = \frac{apdy}{y^n dp}$, obtinebitur reſiſtentia r, ſeu $\frac{kv^m}{b}$, ejuſque valore diviſo per $\frac{v^m}{b}$ quod datum eſt inventâ velocitate v, dabitur medii denſitas k. Q. E. I.

159. Exemplo ſit ſpiralis Logarithmica. In illâ ob datum angulum T P C datur ratio P C ad C T ſeu y ad p; ſit ergò $c : a = y : p$, & ideò $p = \frac{ay}{c}$; atque $dp = \frac{ady}{c}$, & erit $vv = \frac{apdy}{y^n dp} = \frac{pc}{y^n} = \frac{a}{y^{n-1}}$. Et his verò habetur $\sqrt{yy-pp} = \frac{y\sqrt{cc-aa}}{c}$, & $vdv = \frac{(1-n)ady}{2y^n}$, undè pro corporis deſcenſu invenitur $r = \frac{(3-n)a\sqrt{cc-aa}}{2cy^n}$; & pro aſcenſu $r = \frac{(n-3)a\sqrt{cc-aa}}{2cy^n}$, ideoque reſiſtentia eſt reciprocè ut y^n. Cùm autem) per hyp.) ſit $r = \frac{kv^m}{b} = \frac{ka^{\frac{m}{2}}}{by^{\frac{mn-m}{2}}}$, erit denſitas k ut $ry^{\frac{mn-m}{2}}$, ſeu ut $\frac{y^{\frac{mn-m}{2}}}{y^n} = y^{\frac{mn-m-2n}{2}}$, & hinc ſi ponatur $m = 2$, erit denſitas k, ut y^{-1}, ſeu ut $\frac{1}{y}$, prorſus ut (*in prop.* 16.) demonſtratum eſt.

160. *Coroll.* 1. Per ſuperiores æquationes (158), ex datâ corporis velocitate inve-

invenitur tum vis centripeta, tum reſiſtentia & medii denſitas. Eſt enim $g = \frac{vvy}{Rp} = \frac{vvdp}{pdy}$; undè habetur vis centripeta g; datis autem vi centripetâ & celeritate, invenitur tum reſiſtentia r, tum medii denſitas k, ut ſupra (158).



161. Exemplum ſit in ſpirali hyperbolicâ cujus hæc eſt proprietas ut ſi per centrum C erigatur ad radium CP, perpendicularis CX tangenti PX per P ductæ occurrens in X ſit ſubtangens illa CX conſtans. Velocitas ſit ut tangens PX, & reſiſtentia r ut denſitas medii & quadratum velocitatis conjunctim, hoc eſt $r = \frac{kv^2}{b}$, dicaturque CX, c, & ideò $PX = \sqrt{yy+cc}$, atque (*per hyp.*) $v = \frac{e\sqrt{yy+cc}}{c}$, & e, quantitas data. Erit ob triangula CPT, XPC ſimilia, PX $(\sqrt{yy+cc})$: CX (c) = PC (y) : CT (p), & ideò $p = \frac{cy}{\sqrt{yy+cc}}$, $dp = \frac{c^3dy}{\overline{yy+cc}^{\frac{3}{2}}}$, & $\sqrt{yy-pp} = \frac{yy}{\sqrt{yy+cc}}$. Quarè fiet (160) $g = \frac{vvdp}{pdy} = \frac{e^2}{y}$; id eſt, vis centripeta ut diſtantia PC reciprocè. Quia verò $vv = \frac{ee}{cc} \times (yy+cc)$ erit $vdv = \frac{eeydy}{cc}$ & propterea pro corporis deſcenſu $r = \frac{vdv\sqrt{yy-pp}}{ydy} + \frac{g\sqrt{yy-pp}}{y} = \frac{eeyy}{cc\sqrt{yy+cc}} + \frac{e^2}{\sqrt{yy+cc}} = \frac{e^2 \times \overline{yy+cc}}{cc\sqrt{yy+cc}} = \frac{e^2}{c^2} \times \sqrt{yy+cc}$, adeóque reſiſtentia ut tangens PX, ſeu ut velocitas. Cùm igitur ſit $r = kv^2 = \frac{ke^2}{cc} \times (yy+cc) = \frac{e^2}{cc} \times \sqrt{yy+cc}$, erit denſitas medii $k = \frac{1}{\sqrt{yy+cc}}$, ſeu reciprocè ut tangens PX ſivè reciprocè ut velocitas. 161.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XVIII. PROBL. V.

162. *Coroll.* 2. Datâ medii denſitate & conceſſis figurarum quadraturis, dabitur vis centripeta & corporis velocitas. Eſt enim (27. & 160.) $vdv + \frac{vvdp}{p} = -rds = \frac{kv^m ds}{b}$ (158) & dividendo per v^m, & multiplicando per p^{2-m}, ſit $p^{2-m}v^{1-m}dv + v^{2-m}p^{1-m}dp = \frac{kp^{2-m}ds}{b}$, & ſumptis utrinque fluentibus habetur, $\frac{1}{2-m} \times p^{2-m} \times v^{2-m} = -S.\frac{kp^{2-m}ds}{b}$, ideòque $v^{2-m} = (m-2)\frac{S.kp^{2-m}ds}{b \times p^{2-m}}$. Quare ſi denſitas medii k, ſit ut functio quævis diſtantiæ PC à centro C, inveniri poterit fluens $S.kp^{2-m}ds$ aut algebraicè aut per figurarum quadraturas, & loco ds, ſcribi poteſt $\pm\frac{ydy}{\sqrt{yy-pp}}$ (26). Inventâ autem velocitate v, obtinetur vis centripeta g per æquationem $g = \frac{vvdp}{pdy} = \frac{vvy}{Rp}$ (160).

163. *Corol.* 3. Si in ſuperiori corollario ſit $m = 2$, id eſt, reſiſtentia ut denſitas & quadratum velocitatis conjunctim, erit $2 - m = 0$, & æquatio $p^{2-m}v^{1-m}dv + v^{2-m}p^{1-m}dp = -\frac{kp^{2-m}ds}{b}$, in hanc mutabitur $\frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = -\frac{kds}{b}$; undè ſumptis fluentibus, habetur $L.v + L.p = -S.\frac{kds}{b}$, & $L.v = -S.\frac{kds}{b} - L.p$;

corpus, quod ſit condenſationis expers, ſubmergatur in hoc fluido, id ex preſſione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non deſcendet, non aſcendet, non cogetur figuram ſuam mutare. Si ſphæricum eſt, manebit ſphæricum, non obſtante preſſione; ſi quadratum eſt, manebit quadratum: idque ſive molle ſit, ſive fluidiſſimum; ſive fluido liberè innatet, ſive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis ſubmerſi, & par eſt ratio omnium ejuſdem magnitudinis, figuræ & gravitatis ſpecificæ ſubmerſorum corporum. Si corpus ſubmerſum ſervato pondere liqueſceret & indueret formam fluidi; hoc, ſi prius aſcenderet, vel deſcenderet, vel ex preſſione figuram novam indueret, etiam nunc aſcenderet, vel deſcenderet, vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum cauſæ permanent. Atqui (*per caſ. 5. prop.* XIX.) jam quieſceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5. Proinde corpus quod ſpecificè gravius eſt quàm fluidum ſibi contiguum, ſubſidebit, & quod ſpecificè levius eſt aſcendet, motumque & figuræ mutationem conſequetur, quantum exceſſus ille vel defectus gravitatis efficere poſſit. Namque exceſſus ille vel defectus rationem habet impulſus, quo corpus, aliàs in æquilibrio cum fluidi partibus conſtitutum, urgetur; & comparari poteſt cum exceſſu vel defectu ponderis in lance alterutrâ libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis conſtitutorum duplex eſt gravitas, altera vera & abſoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas abſoluta eſt vis tota quâ corpus deorſum tendit: relativa & vulgaris eſt exceſſus gravitatis quo corpus magis tendit deorſum quam fluidum ambiens. Prioris generis gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis ſuis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave eſt, ut in vaſis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale eſt ponderibus omnium partium, ideoque ex iiſdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis ſuis, id eſt, inter ſe collata non prægravant, ſed mutuos ad deſcendendum conatus impedientia permanent in locis ſuis, perinde ac ſi gravia

non

non eſſent. Quæ in aëre ſunt & non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quâtenus aëris pondere non ſuſtinentur. Pondera vulgi nihil aliud ſunt quàm exceſſus verorum ponderum ſupra pondus aëris. Unde & vulgò dicuntur levia, quæ ſunt minus gravia, aërique prægravanti cedendo ſuperiora petunt. Comparativè levia ſunt, non verè, quia deſcendunt in vacuo. Sic & in aquâ corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem deſcendunt vel aſcendunt, ſunt comparativè & apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens eſt exceſſus vel defectus quo vera eorum gravitas vel ſuperat gravitatem aquæ, vel ab eâ ſuperatur. Quæ verò nec prægravando deſcendunt, nec prægravanti cedendo aſcendunt, etiamſi veris ſuis ponderibus adaugeant pondus totius, comparativè tamen & in ſenſu vulgi non gravitant in aquâ. Nam ſimilis eſt horum caſuum demonſtratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonſtrantur, obtinent in aliis quibuſcunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde ſi medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel à gravitate propriâ, vel ab aliâ quâcunque vi centripetâ, & corpus ab eâdem vi urgeatur fortius; differentia virium eſt vis illa motrix, quam in præcedentibus propoſitionibus ut vim centripetam conſideravimus. Sin corpus à vi illâ urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifugâ haberi debet.

Corol. 9. Cùm autem fluida premendo corpora incluſa non mutent eorum figuras externas, patet inſuper (*per corollarium prop.* XIX.) quod non mutabunt ſitum partium internarum inter ſe: proindeque, ſi animalia immergantur, & ſenſatio omnis à motu partium oriatur; nec lædent corpora immerſa, nec ſenſationem ullam excitabunt, niſi quâtenus hæc corpora à compreſſione condenſari poſſunt. Et par eſt ratio cujuſcunque corporum ſyſtematis fluido comprimente circundati. Syſtematis partes omnes iiſdem agitabuntur motibus, ac ſi in vacuo conſtituerentur, ac ſolam retinerent gravitatem ſuam comparativam, niſi quâtenus fluidum vel motibus earum nonnihil reſiſtat, vel ad eaſdem compreſſione conglutinandas requiratur.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVI.

Sit fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus à vi centripetâ diſtantiis ſuis à centro reciprocè proportionali deorſum trahantur: dico quod, ſi diſtantiæ illæ ſumantur continuè proportionales, denſitates fluidi in iiſdem diſtantiis erunt etiam continuè proportionales.

Deſignet ATV fundum ſphæricum cui fluidum incumbit, S centrum, SA, SB, SC, SD, SE, SF, &c. diſtantias continuè proportionales. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c. quæ ſint ut denſitates medii in locis A, B, C, D, E, F; & (g) ſpecificæ gravitates in iiſdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, &c. vel, (h) quod perinde eſt, ut $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$, &c. Finge primùm has gravitates uniformiter continuari ab A ad B, à B ad C, à C ad D, &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, D, &c. (i) Et hæ gra-

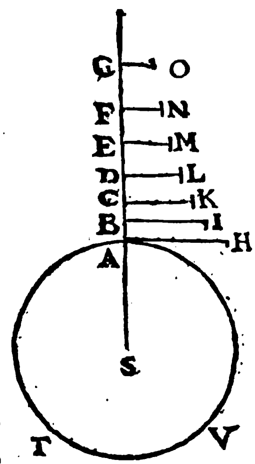
(g) 174. *Et ſpecificæ gravitates &c.* Fluidi enim cujus ſingulæ particulæ vi gravitatis urgentur gravitas ſpecifica eſt ut denſitas & vis gravitatis acceleratrix conjunctim. Eſt enim gravitas ſpecifica ut pondus directè & volumen inversè (170); Sed pondus (*per defin. VIII. lib. I.*) eſt ut quantitas materiæ & vis gravitatis acceleratrix conjunctim; quantitas verò materiæ (2. *lib.* I.) eſt ut denſitas & volumen conjunctim. Quare, conjunctis his rationibus, gravitas ſpecifica eſt ut denſitas & vis gravitatis acceleratrix conjunctim. Q. E. D.

(h) * *Vel, quod perinde eſt, ut &c.* Cùm enim (*per hyp.*) diſtantiæ SA, SB, SC, SD &c. ſint continuè proportionales, earum differentiæ AB, BC, CD &c. ipſis proportionales erunt.

(i) * *Et hæ gravitates ductæ &c.* Nam ſi pondus quod fundum ſphæricum ATV ſuſtinet, exponatur per cylindrum cujus baſis æqualis ſit ſuperficiei ATV & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis, volumen fluidi cylindrici pro altitudine AB erit $ATV \times AB$, ideoque ob datam ſuperficiem ATV, erit volumen illud ut AB, multiplicetur illud per gravitatem ſpecificam & factum erit ut pondus ſeu preſſio; quare cùm (*ex demonſt.*) gravitas ſpecifica ſit ut $\frac{AH}{AB}$, preſſio flui-

di

gravitates ductæ in altitudines *AB*, *EC*, *CD*, &c. conficient preſſiones *AH*, *BI*, *CK*, &c. quibus fundum *ATV* (juxta theorema xv.) urgetur. Suſtinet ergo particula *A* preſſiones omnes *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, (k) pergendo in infinitum; & particula *B* preſſiones omnes præter primam *AH*; & particula *C* omnes præter duas primas *AH*, *BI*; & ſic deinceps: ideoque particulæ primæ *A* denſitas *AH*, eſt ad particulæ ſecundæ *B* denſitatem *BI* ut ſumma omnium *AH* + *BI* + *CK* + *DL*, in infinitum, ad ſummam omnium *BI* + *CK* + *DL*, &c. Et *BI* denſitas ſecundæ *B* eſt ad *CK* denſitatem tertiæ *C*, ut ſumma omnium *BI* + *CK* + *DL*, &c. ad ſummam omnium *CK* + *DL*, &c. Sunt igitur ſummæ illæ differentiis ſuis *AH*, *BI*, *CK*, &c. proportionales, atque ideo continuè proportionales (*per hujus lem.* 1.) proindeque differentiæ *AH*, *BI*, *CK*, &c. ſummis proportionales, ſunt etiam continuè proportionales. Quare cùm denſitates in locis *A*, *B*, *C*, &c. ſint ut *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt etiam hæ continuè proportionales. Pergatur per ſaltum, & ex æquo in diſtantiis *SA*, *SC*, *SE* continuè proportionalibus, erunt denſitates *AH*, *CK*, *EM* continuè proportionales. Et eodem argumento, in diſtantiis quibuſvis continuè proportionalibus *SA*, *SD*, *SG*, denſitates *AH*, *DL*, *GO* erunt continuè proportionales. Coeant jam puncta *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. eo ut progreſſio gravitatum ſpecificarum à fundo *A* ad ſummitatem fluidi continua reddatur, & in diſtantiis quibuſvis continuè proportionalibus *SA*, *SD*, *SG*, denſitates *AH*, *DL*, *GO*, ſemper exiſtentes continuè proportionales, manebunt etiamnum continuè proportionales. *Q. E. D.*



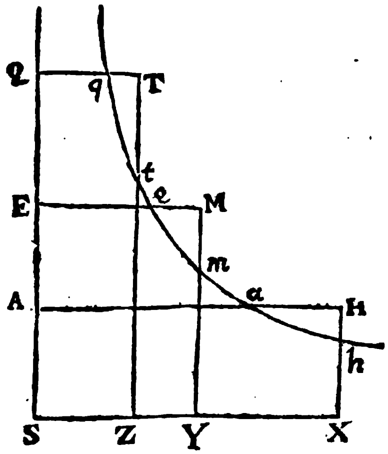
Co-

di cylindrici, cujus eſt altitudo AB, erit ut AH, & ita de cæteris.

(k) 175. * *Pergendo in infinitum.* Quoniam enim (*per hyp.*) denſitas compreſſioni proportionalis eſt, ubi compreſſio nulla evadit, evaneſcit quoque denſitas, ſeu, fluidum fit infinitè rarum, ac proinde in infinitum expanditur, cùm ratio voluminis ad materiæ quantitatem infinita evadat (2. *lib.* 1.). 175.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXI. THEOR. XVI.

Corol. Hinc ſi detur denſitas fluidi in duobus locis, putà *A* & *E*, colligi poteſt ejus denſitas in alio quovis loco *Q*. Centro *S*, aſymptotis rectangulis *S Q*, *S X* deſcribatur hyperbola ſecans perpendicula *A H*, *E M*, *Q T* in *a*, *e*, *q*, ut & perpendicula *H X*, *M Y*, *T Z*, ad aſymptoton *S X* demiſſa, in *h*, *m* & *t*. Fiat area *Y m t Z* ad aream datam *Y m h X* ut area data *E e q Q* ad aream datam *E e a A*; & linea *Z t* producta abſcindet lineam *Q T* denſitati proportionalem. Namque ſi lineæ *S A*, *S E*, *S Q* ſunt continuè proportionales, (l) erunt areæ *E e q Q*, *E e a A* æquales, & inde areæ his proportionales *Y m t Z*, *X h m Y* etiam æquales, & lineæ *S X*, *S Y*, *S Z*, id eſt, *A H*, *E M*, *Q T* (m) continuè proportionales, ut oportet. Et ſi lineæ *S A*, *S E*, *S Q* obtinent alium quemvis ordinem in ſerie continuè proportionalium, lineæ *A H*, *E M*, *Q T*, ob proportionales areas hyperbolicas, (n) obtinebunt eundem ordinem in aliâ ſerie quantitatum continuè proportionalium.



PRO-

(l) * *Erunt areæ E e q Q, E e a A æquales*, per not. 379. lib. 1.

(m) * *Continue proportionales*,) 379. lib. 1.)

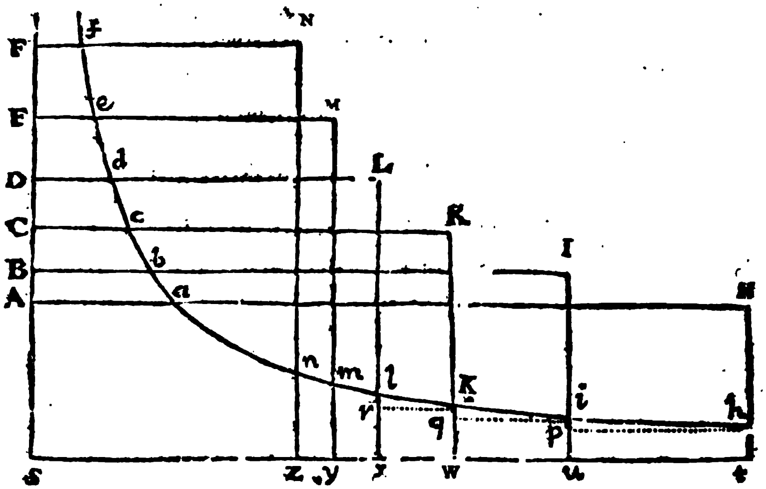
(n) * *Obtinebunt eumdem ordinem &c.* * Etenim areæ Hyperbolicæ E e a A, Q q a A ſunt Logarithmi linearum S E, S Q, & pariter areæ V m t Z, X h t Z ſunt Logarithmi linearum S Y, S X, (*379, 389, lib.* 1.) ſed cùm areæ Y m t Z, X h t Z ſint per conſtructionem proportionales areis E e a A, Q q a A, illæ areæ Y m t Z; X h t Z per Doctrinam Logarithmorum (n. 38) poterunt eſſe Logarithmi linearum S E, S Q; cùm ergo eædem quantitates poſſint eſſe Logarithmi tam quantitatum S E, S Q, quàm quantitatum S Y, S X, oportet ut iſtæ quantitates S E, S Y & S Q, S X correſpondentia loca occupent in Progreſſionibus Geometricis ad quas pertinent.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVII.

PROP. XXII. THEOR. XVII.

Sit fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus à gravitate quadratis diſtantiarum ſuarum à centro reciprocè proportionali deorſum trahantur: dico quod, (°) ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione muſicâ, denſitates fluidi in his diſtantiis erunt in progreſſione geometricâ.

Deſignet *S* centrum, & *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE* diſtantias in progreſſione geometricâ. Erigantur perpendicula *AH*, *BI*,



CK, &c. quæ ſint ut fluidi denſitates in locis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*,

(°) * *Quòd ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione muſicâ*, aut, quod idem eſt, ſi tales ſumantur diſtantiæ ut earum reciprocæ ſint in progreſſione arithmeticâ.

* Scilicet tres quantitates dicuntur eſſe in continuâ proportione Muſicâ ſive Harmonicâ, ſi prima ſit ad tertiam ut differentia primæ & ſecundæ ad differentiam ſecundæ & tertiæ. Et ſi ſit ſeries plurium quantitatum talium ut terminus quivis ſit ad ſubſequentem, ut differentia prioris à termino intermedio, ad differentiam hujus intermedii à poſteriore termino, ea ſeries dicitur *Progreſſio Muſica*. 175.

Cor. 1. *In progreſſione Muſicâ factum duorum priorum terminorum eſt ad factum duorum quorumvis immediatè ſibi ſuccedentium ut differentia inter duos primos terminos ad differentiam inter hos ultimos.* Nam ſunto termini progreſſionis Muſicæ *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* &c. & differentiæ inter ſingulos *M*, *N*, *P*, *Q*, *R* &c. erit per definitionem hujus progreſſionis

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXII. THEOR. XVII.

E, &c. & ipſius gravitates (p) ſpecificæ in iiſdem locis erunt $\frac{AH}{SAq}$, $\frac{BI}{SBq}$, $\frac{CK}{SCq}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab A ad B, ſecundam à B ad C, tertiam à C ad

$$A:C = M:N$$
$$B:D = N:P$$
$$C:E = P:Q$$
$$D:F = Q:R,$$ unde ex compoſitione rationum patet quod eſt
$$A \times B : E \times F = M : R.$$

Cor. 2. *Differentia inter duos primos terminos eſt ad differentiam inter duos quoſvis alios, ut ſecundus terminus, toties mulctatus differentiâ ſua à primo quot ſunt termini inter primum & ultimum, ad eum ultimum.*

Nam (iiſdem litteris adhibitis quæ in ſuperiore Corollario) cùm ex naturâ progr. ſit $A:C = M:N$, ſitque $A = B - M$; eſt $B - M : C = M : N$, ergo in hoc caſu, differentia M inter duos primos terminos A & B eſt ad differentiam N inter B & C ut ſecundus terminus B ſemel mulctatus differentiâ ſuâ à primo, cùm ſit unicus terminus inter primum A & ultimum C, ad eum ultimum C.

Cùm ergo ſit $B - M : C = M : N$, viciſſim $B - M : M = C : N$, & dividendo $B - 2M : M = C - N : N$; cùmque ſit $C - N = B$, eſt $B - 2M : M = B : N$, ſed, per defin. progreſſ. eſt $B : N = D : P$ ergo $B - 2M : M = D : P$ & viciſſim $B - 2M : D = M : P$, ſunt verò duo termini inter A & D, unde rurſus in hoc caſu conſtat Corollarii veritas.

Item cùm ſit $B - 2M : D = M : P$ & viciſſim $B - 2M : M = D : P$, erit dividendo $B - 3M : M = D - P : P$, cùmque ſit $D - P = C$ erit $B - 3M : M = C : P$ cùmque per defin. progr. ſit $C : P = E : Q$ erit $B - 3M : M = E : Q$ & viciſſim $B - 3M : E = M : Q$, ſunt verò inter A & E tres termini: Cùmque eadem recurrat ſemper demonſtratio ſi numerus terminorum progreſſionis inter primum & ultimum ſit n; ſi ſecundus terminus dicatur B, differentia à primo M, ultimus terminus ſit F, differentiâ à præcedente R erit, $M : R = B - nM : F$. Q. E. Dem.

Cor. 3. *In Progreſſione Muſicâ ſecundus terminus toties mulctatus ſuâ differentiâ à primo quot ſunt termini inter eum & ultimum eſt ad ultimum ut factum duorum primorum terminorum progreſſionis ad factum duorum poſtremorum.*

Liquet utique ex collatione duorum præcedentium Corollariorum; unde eſt ſemper, $B - nM : F = A \times B : E \times F$.

Theor. I. *Quilibet terminus progreſſionis Muſicæ eſt æqualis facto duorum primorum terminorum diviſo per ſecundum terminum toties mulctatum differentiâ ſuâ à primo quot ſunt termini à primo ad eum ultimum terminum.*

Primus terminus eſt $\frac{A \times B}{B}$, ſecundus terminus $\frac{A \times B}{A}$ ſed $A = B - M$ ergo 2us terminus eſt $\frac{A \times B}{B - M}$. Pro reliquis terminis habetur ſemper per *Coroll.* 3. $B - nM : F = A \times B : E \times F$ diviſis ergo Conſequentibus per F, erit $B - nM : 1 = A \times B : E$ unde eſt $E = \frac{A \times B}{B - nM}$ ſed cum n deſignaret numerum terminorum inter A & F hic exprimit numerum terminorum a primo ad E hoc ultimo annumerato, unde patet Theor. veritas.

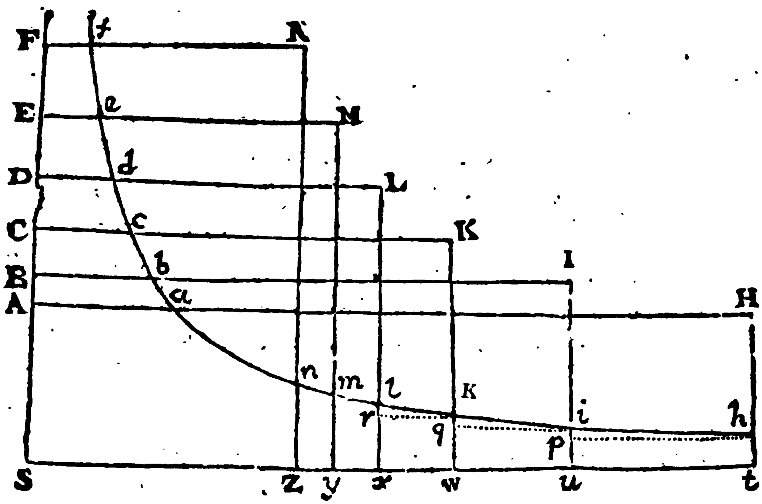
Theor. II. *Termini omnes progreſſionis Muſicæ ſunt inter ſe ſicut quantitates quarum reciprocæ conſtituunt progreſſionem Arithmeticam.*

Nam per Theor. prius termini $A : B$. C. D. E &c. prog. Muſicæ ſunt $\frac{A \times B}{B}$, $\frac{A \times B}{B - M}$, $\frac{A \times B}{B - 2M}$, $\frac{A \times B}{B - 3M}$, &c. $\frac{A \times B}{B - nM}$.
$\frac{1}{B}$, $\frac{1}{B - M}$, $\frac{1}{B - 2M}$, $\frac{1}{B - 3M}$, $\frac{B}{B - 2M}$.
Sed hæ ſunt reciprocæ quantitatum B, $B - M$, $B - 2M$, $B - 3M$, $B - nM$ quæ ſunt in progreſſione arithmeticâ; Ergo &c.

Scholium. Progreſſio muſica poteſt eſſe decreſcens & omnia ut prius procedent, mutatis ſignis negativis in poſitiva.

(p) * *Gravitates ſpecificæ in iiſdem locis erunt &c.* (174).

C ad *D* &c. Et hæ ductæ in altitudines *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, &c. vel, quod perinde eſt, in diſtantias *SA*, *SB*, *SC*, &c. altitudinibus illis proportionales, (q) conficient exponentes preſſionum $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Quare cùm denſitates ſint ut harum preſſionum ſummæ, differentiæ denſitatum $AH - BI$, $BI - CK$, &c. erunt ut ſummarum differentiæ $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Centro *S*, aſymptotis *SA*, *Sx* deſcribatur



hyperbola quævis, quæ ſecet perpendicula *AH*, *BI*, *CK*, &c. in *a*, *b*, *c*, &c. ut & perpendicula ad aſymptoton *Sx* demiſſa *Ht*, *Iu*, *Kw* in *h*, *i*, *k*, & denſitatum differentiæ *tu*, *uw*, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times th$, $uw \times ui$, &c. ſeu *tp*, *uq*, &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id

Z 2 eſt;

(q) * *Conficient exponentes preſſionum*, &c. Quod patet ut in demonſtratione 173. ſeu quantitates preſſionibus proportionales, prop. XXI.

eſt, ut Aa, Bb, &c. Eſt enim, (r) ex naturâ hyperbolæ, SA ad AH vel St, ut th ad Aa, ideoque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale Aa. Et ſimili argumento eſt $\frac{BI \times ui}{SB}$ æquale Bb, &c. (ſ) Sunt autem Aa, Bb, Cc, &c. continuè proportionales, & propterea differentiis ſuis $Aa - Bb$, $Bb - Cc$, &c. proportionales; ideoque differentiis hiſce proportionalia ſunt rectangula tp, uq, &c. ut & ſummis differentiarum $Aa - Cc$ vel $Aa - Dd$ ſummæ rectangulorum $tp + uq$ vel $tp + uq + wr$. Sunto ejuſmodi termini quàm plurimi, & ſumma omnium differentiarum, puta $Aa - Ff$, erit ſummæ omnium rectangulorum, puta $zthn$, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur diſtantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, & (t) rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ $zthn$, ideoque huic areæ proportionalis eſt differentia $Aa - Ff$. (u) Sumantur jam diſtantiæ quælibet, puta SA, SD, SF, in progreſſione muſicâ, & differentiæ $Aa - Dd$, $Dd - Ff$ erunt æquales; & propterea differentiis hiſce proportionales areæ $thlx$, $xlnz$ æquales erunt inter ſe, & denſitates St, Sx, Sz, id eſt, AH, DL, FN, (x) continuè proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi dentur fluidi denſitates duæ quævis, puta AH & BI, dabitur area $thiu$, harum differentiæ tu reſpondens; & inde invenietur denſitas FN, in altitudine quâcunque SF, ſumendo aream $thnz$ ad aream illam datam $thiu$ ut eſt differentia $Aa - Ff$ (y) ad differentiam $Aa - Bb$.

Scho-

(r) * *Ex natura hyperbolæ*, per theor. 4. de hyperbola.

(ſ) *Sunt autem* Aa, Bb, Cc, &c. *continuè proportionales.* Nam (*per hyp.*) SA, SB, SC ſunt continuè proportionales, & (*per theor.* 4. *de hyp.*) Aa, Bb, Cc ſunt reciprocè ut SA, SB, SC, ideoque etiam continuè proportionales.

(t) * *Et rectangula evadent æqualia areæ hyperbolicæ* $zthn$, per Lemma III. lib. I.

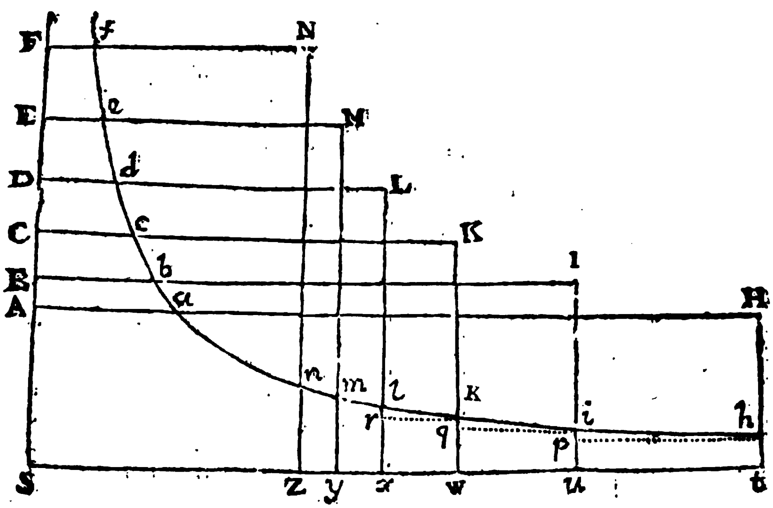
(u) * *Sumantur jam* diſtantiæ quælibet, puta SA, SD, SF in progreſſione muſicâ, & earum reciprocæ Aa, Dd, Ff erunt in progreſſione arithmetica, ideoque differentiæ Aa — Dd, Dd — Ff æquales.

(x) * *Continuè proportionales.* (379 lib. I.)

(y) 176. * *Ad differentiam* $Aa - Bb$. Quoniam verò area thiu eſt ad aream thnz

Scholium.

(z) Simili argumentatione probari poteſt, quòd ſi gravitas particularum fluidi diminuatur in triplicatâ ratione diſtantiarum à centro, & quadratorum diſtantiarum SA, SB, SC, &c. reciproca (nempe $\frac{SA\ cub.}{SAq}$, $\frac{SA\ cub.}{SBq}$, $\frac{SA\ cub.}{SCq}$) ſumantur in progreſſione arithmeticâ; denſitates AH, BI, CK, &c. erunt



in progreſſione geometricâ. Et ſi gravitas diminuatur in quadruplicatâ ratione diſtantiarum, & cuborum diſtantiarum reciproca (puta $\frac{SAqq}{SA\ cub.}$, $\frac{SAqq}{SB\ cub.}$, $\frac{SAqq}{SC\ cub.}$, &c.) ſumantur in

$t h n z$ ut Logarithmus lineæ St vel AH ad Logarithmum lineæ Sz ſeu FN (379 & 380 *lib.* 1.), denſitas FN per tabulas logarithmorum inveniri poterit. Et vice versâ, datâ denſitate FN invenietur altitudo SF: nam per prop. ſuperiorem dabitur $Aa - Ff$, & inde dabitur Ff, unde invenietur $FS = \frac{SA \times Aa}{Ef}$ (*per theor.* 4. *de hyp.*) Quia verò fluidi elaſticitas, cæteris paribus, vi comprimenti, ideoque denſitati (*per hyp.*) proportionalis eſt, patet per hoc corollarium ex datis altitudinibus inveniri poſſe elaſticitates, & vice versâ. 176.

(z) 177. * *Simili argumentatione probari poteſt &c.* Sit vis centripeta particularum fluidi reciprocè ut diſtantiæ di-

in progreſſione arithmetica; denſitates *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt in progreſſione geometrica. Et ſic in infinitum. Rurſus

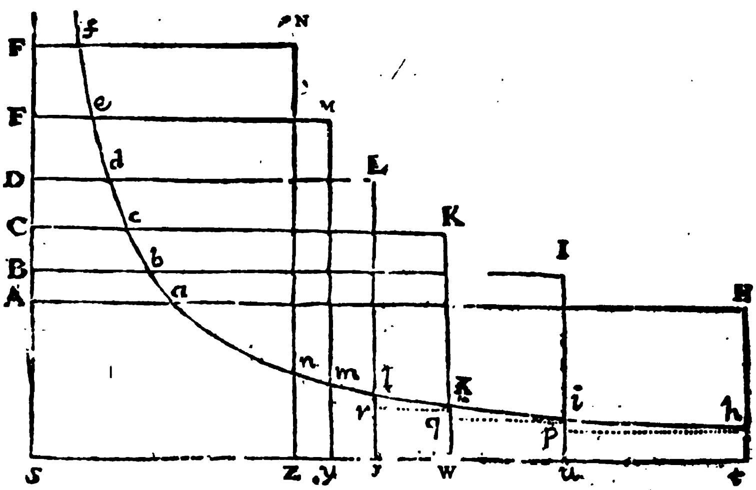
gnitas, cujus index eſt n; deſignet S centrum, & SA, SB, SC, SD, SE diſtantias in progreſſione geometrica. Erigantur perpendicula AH, BI, CK &c. quæ ſint ut fluidi denſitates in locis A, B, C, D, E &c. Et ipſius gravitates ſpecificæ in iiſdem locis erunt $\frac{AH}{SA^n}, \frac{BI}{SB^n}, \frac{CK}{SC^n}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari primam ab A ad B, ſecundam a B ad C, tertiam a C ad D, &c. Et hæ ductæ in altitudines AB, BC, CD, DE &c. vel quod perinde eſt, in diſtantias SA, SB, SC, &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes preſſionum $\frac{AH}{SA^{n-1}}, \frac{BI}{SB^{n-1}}, \frac{CK}{SC^{n-1}}$, &c. Quare cùm denſitates ſint ut harum preſſionum ſummæ, differentiæ denſitatum AH — BI, BI — CK; &c. erunt ut ſummarum differentiæ $\frac{AH}{SA^{n-1}}, \frac{BI}{SB^{n-1}}, \frac{CK}{SC^{n-1}}$, &c. ſiat eadem conſtructio, quæ ſupra in prop. XXII, & denſitatum differentiæ tv, uw, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA^{n-1}}, \frac{BI}{SB^{n-1}}$, &c. & rectangula tv × th, uw × ui, &c., ſeu tp, uq &c. ut $\frac{AH \times th}{SA^{n-1}}, \frac{BI \times ui}{SB^{n-1}}$, &c. id eſt, ut Aa^{n-1}, Bb^{n-1}, &c. Eſt enim (*per theor. 4. de hyp.*) AH × th æquale SA × Aa, & Aa reciprocè ut SA, ſeu directè ut $\frac{1}{SA}$, ideoque $\frac{AH \times th}{SA^{n-1}}$ ut $SA \times Aa \times Aa^{n-1}$, ſive ut Aa^{n-1} cum ſit SA × Aa = 1, & ſimili argumento eſt $\frac{BI \times ui}{SB^{n-1}}$ ut Bb^{n-1}, &c. ſunt autem Aa, Bb, Cc, &c. ideoque $Aa^{n-1}, Bb^{n-1}, Cc^{n-1}$ &c. continuè proportionales, & propterea differentiis ſuis $Aa^{n-1} - Bb^{n-1}, Bb^{n-1} - Cc^{n-1}$, &c. proportionales, ideoque differentiis hiſce proportionalia ſunt rectangula tp, uq, &c. ut & ſummis differentiarum $Aa^{n-1} - Cc^{n-1}$, vel $Aa^{n-1} - Dd^{n-1}$ ſummæ rectangulorum tp + uq, vel tp + uq + wr. Sunto ejuſmodi termini quàm plurimi, & ſumma omnium differentiarum; puta $Aa^{n-1} - Ff^{n-1}$, erit ſummæ omnium rectangulorum, puta zthn, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur diſtantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ zthn, ideoque huic areæ proportionalis eſt differentia $Aa^{n-1} - Ff^{n-1}$.

Sumantur jam diſtantiarum quarumlibet, puta SA, SD, SF dignitates SA^{n-1}, SC^{n-1}, SF^{n-1} in progreſſione muſica, ideoque earum reciprocæ $\frac{1}{SA^{n-1}}, \frac{1}{SD^{n-1}}, \frac{1}{SF^{n-1}}$, ſeu $Aa^{n-1}, Dd^{n-1}, Ff^{n-1}$ in progreſſione arithmetica, & differentiæ $Aa^{n-1} - Dd^{n-1}, Dd^{n-1} - Ff^{n-1}$ erunt æquales; & propterea differentiis hiſce proportionales areæ thlx, xlnz æquales erunt inter ſe, & denſitates St, Sx, Sz, id eſt, AH, DL, FN continuè proportionales. Quare ſi gravitas particularum fluidi diminuatur in ratione quâcumque multiplicatâ diſtantiarum, cujus exponens ſit n, & dignitatum SA^{n-1}, SB^{n-1}, SC^{n-1}, &c. reciproca (nempe $\frac{SA^n}{SA^{n-1}}, \frac{SA^n}{SB^{n-1}}, \frac{SA^n}{SC^{n-1}}$, &c. in quibus SA data eſt) ſumantur in progreſſione arithmetica; denſitates AH, BI, CK, &c. erunt in progreſſione geometrica.

Si itaque loco n ſcribantur numeri 3, 4, 5, 6 &c. in infinitum; & rurſus ſcribantur 0, —1, —2, —3 &c. in infinitum, patet veritas ſcholii in hypotheſi denſitatis vi comprimenti proportionalis. Quando autem n = 0, ſeu quando gravitas particularum fluidi in omnibus diſtantiis eadem eſt, eſt $\frac{SA^n}{SA^{n-1}} = SA$, $\frac{SA^n}{SB^{n-1}} =$ SB;

ſus ſi gravitas particularum fluidi in omnibus diſtantiis eadem ſit, & diſtantiæ ſint in progreſſione arithmeticâ denſitates erunt in progreſſione geometricâ, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas ſit ut diſtantia, & quadrata diſtantiarum ſint in progreſſione arithmeticâ, denſitates erunt in progreſſione geometricâ. Et ſic in infinitum. Hæc ita ſe habent ubi fluidi compreſſione condenſati denſitas eſt ut vis compreſſionis, vel, quod perinde eſt, ſpatium à fluido occupatum reciprocè ut hæc vis. Fingi poſſunt aliæ condenſationis leges, ut quòd cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-quadratum denſitatis, ſeu triplica-

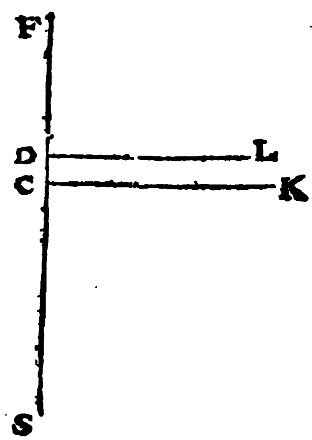
ta



SB, ideoque ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione arithmeticâ, denſitates erunt in progreſſione geometricâ, ideoque diſtantiæ ſunt ut denſitatum logarithmi, quia creſcentibus diſtantiis in progreſſione arithmeticâ, decreſcunt denſitates in progreſſione geometricâ. Quia verò *per experimenta conſtat, quod denſitas aëris*, cæteris paribus ac potiſſimum manente eodem caloris gradu, *ſit ut vis comprimens vel accuratè vel ſaltem quam proximè* in aëre quem experimentis poſſumus ſubjicere, vis autem aërem inferiorem comprimens, cæ-

teris etiam paribus, æqualis ſit ponderi aëris totius incumbentis, ideoque propor- 177.
tionalis altitudini mercurii in barometro; & præterea particularum aëris gravitas, in minoribus ſaltem à telluris ſuperficie diſtantiis, conſtans cenſeri poſſit, patet, quod, cæteris paribus, aëris denſitatem, ad hujuſmodi diſtantias minores, metiri poſſimus per logarithmos. Sed de his plura videre eſt in Elementis Aërometriæ Clar. *Wolfii*, in libro 2°. *Phoronomiæ*, & in ſectione 10â. *Hydrodynamicæ* Clar. *Danielis Bernoulli*.

ta ratio vis eadem cum quadruplicatâ ratione denſitatis. Quo in caſu, ſi gravitas eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ à centro, denſitas erit reciprocè ut cubus diſtantiæ. Fingatur quòd cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-cubus denſitatis, & ſi gravitas eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ, denſitas erit reciprocè in ſeſquiplicatâ ratione diſtantiæ. Fingatur quòd vis comprimens ſit in duplicatâ ratione denſitatis, & gravitas reciprocè in ratione duplicatâ diſtantiæ, & denſitas erit reciprocè ut diſtantia. (a) Caſus omnes percurrere longum eſſet. Cæterùm per experimenta conſtat quòd denſitas aëris ſit ut vis comprimens vel accuratè, vel ſaltem quàm proximè: & propterea denſitas aëris in atmoſphærâ terræ eſt ut pondus aëris totius incumbentis, id eſt, ut altitudo mercurii in barometro.



(a) 178. * *Caſus omnes percurrere longum eſſet*; Satius erit generalem formulam tradere, ex quâ ſinguli caſus pro lubitu eruantur. Iiſdem igitur, quæ ſupra, poſitis, ſit diſtantia variabilis $SC = x$, altitudo $CD = dx$, denſitas $CK = y$, vis tota comprimens in loco $C = v$, vis gravitatis ibidem $= g$; & erit gravitas ſpecifica in eodem lo o ut gy (174), & hæc ducta in altitudinem evaneſcentem CD ſeu dx conficient momentum preſſionis $gydx = -dv$. Sumitur autem fluxio dv negativè, quod creſcente diſtantia x, pondus incumbens v decreſcat.

Sit gravitas g ut $\frac{1}{x^m}$, denſitas y ut vis comprimentis dignitas v^n, ideoque $y^{\frac{1}{n}}$ ut v, & ſumptis fluxionibus $\frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}} dy$ ut dv. Loco g & dv ſubſtituantur hi valores in æquatione $gydx = -dv$, & fiet $\frac{ydx}{x^m} = -\frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}} dy$ ſeu $-\frac{dx}{x^m} = \frac{1}{n} y^{\frac{1-2n}{n}} dy$. His verò æquationibus non æqualitates, ſed proportiones tantum exponimus, & ideo coefficientes datas negligimus.

Si in ultimâ æquatione ponatur $n = 1$, id eſt, denſitas vi comprimenti proportionalis, erit $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^m}$. Sumantur quantitates $\frac{1}{x^{m-1}}$ in progreſſione arithmeticâ; & earum fluxiones, ſeu differentiæ naſcentes $-\frac{(m-1)dx}{x^m}$, ideoque & $\frac{-dx}{x^m}$ conſtantes erunt, & propterea quantitates $\frac{dy}{y}$ etiam datæ; ac proinde denſitates y ſuis differentiis dy proportionales, erunt con-

continuè proportionales, (*per lem. II. lib. II.*). Si in eadem hypotheſi ponatur $m=1$, fit $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$; unde ſi capiantur quantitates $\frac{dx}{x}$ conſtantes, ſeu diſtantiæ x in progreſſione geometricâ, erunt etiam quantitates $\frac{dy}{y}$ conſtantes, & ideo denſitates y in progreſſione geometricâ. Prorſus ut in prop. XXII, XXI. & initio ſcholii hujus demonſtratum eſt. Sumptis fluentibus, æquatio $\frac{1}{n}y^{\frac{1-2n}{n}}dy=-\frac{dx}{x^m}$ in hanc abit $\frac{1}{1-n}y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{m-1}x^{1-m}+Q$ *conſt.* in quâ non poteſt eſſe $m=1$, nec $n=1$, neque $n=0$, ut patet. Ut autem determinetur valor conſtantis Q, primum definienda eſt altitudo S F, ubi denſitas y evaneſcit. Nam ſi altitudo illa finita eſt & dicatur $=a$, poſitâ $y=0$, habebitur $Q=\frac{-1}{m-1}a^{1-m}$, & hinc $\frac{1}{1-n}y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{x^{1-m}-a^{1-m}}{m-1}=\frac{a^{1-m}-x^{1-m}}{m-1}$, in qua æquatione debet eſſe $\frac{1-n}{n}$ numerus poſitivus, ſeu n numerus poſitivus unitate minor, ut creſcentibus diſtantiis x, decreſcant denſitates y, & contra. Si altitudo S F ad quam denſitas y evaneſcit, infinita ſupponatur, erit conſtans $Q=o$, ac proinde æquatio $\frac{1}{1-n}y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{m-1}x^{1-m}$. Nam ſi in æquatione $\frac{1}{1-n}y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{x^{1-m}-a^{1-m}}{m-1}$, ponatur y nulla & x infinitá, quantitas conſtans a erit infinita, contra hypotheſim.

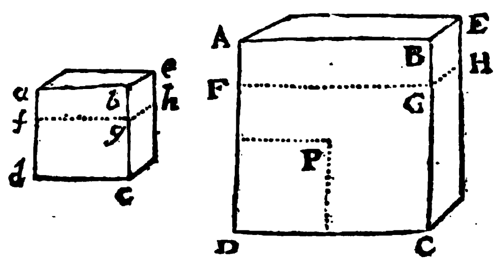
Jam vero ſi gravitas eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ, id eſt ſi $m=2$, æquatio $\frac{1}{1-n}y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{m-1}x^{1-m}$ in hanc migrat $\frac{1}{1-n}y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{x}$, unde eſt y ut 178.
$x^{\frac{1}{1-n}}$ reciprocè. Fingatur quod cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-quadratum denſitatis, ſeu y^4 ut v^3, ideoque y ut $v^{\frac{3}{4}}$, & hinc $n=\frac{3}{4}$; & erit $x^{\frac{1}{1-n}}=x^3$, ac proinde denſitas y ut x^3 reciprocè, ſeu denſitas, reciprocè ut cubus diſtantiæ. Fingatur quod cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-cubus denſitatis, hoc eſt, y^5 ut v^3, adeoque y ut $v^{\frac{3}{5}}$, & hinc $n=\frac{3}{5}$; & erit y ut $x^{\frac{3}{2}}$ reciprocè, id eſt, denſitas reciprocè in ſeſquiplicatâ ratione diſtantiæ. Fingatur quod vis comprimens ſit in duplicatâ ratione denſitatis; ſeu y ut $v^{\frac{1}{2}}$; & hinc erit $n=\frac{1}{2}$, ac proinde y ut x reciprocè, ſive denſitas eſt reciprocè ut diſtantia. Quæ Newtonus in ſcholio dixerat. Vide monumenta Academiæ Regiæ ſcientiarum anni 1716, ubi hanc materiam tractat Varignonius, quem hic ſumus ſequuti.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXIII. THEOR. XVIII.

PROPOSITIO XXIII. THEOREMA XVIII.

Si fluidi ex particulis ſe mutuo fugientibus compoſiti denſitas ſit ut compreſſio, vires centrifugæ particularum ſunt reciprocè proportionales diſtantiis centrorum ſuorum. Et vice verſâ, particulæ viribus quæ ſunt reciprocè proportionales diſtantiis centrorum ſuorum ſe mutuo fugientes componunt fluidum elaſticum, cujus denſitas eſt compreſſioni proportionalis.

Includi intelligatur fluidum in ſpatio cubico *A C E*, dein compreſſione redigi in ſpatium cubicum minus *a c e*; & particularum, ſimilem ſitum inter ſe in utroque ſpatio obtinentium, (b) diſtantiæ erunt ut cuborum latera *A B*, *a b*; & (c) mediorum denſitates reciprocè ut ſpatia continentia *A B cub.* & *a b cub.* In cubi majoris latere plano *A B C D* capiatur quadratum *D P* æquale lateri plano cubi minoris *d b*; & ex hypotheſi, preſſio, quâ quadratum *D P* urget fluidum incluſum, erit ad preſſionem, quâ illud quadratum *d b* urget fluidum incluſum, ut medii denſitates ad invicem, hoc eſt, ut *a b cub.* ad *A B cub.* Sed preſſio, quâ quadratum *D B* urget fluidum incluſum, eſt ad preſſionem, quâ quadratum *D P* urget idem fluidum, ut quadratum *D B* ad quadratum *D P*, hoc eſt, ut *A B quad.* ad *a b quad.* Ergo, ex æquo, preſſio quâ quadratum *D B* urget fluidum, eſt ad preſſionem quâ quadratum *d b* urget fluidum, ut *a b* ad *A B*. Planis *F G H*, *f g h*, per media cuborum ductis, diſtinguatur fluidum in duas partes, & hæ (d) ſe mutuo prement iiſdem viri-



(b) * *Diſtantiæ erunt ut cuborum latera A B, a b*, per lemma V. lib. I.

(c) * *Et mediorum denſitates, ut &c.* ob datam in utroque ſpatio fluidi maſſam (2. lib. I.).

(d) * *Et hæ ſe mutuo prement iiſdem viribus &c.* Preſſiones enim in unoquoque ſpatio ſunt ubique æquales; nam cùm fluidum uniforme ſupponatur, ſi preſſio minor eſſet in uno loco quàm in alio, ſta-

viribus, quibus premuntur à planis *AC*, *ac*, hoc eſt, in proportione *ab* ad *AB*: ideoque vires centrifugæ, quibus hæ preſſiones ſuſtinentur, ſunt in eâdem ratione. Ob eundem particularum numerum ſimilemque ſitum in utroque cubo, vires quas particulæ omnes ſecundum plana *FGH*, *fgh* exercent in omnes, ſunt ut vires quas ſingulæ exercent in ſingulas. Ergo vires, quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum *FGH* in cubo majore, ſunt ad vires, quas ſingulæ exercent, in ſingulas ſecundum planum *fgh* in cubo minore, ut *ab* ad *AB*, hoc eſt, reciprocè ut diſtantiæ particularum ad invicem. *Q. E. D.*

Et vice verſâ, ſi vires particularum ſingularum ſunt reciprocè ut diſtantiæ, id eſt, reciprocè ut cuborum latera *AB*, *ab*; ſummæ virium erunt in eâdem ratione, & preſſiones laterum *DB*, *db* ut ſummæ virium; & preſſio quadrati *DP* ad preſſionem lateris *DB* ut *ab quad.* ad *AB quad.* Et, ex æquo, preſſio quadrati *DP* ad preſſionem lateris *db* ut *ab cub.* ad *AB cub.* id eſt, vis compreſſionis ad vim compreſſionis ut denſitas ad denſitatem. *Q. E. D.*

Scholium.

(e) Simili argumento, ſi particularum vires centrifugæ ſint reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata denſitatum. Si

ſtatim cederet fluidum magis preſſum, atque ita preſſio ad æqualitatem reſtitueretur, ut in caſu 6°. prop. XIX.

(e) * *Simili argumento &c.* Sunto *D* & *d* particularum diſtantiæ in ſpatiis cubicis ACE & ace quæ ſunt ut AB & ab, earumdem vires centrifugæ ut D^n & d^n reciprocè, fluidi denſitates *E* & *e*, & vires comprimentes erunt ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ & $e^{\frac{n+2}{3}}$.

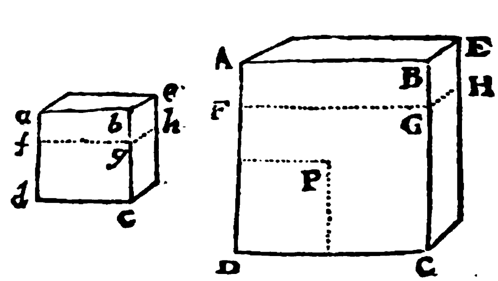
Nam cùm ſummæ virium quas omnes ſimul particulæ exerceant in latera DB; db, ſint ut ſingularum particularum vires erunt iſtæ ſummæ virium ut D^n & d^n reciprocè, ſeu ut ab^n & AB^n directè; & preſſio quadrati DP ad preſſionem quadrati DB ut ab^2 ad AB^2; unde ex æquo preſſio quadrati DP ad preſſionem quadrati db, hoc eſt, vis comprimens in ſpatio ACE ad vim comprimentem in ſpatio ace, ut ab^{n+2} ad AB^{n+2}. Sunt autem denſitates, ſive eſt *E* ad *e*, ut ab^3 ad AB^3, & ideo 178

Si vires centrifugæ ſint reciprocè in triplicatâ vel quadruplicatâ ratione diſtantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi denſitatum. Et univerſaliter, ſi D ponatur pro diſtantiâ, & E pro denſitate fluidi compreſſi, & vires centrifugæ ſint reciprocè ut diſtantiæ dignitas quælibet D^n, cujus index eſt numerus n; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis E^{n+2}, cujus index eſt numerus $n+2$: & contra. Intelligenda vero ſunt hæc omnia de particularum viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longè ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus magneticis. Horum virtus attractiva terminatur ferè in ſui generis corporibus ſibi proximis. Magnetis virtus per interpoſitam laminam ferri contrahitur, & in laminâ ferè terminatur. Nam corpora ulteriora non tam à magnete quam à laminâ trahuntur. Ad eundem modum ſi particulæ fugant alias ſuis generis particulas ſibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujuſmodi particulis componentur fluida de quibus actum eſt in hâc propoſitione. Quod ſi particulæ cujuſque virtus in infinitum propagetur, (f) opus erit vi majori ad æqualem condenſationem majoris

ideo $E^{\frac{n+2}{3}}$ ad $e^{\frac{n+2}{3}}$ ut ab^{n+2} ad AB^{n+2}.

Quare vires comprimentes ſunt ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ & $e^{\frac{n+2}{3}}$. Q. E. D.

Et vice verſâ, ſi vires comprimentes ſunt ut denſitatum dignitates $E^{\frac{n+2}{3}}$, $e^{\frac{n+2}{3}}$, ſeu ut ab^{n+2}, AB^{n+2}; erit preſſio quadrati DP ad preſſionem quadrati d b in eâdem ratione, & preſſio quadrati D B eſt ad preſſionem quadrati D P, ut AB^2 ad ab^2; &, ex æquo, preſſio quadrati D B ad preſſionem quadrati d b, ut ab^n ad AB^n, ſeu ut d^n ad D^n. Sunt autem vires particularum ſingularum ut ſummæ virium, hoc eſt, ut preſſiones laterum D B, d b; quare vires particularum centrifugæ ſunt reciprocè ut diſtantiarum dignitates D^n, d^n. Q. E. D.



Jam ſi loco n ſcribantur numeri 2; 3; &c., patet veritas eorum quæ initio ſcholii dixit Newtonus.

(f) * *Opus erit vi majori &c.* Non enim ſolum vincenda erit per compreſſionem vis centrifuga particularum proximarum, ſed & remotiorum vis erit ſuperanda quæ (ex hyp.) in infinitum propagatur.

joris quantitatis fluidi. An vero fluida elaſtica ex particulis ſe mutuo fugantibus conſtent, quæſtio phyſica eſt. Nos proprietatem fluidorum ex ejuſmodi particulis conſtantium mathematicè demonſtravimus, ut philoſophis anſam præbeamus quæſtionem illam tractandi.

SECTIO VI.

De motu & reſiſtentiâ corporum funependulorum.

(g) PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XVIII.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oſcillationum à centro ſuſpenſionis æqualiter diſtant, ſunt in ratione compoſitâ ex ratione ponderum & ratione duplicatâ temporum oſcillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in datâ materiâ, dato tempore generare poteſt, eſt ut vis & tempus directè, & materia inversè. Quo major eſt vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus legem

(g) * *Propoſitio XXIV.* In hâc propoſitione & ejus corollariis ſupponitur corpora funependula, quæ comparantur, in cycloidibus aut ſaltem in exiguis magni circuli arcubus oſcillari. * Pondera autem corporum hic duplici de causâ à materiâ ipſorum diſtinguuntur; primo, quod nondum aſſumi poſſit gravitatem agere ſecundùm rationem maſſarum, cum id ipſum ex iſtò Theoremate poſtea deducatur, cor. 7.; & ſecundo, in diverſis locis gravitas diverſa eſſe poteſt (ut quidem ex experimentis conſtat) ideoque corporum duorum in diverſis iis locis ſpectatorum ratio materiæ eadem manebit, non verò ratio ponderum. 178.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VI. Prop. XXIV. Theor. XIX.

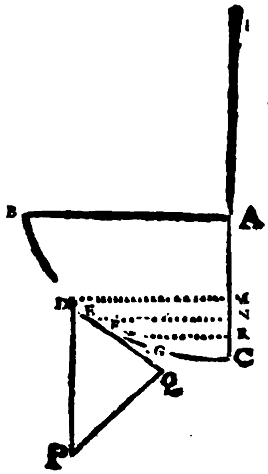
gem ſecundam manifeſtum eſt. (h) Jam verò ſi pendula ejuſdem ſint longitudinis, vires motrices in locis à perpendiculo æqualiter diſtantibus ſunt ut pondera: ideoque ſi corpora duo oſcillando deſcribant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cùm (i) tempora quibus corpora deſcribant ſingulas arcuum partes correſpondentes ſint ut tempora oſcillatio-

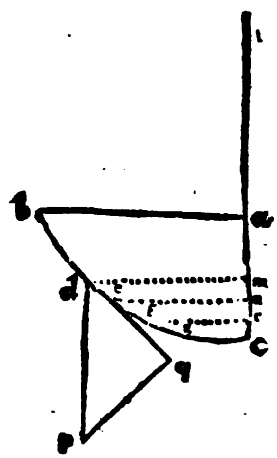
(h) *Jam verò ſi pendula ejuſdem ſint longitudinis, vires motrices in locis à perpendiculo æqualiter diſtantibus ſunt ut Pondera.*

* Nam ſi Pendula ejuſdem ſint longitudinis, Cycloides plane ſimiles & æquales deſcribent: In unaquâque autem Cycloide, vires quibus corpora in locis quibuſvis D, vel d accelerantur, ſunt ad totum ſinguli corporis pondus in locis altiſſimis, ut arcus Cycloidis inter loca propoſita D, d & puncta infima C, c, ad totas ſemi-Cycloides (Cor. Prop. LII. Lib. 1.) Ergo ſi ſemicycloides ſint æquales & loca D & d à perpendiculo æqualiter diſtent, arcus D C & d c erunt æquales, ideoque vis quâ corpus acceleratur in primâ Cycloide in puncto D, erit ad totum ejus corporis pondus, ut vis quâ corpus acceleratur in alterâ Cycloide in puncto d, ad totum ejus corporis pondus. Unde viciſſim, vis quâ acceleratur primum corpus in puncto D, eſt ad vim quâ alterum acceleratur in puncto d, ut totum prioris corporis pondus, ad pondus alterius corporis, ideoque *ſi pendula ſint ejuſdem longitudinis vires motrices &c.* Q. E. D.

(i) *Cum tempora quibus corpora deſcribant ſingulas arcuum partes* (æquales) *correſpondentes ſint ut tempora oſcillationum totarum.*

* Sint arcus D C, d c æquales, ſecenturque in partes æquales infinitè parvas D E, E F &c.; d e, e f &c., ex punctis D, E, F & d, e, f, ducantur perpendiculares ad axem, D M, E N, F R; D m, e n, f r; liquet lineolas M N & m n, M R & m r ex hypotheſi fore æquales; Ex naturâ autem gravitatis, velocitas acquiſita in E erit ad velocitatem acquiſitam in F ut Radix altitudinis M N ad Radicem M R, & pariter velocitas acquiſita in e, erit ad velocitatem acquiſitam in f ut $\sqrt{mn}$ ad $\sqrt{mr}$, cum er-





go $\sqrt{MN} = \sqrt{mn}$ & $\sqrt{MR} = \sqrt{mr}$ velocitas acquiſita in E eſt ad velocitatem acquiſitam in F, ut velocitas acquiſita in e eſt ad velocitatem acquiſitam in f, & viciſ-

lationum totarum, (†) erunt velocitates ad invicem in correſpondentibus oſcillationum partibus, ut vires motrices & tota oſcillationum tempora directè & quantitates materiæ reciprocè: ideoque quantitates materiæ ut vires & oſcillationum tempora directè & velocitates reciprocè. (§) Sed velocitates reciprocè ſunt ut tempora, atque ideo tempora directè & velocitates reciprocè ſunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ ſunt ut vires motrices & quadrata temporum, id eſt, ut pondera & quadrata temporum. (††) *Q. E. D.*

Co-

viciſſim velocitas acquiſita in E, eſt ad velocitatem acquiſitam in e; ut velocitas acquiſita in F eſt ad velocitatem acquiſitam in f. Sed quoniam arcus E F & e f F G & f g ſunt infinite parvi & æquales, uniformiter deſcribi cenſendi ſunt, & tempora quibus deſcribuntur erunt in ratione reciprocâ velocitatum, ideoque tempus quo deſcribitur E F eſt ad tempus quo deſcribitur e f, ut velocitas in e ad velocitatem in E, & tempus quo deſcribitur F G eſt ad tempus quo deſcribitur f g, ut velocitas in f ad velocitatem in F &c. ſed rationes velocitatum in E & e, in F & f &c. ſunt ſemper æquales inter ſe, ergo & rationes temporum quæ iſtarum ſunt inverſæ ſunt æquales inter ſe; ergo tempora quibus ſingulæ partes arcus D C deſcribuntur, ſunt ad tempora quibus correſpondentes partes arcus d c deſcribuntur, in eâdem ratione, ergo omnes antecedentes & omnes conſequentes ſummando, omnia ſimul tempora quibus percurruntur omnes partes arcus D C, hoc eſt, totum tempus oſcillationis per D C, eſt ad omnia tempora quibus partes arcus d c percurruntur, hoc eſt ad totum tempus oſcillationis per d c ut tempus unum quo quædam pars arcus D C percurritur, eſt ad tempus quo pars correſpondens arcus d c percurritur. Q. E. D.

(†) *Erunt velocitates ad invicem in correſpondentibus oſcillationum partibus, ut vires motrices & tota oſcillationum tempora directè & quantitates materiæ reciprocè.* * Ex demonſtratione notæ ſuperioris liquet velocitates in correſpondentibus partibus eſſe omnes in eâdem ratione, ideoque ut velocitas acquiſita in E ad velocitatem acquiſitam in e, ſed cùm arcus D E & d e infinitè parvi ſupponantur, cenſendum eſt, vires motrices uniformiter agere, dum illi arcus percurruntur; motus ergo per eas productus creſcet tam pro ratione virium ipſarum quàm pro ratione temporis quo arcus illi deſcribuntur ſive (ex demonſtratis) pro ratione temporum oſcillationum integrarum, motus verò ex Def. 2. lib. 1. æſtimatur à Newtono ex velocitate & materiâ conjunctim, ergo velocitates productæ in *correſpondentibus oſcillationum partibus erunt ut vires motrices & tota oſcillationum tempora directè & quantitates materiæ inversè.* 178.

(§) *Sed velocitates ſunt reciprocè ut tempora.* * Ex demonſtratis (ad notam ſuperiorem i) liquet velocitatem acquiſitam in E eſſe ad velocitatem acquiſitam in e ut velocitas acquiſita in puncto quovis arcus D C ad velocitatem acquiſitam in puncto correſpondenti arcus d c; Ex eâdem demonſtratione liquet velocitatem acquiſitam in E eſſe ad velocitatem acquiſitam in e, in ratione reciprocâ temporum quibus deſcribuntur arcus E F, & e f; hæc verò tempora eſſe ut tempora oſcillationum integrarum, unde velocitas acquiſita in puncto quovis arcus D C, eſt ad velocitatem acquiſitam in puncto correſpondenti arcus d c, in ratione reciprocâ temporum oſcillationum totarum. Q. E. D.

(††) *Quod Erat Demonſtrandum.* * In demonſtratione probatum eſt quod ſi deſcribantur arcus æquales D C, d c quantitates materiæ ſunt ut pondera & quadra-

Corol. 1. Ideoque ſi tempora ſunt æqualia, quantitates materiæ in ſingulis corporibus erunt ut pondera.

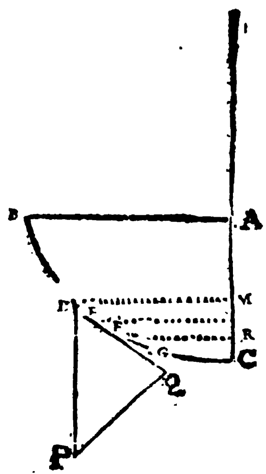
Corol. 2. Si pondera ſunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

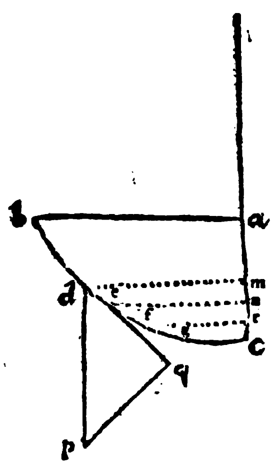
Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciprocè ut quadrata temporum.

Corol. 4. Unde (k) cum quadrara temporum, cæteris paribus, ſint ut longitudines pendulorum; ſi & tempora & quantita- tio

drata temporum, ſumatur jam arcus b c major vel minor arcu d c ſed quantitates materiæ & pondera utrinque maneant eadem quæ prius, & pariter ob Iſochroneitatem curvæ b d c, tempus oſcillationis per b c, æquale erit tempori oſcillationis per d c, ideoque quicumque ſint arcus deſcripti ſi modo maneat penduli longitudo, eademque ſit utrinque cyclois, pariter verum erit quod quantitates materiæ ſunt ut pondera & quadrata temporum oſcillationum.

(k) *Unde cum quadrata temporum cæteris paribus ſint ut longitudines pendulorum.* * Fingatur L C, l c inæqualia eſſe, & arcus D C, d c non ſumi æquales ut prius, ſed ſimiles, ſive proportionales longitudinibus L C, l c, ſecetur D C in partes æquales inter ſe, & d c in partes ſimiles, ita ut ſit D E ad d e ut L C ad l c ductiſque perpendiculis D M, E N, d m, e n &c. liquet ex ſimilitudine figurarum altitudines M N & m n, M R & m r &c. eſſe etiam inter ſe in ratione L C ad l c, velocitates verò quibus deſcribuntur arcus E F, F G ſunt ut $\sqrt{MN}$ ad $\sqrt{MR}$, & velocitates quibus deſcribuntur arcus e f, f g ſunt ut $\sqrt{mn}$ ad $\sqrt{mr}$, ſed quia M N & m n, M R & m r, ſunt in eâdem ratione ideoque & earum radices, viciſſim, velocitas quâ deſcribitur E F eſt ad velocitatem quâ deſcribitur e f, ut velocitas quâ deſcribitur F G ad velocitatem quâ deſcribitur f g; & ſic ordine perpetuo demonſtrabitur velocitates quibus ſucceſſivæ partes correſpondentes utriuſque curvæ percurruntur fore ſemper in eâdem ratione; tempora verò quibus arcus ſimiles deſcribuntur ſunt directè ut illi arcus & inversè ut velocitates; ergo cum ra-





titates materiæ æqualia ſunt, (l) pondera erunt ut longitudines pendulorum.

Corol. 5. Et (m) univerſaliter, quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus & quadratum temporis directè, & longitudo penduli inversè.

Corol. 6. Sed & in medio non reſiſtente quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus comparativum & quadratum temporis directè & longitudo penduli inversè. Nam pondus comparativum eſt vis motrix corporis in medio quovis gravi, ut (n) ſupra explicui; ideoque idem præſtat in tali medio non reſiſtente atque pondus abſolutum in vacuo. *Co-*

tio arcuum correſpondentium ſit ſemper eadem, nempe ratio L C ad l c, ut & ratio velocitatum quibus percurruntur illi arcus, ſingula tempuſcula quibus deſcribuntur particulæ arcus D C eamdem rationem habebunt ad tempuſcula quibus correſpondentes particulæ arcus d c percurruntur; ideoque tempora tota oſcillationum per D C & d c erunt directè ut longitudines L C & l c, & inversè ut velocitates in punctis quibuſvis correſpondentibus arcuum D C & d c, putà in punctis infimis C & c, ſed quia ex hypotheſi quod pondera ſunt æqualia & quod quantitates materiæ ſunt æquales, velocitates ſunt proportionales Radicibus quadratis altitudinum, velocitates in punctis C & c erunt ut $\sqrt{MC}$ ad $\sqrt{mc}$: ſed ex ſimilitudine curvarum & arcuum eſt m c ad M C ſicut l c ad L C, ergo velocitates in punctis C & c ſunt ut $\sqrt{LC}$ ad $\sqrt{lc}$, ideoque tempora oſcillationum integrarum in arcubus D C, d c erunt ut $\frac{LC}{\sqrt{LC}}$ ad $\frac{lc}{\sqrt{lc}}$, unde quadrata temporum erunt ut $\frac{LC^2}{LC}$ ad $\frac{lc^2}{lc}$ ſive ut L C ad l c, hoc eſt ut longitudines pendulorum. Q. E. D.

(l) * *Pondera erunt ut longitudines pendulorum, & univerſaliter quantitas materiæ Pendulæ eſt ut pondus & quadratum temporis directè & longitudo Penduli inversè.* * Sint duo pendula A & B, quæ materiâ, pondere & oſcillationum temporibus diſcrepent, ſed æqualis ſint longitudinis; ex Theoremate, erit quantitas materiæ 178. pendulæ in A ad quantitatem materiæ pendulæ in B, ut pondus & quadratum temporis oſcillationum penduli A conjunctim ad pondus & quadratum temporis oſcillationum penduli B conjunctim; ſit tertium pendulum C, cujus materia & pondus eadem ſint cum materiâ & pondere penduli B, diverſa verò ſit utriuſque longitudo, longitudo penduli C erit ad longitudinem penduli B (ſive penduli A, perinde enim eſt ex hypotheſi) ut quadratum temporis in Pendulo C ad quadratum temporis in pendulo B, quod itaque æquale erit quadrato temporis in pendulo C, per longitudinem penduli multiplicato & per longitudinem penduli C diviſo; Unde quantitas materiæ in A erit ad quantitatem materiæ in B ſive in C, ut pondus & quadratum temporis in A conjunctim ad pondus in B, ſive in C, cum quadrato temporis in C & longitudine penduli A directè & longitudine penduli C inversè: unde liquet quantitatem materiæ in A eſſe ad quantitatem materiæ in C, ut pondus & quadratum temporis in pendulo A directè & ejus longitudo inversè ad pondus & quadratum temporis penduli C directè & ejus longitudinem inversè. Q. E. D.

* *univerſaliter.* Unde ſi & tempora & quantitates materiæ eadem ſunt, pondera ſunt ut longitudines pendulorum directè.

(m) * *Et univerſaliter.* Vide Notam ſuperiorem.

(n) * *Ut ſupra explicui*, in cor. VI. & VIII. prop. XX.

Corol. 7. Et (o) hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter ſe, quoad quantitatem materiæ in ſingulis; tum comparandi pondera ejuſdem corporis in diverſis locis, (p) ad cognoſcendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratiſſimis inveni ſemper quantitatem materiæ in corporibus ſingulis eorum ponderi proportionalem eſſe.

PROPOSITIO XXV. THEOREMA XX.

Corpora funependula quibus, in medio quovis, reſiſtitur in ratione momentorum temporis, & corpora funependula quæ in ejuſdem gravitatis ſpecificæ medio non reſiſtente moventur, oſcillationes in cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales ſimul deſcribunt.

Sit *A B* cycloidis arcus, quem corpus *D* tempore quovis in medio non reſiſtente oſcillando deſcribit. Biſecetur idem in *C*, ita ut *C* ſit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix quâ corpus urgetur in loco quovis *D* vel *d* vel *E* ut (q) longitudo

(o) * *Et hinc liquet ratio &c.* Nam ex datis pendulorum longitudinibus, oſcillationum temporibus, & ponderibus corporum, datur ratio quantitatum materiæ in illis corporibus (*per cor. V.*); & contra.

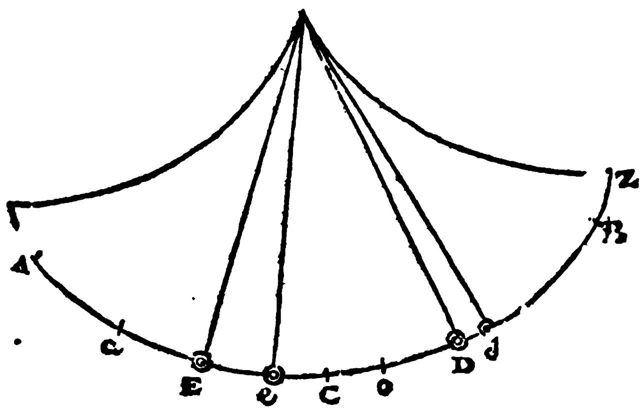
(p) * *Ad cognoſcendam variationem gravitatis.* Ubi enim ejuſdem penduli oſcillationes tardiores ſunt, gravitatis actio, cæteris paribus, minor eſt, cum in eodem pendulo pondera ſint reciprocè ut quadrata temporum (*per cor.* III.). Sed de his plura ad prop. XX. lib. III. dicentur. Quanta autem in illis experimentis adhibenda ſit diligentia, Clariſſ. D. *de Mairan* eâ quâ ſolet perſpicuitate & elegantiâ exponit in monumentis Acad. Reg. Scient. an. 1735.

179. Quia numeri oſcillationum æqualibus temporibus à diverſis pendulis abſolvendarum ſunt reciprocè ut tempora quibus ſingulæ oſcillationes fiunt (473. *lib.* 1.), numeri oſcillationum æqualibus temporibus peractarum erunt (*per cor.* V. *prop. hujus*) in compoſitâ ratione ex ratione ſubduplicata directa ponderum & ſubduplicatis rationibus inverſis maſſarum & longitudinum pendulorum; ſive, quoniam pondus eſt ut factum ex maſsâ in vim gravitatis acceleratricem, erunt prædicti oſcillationum numeri in ratione ſubduplicata directa virium gravitatis acceleratricium & ratione ſubduplicatâ longitudinum pendulorum inversâ; ac proinde pendulorum inæqualium, ſed eâdem vi gravitatis agitatorum, numeri oſcillationum eodem tempore abſolvendarum ſunt in reciprocâ ſubduplicatâ ratione longitudinum pendulorum, & numeri oſcillationum in duobus pendulis æqualibus erunt in ſubduplicatâ ratione virium gravitatis. Hæc eſt regula quam ad comparandas corporum gravitates tradit *Joh. Bernoulli* in Actis Erudit. Lipſ. an. 1713.

(q) *Ut longitudo arcus &c.* Per demonſtr. Prop. LI. & cor. II. Prop. LII. Lib. I.

PROP. XXV. THEOR. XX.

do arcus *CD* vel *Cd* vel *CE*. Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum reſiſtentia ſit ut momentum temporis, ideoque detur, exponatur eadem per datam arcus cycloidis partem *CO*, & ſumatur arcus *Od* in ratione ad arcum *CD* quam habet arcus *OB* ad arcum *CB*: & vis quâ corpus in *d* urgetur in medio reſiſtente, cum ſit exceſſus vis *Cd* ſupra reſiſtentiam *CO*, exponetur per arcum *Od*, ideoque erit ad vim, quâ corpus *D* urgetur in medio non reſiſtente in loco *D*, ut arcus *Od* ad arcum *CD*; & propterea etiam in loco *B* ut ar-



cus *OB* ad arcum *CB*. Proinde ſi corpora duo, *D*, *d* exeant de loco *B*, & his viribus urgeantur: cum vires ſub initio ſint ut arcus *CB* & *OB*; (r) erunt velocitates primæ & arcus primo deſcripti in eâdem ratione. Sunto arcus illi *BD*, & *Bd*, arcus reliqui *CD*, *Od* erunt in eâdem ratione. Proinde vires, ipſis *CD*, *Od* proportionales manebunt in eâdem ratione ac ſub initio, & propterea corpora pergent arcus in eâdem ratione ſimul deſcribere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui *CD*, *Od* ſemper erunt ut arcus toti *CB*, *OB*; &

(r) * *Erunt velocitates primæ &c.* Nam, dato temporis momento, velocitates genitæ ſunt ut vires (13. *lib.* 1.) & ut ſpatia deſcripta (*per cor.* 4. *lem.* X. *lib.* 1.) 179.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXV. THEOR. XX.

& propterea arcus illi reliqui (s) ſimul deſcribentur. Quare corpora duo *D*, *d* ſimul pervenient ad loca *C* & *O*, alterum quidem in medio non reſiſtente ad locum *C*, & alterum in medio reſiſtente ad locum *O*. Cum autem velocitates in *C* & *O* ſint ut arcus *CB*, *OB*; erunt arcus, quos corpora ulterius pergendo ſimul deſcribunt, in (t) eâdem ratione. Sunto illi *CE* & *Oe*. Vis quâ corpus *D* in medio non reſiſtente retardatur in *E* eſt ut *CE*, & vis quâ corpus *d* in medio reſiſtente retardatur in *e* eſt ut ſumma vis *Ce* & reſiſtentiæ *CO*, id eſt ut *Oe*; ideoque vires, quibus corpora retardantur, ſunt ut arcubus *CE*, *Oe* proportionales arcus *CB*, *OB*; proindeque velocitates, in datâ illâ ratione retardatæ, manent in eâdem illâ datâ ratione. Velocitates igitur & arcus iiſdem deſcripti ſemper ſunt ad invicem in datâ illâ ratione arcuum *CB* & *OB*; & (u) propterea ſi ſumantur arcus toti *AB*, *aB* in eâdem ratione, corpora *D*, *d* ſimul deſcribent hos arcus, & in locis *A* & *a* motum omnem ſimul amittent. Iſochronæ ſunt igitur oſcillationes totæ, & arcubus totis *BA*, *Ba* proportionales ſunt arcuum partes quælibet *BD*, *Bd* vel *BE*, *Be* quæ ſimul deſcribuntur. *Q. E. D.*

Corol. Igitur motus velociſſimus in medio reſiſtente non incidit in punctum infimum *C*, ſed (x) reperitur in puncto illo *O*, quo arcus totus deſcriptus *aB* biſecatur. Et corpus ſubinde pergendo ad *a*, iiſdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in deſcenſu ſuo à *B* ad *O*.

PRO-

(s) * *Simul deſcribentur.* Quia enim eſt ſemper CB ad OB, ut CD ad Od; evaneſcente arcu Od, evaneſcet etiam arcus CD, ſeu punctum d cum O, & D cum C ſimul coincident.

(t) * *In eâdem ratione.* Sunt enim velocitates, ut ſpatia dato temporis momento deſcripta, tam in medio reſiſtente quam in medio non reſiſtente (11.)

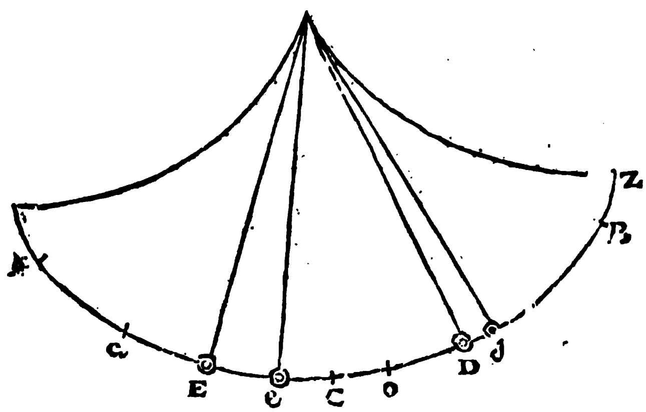
(u) * *Et propterea.* Si ſumatur arcus AC æqualis CB, & deinde arcus aB ad arcum AB in datâ ratione OB ad CB; corpora D & d ſimul deſcribent hos arcus, & in locis A & a motum omnem ſimul amittent. Nam cum ſit ſemper arcus CE ad Oe ut CB ad OB, ſeu ut CA ad Oa, ubi arcus CE æqualis evadet arcui CA, fiet quoque arcus Oe æqualis arcui Ca; & quia motus in medio non reſiſtente extinguitur in A, ob CA = CB; in medio reſiſtente extinguetur quoque in a, eo quod velocitates in locis E, e & A, a ſint in datâ ratione.

(x) * *Sed reperitur in puncto illo O, quo &c.* Nam ratio velocitatum in mediis reſiſtente & non reſiſtente eſt ſemper eadem,

PROPOSITIO XXVI. THEOREMA XXI.

Corporum funependulorum, quibus reſiſtitur in ratione velocitatum, oſcillationes in cycloide ſunt Iſochronæ.

(y) Nam ſi corpora duo, à centris ſuſpenſionum æqualiter diſtantia oſcillando deſcribant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correſpondentibus ſint ad invicem ut arcus



eadem in punctis correſpondentibus ut in d & D, in O & C, in e & E; ſed corporis in medio non reſiſtente oſcillantis velocitas maxima eſt in loco infimo C, & iiſdem gradibus retardatur in aſcenſu, quibus antea accelerabatur in deſcenſu; quare motus velociſſimus in medio reſiſtente reperitur in O, & iiſdem deinde gradibus retardatur in aſcenſu, quibus ante accelerabatur in deſcenſu.

(y) * *Nam ſi corpora duo*, exempli causâ B & D, *à centro ſuſpenſionis æqualiter diſtantia, oſcillando deſcribant arcus inæquales* B a, D e, *& velocitates in arcuum partibus correſpondentibus*, ſeu in arcuum B a, D e quadrantibus, partibus tertiis &c., *ſint ad invicem ut arcus toti* B a, D e: *reſiſtentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde ſi viribus motricibus à gravitate oriundis* (ſecundum tangentes cycloidis agentibus) *quæ ſint ut iidem arcus* B a, D e, *auferantur* dum corpus deſcendit, *vel addantur* dum corpus aſcendit, *hæ reſiſtentiæ; erunt differentiæ vel ſummæ ad invicem in eâdem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa*, dato temporis momento genita, *ſint ut hæ differentiæ vel ſummæ* (18), *velocitates ſemper erunt ut arcus toti* B a, D e: *igitur velocitates, ſi ſint in aliquo caſu ut arcus toti, manebunt ſemper in eâdem ratione. Sed in principio motûs, ubi corpora incipiunt* è locis B, D *deſcendere & arcus illos* B a & D e *deſcribere*, ideoque ubi reſiſtentia nulla eſt, *vires ſunt arcubus illi proportionales.* Vires igitur, & velocitates, & arcus deſcripti, ac proinde & arcus deſcribendi, manent ſemper in datâ ratione. Quare corpora duo 179.

 ſimul

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXVI. THEOR. XXI.

arcus toti; reſiſtentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde ſi viribus motricibus à gravitate oriundis, quæ ſint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ reſiſtentiæ, erunt differentiæ vel ſummæ ad invicem in eâdem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa ſint ut hæ differentiæ vel ſummæ, velocitates ſemper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, ſi ſint in aliquo caſu ut arcus toti, manebunt ſemper in eâdem ratione. Sed in principio motus, ut corpora incipiunt deſcendere & arcus illos deſcribere, vires, cum ſint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates ſemper erunt ut arcus toti deſcribendi, & propterea arcus illi ſimul deſcribentur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA XXII.

Si corporibus funependulis reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oſcillationum in medio reſiſtente ac tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ medio non reſiſtente, erunt arcubus oſcillando deſcriptis proportionales quam proximè.

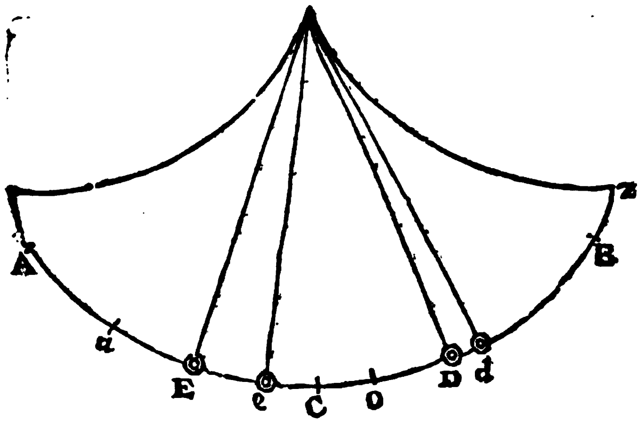
(z) Nam pendulis æqualibus in medio reſiſtente deſcribantur arcus inæquales A, B; & reſiſtentia corporis in arcu A, erit ad

ſimul perveniunt ad punctum infimum C; & eodem modo probatur quod arcus C a, C e ſimul deſcribant.

Scholium. Newtonus in duabus propoſitionibus præcedentibus oſtendit cycloidem eſſe curvam iſochronam, (quam alii tautochronam appellant,) non tantùm in medio non reſiſtente, ſed etiam in medio quod in ratione momentorum temporis, & in medio quod ratione ſimplici velocitatis reſiſtit; Verum quænam ſit curva illa tautochrona in hypotheſi reſiſtentiæ velocitatum quadrato proportionalis non indicat. Elegantiſſimas hujuſce problematis ſolutiones dedere celeberrimi mathematici Eulerus tom. 4. Acad. Petrop. & tom. 2. Mechanicæ; necnon Clariſſ. Bernoullius in monumentis Acad. Reg. Scientiarum Pariſ. an. 1730. Novam viam quâ curvæ tautochronæ in medio quolibet reſiſtente poſſint inveniri aperuit D. Fontaine in iiſdem monumentis anni 1734.

(z) * *Nam pendulis æqualibus in medio reſiſtente deſcribantur arcus inæquales A & B,* * ad pleniorem hujus demonſtrationis evidentiam, fingatur illos arcus in totidem partes quam minimas inter ſe æquales dividi, ſingulæ in utroque arcu erunt totis arcubus proportionales dicanturque *a* & *b*, ſi medium aut non reſiſteret aut reſiſteret in ratione velocitatum, velocitates initio particularum quarum-

ad reſiſtentiam corporis in parte correſpondente arcus B, in duplicatâ ratione velocitatum, id eſt, ut AA ad BB, quam proximè. Si reſiſtentia in arcu B eſſet ad reſiſtentiam in arcu A ut AB ad AA, tempora in arcubus A & B forent æ-



qualia; per propoſitionem ſuperiorem. Ideoque reſiſtentia AA in arcu A, vel AB in arcu B, efficit exceſſum temporis in arcu A ſupra tempus in medio non reſiſtente; & reſiſten-

rumvis correſpondentium *a* & *b*, forent ut arcus ipſi *A* & *B*; At in medio reſiſtente in ratione duplicatâ velocitatis paulo diverſa erit hæc velocitatum ratio, ſed propter exiguam rationem reſiſtentiæ ad velocitatem, negligi poterit hæc differentia, & ſupponi poteſt velocitates manere in ratione arcuum quam proximè; quod ſi ita ſupponatur *reſiſtentia corporis in* quovis *puncto arcus A erit ad reſiſtentiam corporis in parte correſpondente arcus B*, ſicut quadrata velocitatum in punctis illis correſpondentibus eorum arcuum, id eſt ut *quadrata ipſorum arcuum A A & B B quam proximè.* Deſignetur vero velocitas initio arcus *a* per *v A*, & initio arcus *b* per *v B*. Deſignetur porro reſiſtentia initio arcus *a* per *m A A*, & reſiſtentia initio arcus *b* per *m B B*; In medio non reſiſtente tempuſcula quibus ſingulæ particulæ *a* & *b* deſcribentur erunt æqualia, (per Prop. II. lib. 1.) deſignentur verò per *T*; Cum ergo in medio reſiſtente propter velocitatem imminutam longius fiat tempus in inverſâ ratione velocitatum ut *x* exceſſus ille tempuſculi quo arcus *a* deſcribitur in medio reſiſtente ſupra tempuſculum quo idem arcus in medio non reſiſtente percurritur habebiturque ex hypotheſibus $vA - mAA : vA = T : T + x$. 179.

Ut inveniatur ratio hujus exceſſus *x* ad exceſſum tempuſculi quo arcus deſcribitur in medio reſiſtente ſecundum Legem duplicatam velocitatis, ſupra tempuſculum *T*, quo idem arcus in medio non reſiſtente percurritur; ſupponatur arcum B in tali medio deſcribi ut reſiſtentia in punctis *a* arcûs *A*, ſit ad reſiſtentiam in punctis correſpondentibus *b* arcûs *B*, ſicut *A* eſt ad *B*, ideoque ſicut velocitates initio arcuum illorum, ſive cum reſiſtentia in *a* ſit *m A A* reſiſtentia in *b* fingatur eſſe *m A B*, cùm

reſiſtentia B B efficit exceſſum temporis in arcu B ſupra tempus in medio non reſiſtente. Sunt autem exceſſus illi ut vires efficientes A B & B B quam proximè, id eſt, ut arcus A & B. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ex oſcillationum temporibus, in medio reſiſtente, in arcubus inæqualibus factarum, cognoſci poſſunt tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ medio non reſiſtente. Nam differentia temporum erit ad exceſſum temporis in arcu minore ſupra tempus in medio non reſiſtente, ut (b) differentia arcuum ad arcum minorem. *Co-*

cùm ergo reſiſtentiæ ſint in ipſâ ratione velocitatum, velocitates demptis reſiſtentiis manebunt in eâdem ratione, in ratione nempe arcuum deſcribendorum a & b, qui ergo æqualibus temporibus deſcribentur, ſed tempus quo deſcribitur arculus a eſt $T + x$ ergo ſi reſiſtentia in arcu B, ſive b ſit $m\,A\,B$ ideoque velocitas ſit $v\,B - m\,A\,B$ tempus quo deſcribetur arcus b erit etiam $T + x$.

Cum autem reverâ reſiſtentia initio arcus b non ſit $m\,A\,B$ ſed $m\,B\,B$, ſi y ſit exceſſus tempuſculi in quo b deſcribitur in medio reſiſtente juxta quadrata velocitatum ſupra tempus quo idem arcus in medio non reſiſtente percurritur, erit tempus $T + x$ ad tempus $T + y$ reciproce ficut velocitas $v\,B - m\,A\,B$ quæ ſupponebatur, ad velocitatem $v\,B - m\,B\,B$, eritque ideo $v\,B - m\,B\,B$ ad $v\,B - m\,A\,B = T + x$, ad $T + y$, cum ergo ſubſtractio quantitatum $m\,B\,B$, $m\,A\,B$ ex velocitate $v\,B$ producat exceſſus x & y ſupra tempus T, oportet ut illæ quantitates $m\,B\,B$, $m\,A\,B$, ſint reciprocè ut x & y, ſed $m\,A\,B$ & $m\,B\,B$ ſunt ut A ad B, ergo A eſt ad B, ſicut x eſt ad y, ideoque exceſſus x temporis arcus A in medio reſiſtente in duplicatâ ratione velocitatis ſupra tempus in eodem arcu A in medio non reſiſtente, eſt ad exceſſum y temporis arcus B in eodem medio ſupra tempus in eodem arcu B in medio non reſiſtente, ut arcus A ad arcum B, cumque idem ratiocinium in omnibus arcubus quamminimis a & b inſtituti poſſit, ſummæ omnium exceſſuum tempuſculorum in arcu A, erit ad ſummam omnium exceſſuum tempuſculorum in arcu B ut A ad B. Q. E. D.

* Quod exceſſus x & y tempuſculorum quibus deſcribuntur arcus a & b, in medio reſiſtente juxta rationem duplicatam velocitatum, ſupra tempus quo deſcriberentur in medio non reſiſtente ſunt ut A & B, ex ſuperiori demonſtratione alio modo erui poteſt. Nam manentibus quæ illic poſueramus eſt.

$v\,A - m\,A\,A : v\,A = T : T + x$ eſt etiam ſimili ratione $v\,B - m\,B\,B : v\,B = T : T + y$ & dividendo in utraque proportione fit

$$v\,A - m\,A\,A : m\,A\,A = T : x$$
$$v\,B - m\,B\,B : m\,B\,B = T : y.$$

Sed ob exiguitatem reſiſtentiæ velocitatis reſpectu aſſumi poteſt $v\,A - m\,A\,A$ pro $v\,A$, & $v\,B - m\,B\,B$ pro $v\,B$, unde eſt quam proximè.

$$v\,A : m\,A\,A = T : x$$

$v\,B : m\,B\,B = T : y$ & reducendo priores rationes utriuſque proportionis ad minores terminos.

$$v : m\,A = T : x$$

$v : m\,B = T : y$ & viciſſim

$$v : T = m\,A : x$$

$v : T = m\,B : y$, unde eſt

$m\,A : x = m\,B : y$, ideo viciſſim

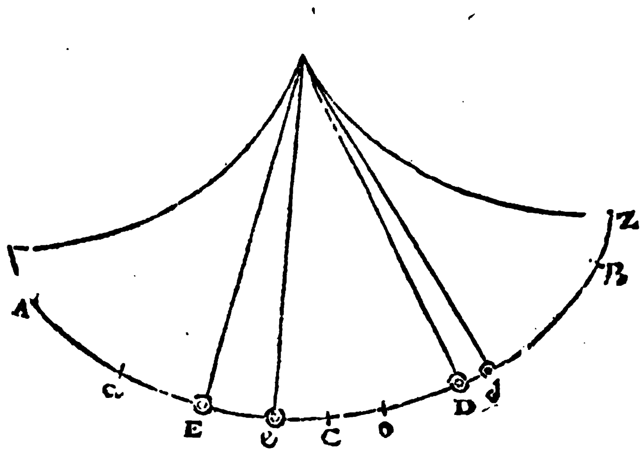
$m\,A : m\,B = x : y$, ſed $m\,A : m\,B = A : B$, ideoque $A : B = x : y$. Ideoque exceſſus temporum in medio reſiſtente in duplicatâ ratione velocitatum, ſupra tempora in medio non reſiſtente in arcubus inæqualibus ſunt ut illi arcus.

(b) * *Differentia temporum erit ad exceſſum temporis in arcu minore ſupra tempus in medio non reſiſtente ut differentia arcuum ad arcum minorem* †.

* Tempus per arcum A eſt $T + x$, tempus per arcum minorem B, eſt $T + y$, ergo differentia temporum $T + x - T - y = x - y$,

Corol. 2. (c) Oſcillationes breviores ſunt magis iſochronæ, & breviſſimæ iiſdem temporibus peraguntur ac in medio non reſiſtente, quàm proximè. Earum verò quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora ſunt paulò majora, (d) propterea quòd reſiſtentia in deſcenſu corporis quâ tempus producitur, (e) major ſit pro ratione longitudinis in deſcenſu deſcriptæ, quàm reſi-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXVII. THEOR. XXII.



$x - y$, & exceſſus temporis in minore arcu ſupra tempus in medio non reſiſtente eſt y juxta denominationes notæ ſuperioris, ſed ex Theoremate eſt $x : y = A : B$ ergo dividendo $x - y : y = A - B : B$, hoc eſt *differentia temporum eſt ad exceſſum &c.*

(c) * *Oſcillationes breviores ſunt magis Iſochronæ & breviſſimæ iiſdem temporibus peraguntur ac in medio non reſiſtente quam proximè.* * Breviſſimæ iiſdem temporibus peraguntur ac in medio non reſiſtente quàm proximè; ſit A arcus major, B minimus, inventum eſt (in nota a) quod erat $vA - mAA : vA = T : T + x$, & etiam quod erat $vB - mBB : vB - mAB = T + x : T + y$, unde per compoſitionem rationum invenitur $v^2 AB - mvAAB - mvABB + m^2 AABB$ (ſive $\overline{v^2 AB - mv A^2 B} \times \overline{1 - \frac{mB}{v}}$) ad $v^2 AB - mv A^2 B = T : T + y$, itaque in primo termino neglecto $- \frac{mB}{v}$ (quod infinitè parvum ſupponitur ob exiguitatem arcus B ut & quantitatis m reſpectu v) fiet 179.
$v^2 AB - mvAAB : v^2 AB - mvAAB = T : T + y$; eſt ergo $T = T + y$, ſive tempus in medio non reſiſtente idem ac in medio reſiſtente quàm proxime.

Sed oſcillationes in medio non reſiſtente ſunt Iſochronæ, hinc ergo Oſcillationes breviores in medio reſiſtente ad has quàm proxime accedentes cæteris ſunt magis Iſochronæ. Q. E. D.

(d) * *Propterea quod reſiſtentia in deſcenſu* &c. Quo major eſt reſiſtentia, eò minor fit, cœteris paribus, corporis deſcendentis velocitas, & ideo, manente deſcenſûs longitudine, tempus per reſiſtentiam producitur; & contra, quò major eſt reſiſtentia, eò citius extinguitur velocitas corpori inſita in aſcenſu.

(e) * *Major ſit pro ratione longitudi-* *nis.*

reſiſtentia in aſcenſu ſubſequente quâ tempus contrahitur. Sed & tempus oſcillationum tam brevium quàm longarum nonnihil produci videtur per motum medii. (f) Nam corporibus tardeſcentibus paulò minus reſiſtitur, pro ratione velocitatis, & corporibus acceleratis paulò magis quàm iis quæ uniformiter progrediuntur: idque quia medium, eo quem à corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore caſu magis agitatur, in poſteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conſpirat. Pendulis igitur in deſcenſu magis reſiſtit, in aſcenſu minus quàm pro ratione velocitatis, & ex utrâque causâ tempus producitur.

PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA XXIII.

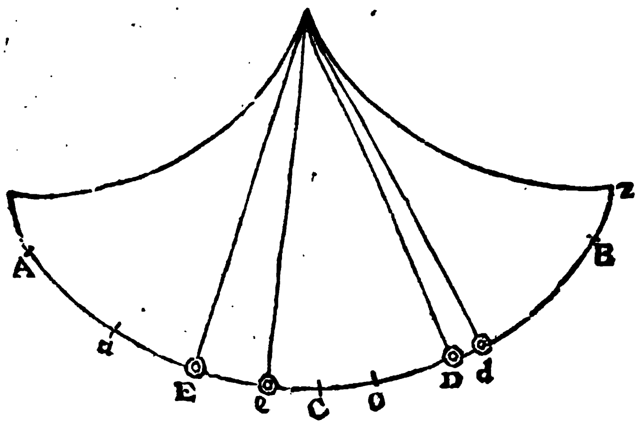
Si corpori funependulo in cycloide oſcillanti reſiſtitur in ratione momentorum temporis, erit ejus reſiſtentia ad vim gravitatis ut exceſſus arcûs deſcenſu toto deſcripti ſupra arcum aſcenſu ſubſequente deſcriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

Deſignet BC arcum deſcenſu deſcriptum, Ca arcum aſcenſu deſcriptum; & Aa differentiam arcuum: & ſtantibus quæ in propoſitione XXV. conſtructa & demonſtrata ſunt, erit vis, quâ corpus oſcillans urgetur in loco quovis D, ad vim reſiſtentiæ ut

nis. Longitudo in deſcenſu deſcripta ſemper major eſt quàm longitudo deſcripta in aſcenſu ſubſequente, ſi medium reſiſtit; cùm longitudines illæ in medio non reſiſtente ſint æquales (92. lib. I.).

(f) * *Nam corporibus tardeſcentibus*, ſeu quorum velocitas continuo decreſcit, ut fit in corporum aſcenſu, paulo minus reſiſtitur, pro ratione velocitatis; & corporibus acceleratis, ſeu deſcendentibus, paulò magis reſiſtitur quàm iis quæ uniformiter progrediuntur. In priore enim caſu, medium eo quem à corporibus accepit motu, quemque aliquandiu ob inertiam materiæ conſervat, in eamdem plagam pergit cum corporibus, & ob validiorem ab initio motûs continue decreſcentis acceptam impreſſionem magis agitatur, ac proinde magis conſpirat cum corporibus motis, minoremque iis reſiſtentiam objicit. At in ſecundo caſu cùm motus perpetuo acceleretur, medium ex prioribus ictibus non ſatis velocem motum accepit, & ideo ejus celeritas novis impulſibus continuo augenda eſt ut poſſit cum corporibus motis conſpirare; hincque corporibus acceleratis reſiſtit magis quàm uniformiter progredientibus. Pendulis igitur in deſcenſu magis reſiſtit medium, in aſcenſu minus quàm pro ratione velocitatis, & ex utrâque causâ tempus producitur. Nam quò major eſt reſiſtentia in deſcenſu, & minor in aſcenſu, eo magis producitur tempus, ut ſupra dictum eſt.

ut arcus *CD* ad arcum *CO*, qui (g) ſemiſſis eſt differentiæ illius *Aa*. Ideoque vis, quâ corpus oſcillans urgetur in cycloidis principio ſeu puncto altiſſimo, id (h) eſt, vis gravitatis,



erit ad reſiſtentiam ut arcus cycloidis inter punctum illud ſupremum & punctum infimum *C* ad arcum *CO*; id eſt (ſi arcus duplicentur) ut cycloidis totius arcus, ſeu (i) dupla penduli longitudo, ad arcum *Aa*. *Q. E. D.*

PRO-

(g) * *Qui ſemiſſis eſt differentiæ illius Aa.* Nam (*per hyp.*) arcus CA æqualis eſt arcui CB, & (*per cor. prop.* XXV.) arcus O a æqualis eſt arcui O B; quare CA — O a, ſeu A a — CO = CB — OB = CO, & hinc A a = 2 CO, ac CO = $\frac{1}{2}$ A a.

(h) * *Id eſt vis gravitatis.* In cycloidis principio ſive puncto altiſſimo tangens cycloidis eſt in directione gravitatis, & idcirco vis in cycloide æqualis eſt vi gravitatis in illo puncto, ut patet ex *cor. prop. LI. lib.* 1. 179.

(i) * *Seu dupla penduli longitudo* (462. lib. 1.).

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA VI.

Poſito quod corpori in cycloide oſcillanti reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatis: invenire reſiſtentiam in locis ſingulis.

Sit *B a* arcus oſcillatione integrâ deſcriptus, ſitque *C* infimum cycloidis punctum, & *C Z* ſemiſſis arcus cycloidis totius, longitudini penduli æqualis; & quæratur reſiſtentia corporis in loco quovis *D*. Secetur recta infinita *O Q* in punctis *O*, *S*, *P*, *Q*, eâ lege, ut (ſi erigantur perpendicula *O K*, *S T*, *P I*, *Q E*, centroque *O* & aſymptotis *O K*, *O Q* deſcribatur hyperbola *T I G E* ſecans perpendicula *S T*, *P I*, *Q E* in *T*, *I* & *E*, & per punctum *I* agatur *K F* parallela aſymptoto *O Q* occurrens aſymptoto *O K* in *K*, & perpendiculis *S T* & *Q E* in *L* & *F*) fuerit area hyperbolica *P I E Q* ad aream hyperbolicam *P I T S* ut arcus *B C* deſcenſu corporis deſcriptus ad arcum *C a* aſcenſu deſcriptum, & area *I E F* ad aream *I L T* ut *O Q* ad *O S*. Dein perpendiculo *M N* abſcindatur area hyperbolica *P I N M* quæ ſit ad aream hyperbolicam *P I E Q* ut arcus *C Z* ad arcum *B C* deſcenſu deſcriptum. Et ſi perpendiculo *R G* abſcindatur area hyperbolica *P I G R*, quæ ſit ad aream *P I E Q* ut arcus quilibet *C D* ad arcum *B C* deſcenſu toto deſcriptum; erit reſiſtentia in loco *D* ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ}$ *I E F* — *I G H* ad aream *P I N M*.

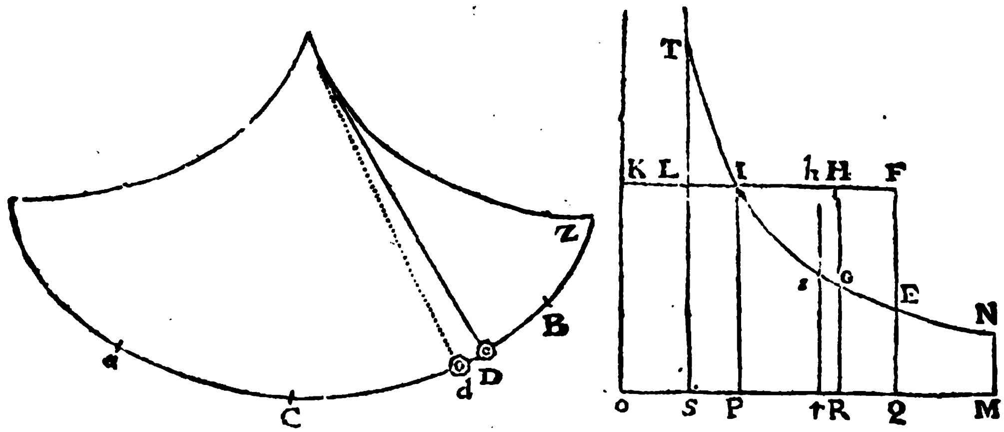
Nam cùm vires à gravitate oriundæ quibus corpus in locis *Z*, *B*, *D*, *a* urgetur, (k) ſint ut arcus *C Z*, *C B*, *C D*, *C a*, & (l) arcus illi ſint ut areæ *P I N M*, *P I E Q*, *P I G R*, *P I T S*; exponantur tum arcus tum vires per has areas reſpectivè. Sit inſuper *D d* ſpatium quàm minimum à corpore deſcendente deſcriptum, & exponatur idem per aream quam minimam *R G g r* parallelis *R G*, *r g* comprehenſam; & producatur

r g

(k) * *Sint ut arcus &c.*; per demonſtrata in prop. LI. & Cor. 2. prop. LII. lib. I.

(l) * *Et arcus illi ſint ut areæ*, per conſtructionem.

rg ad h, ut ſint $GHhg$, & $RGgr$, contemporanea (m) arearum IGH, $PIGR$ decrementa. Et (n) areæ $\frac{OR}{OQ}IEF -$ IGH incrementum $GHhg - \frac{Rr}{OQ}IEF$, ſeu $Rr \times HG -$ $\frac{Rr}{OQ}IEF$, erit ad areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$, ſeu



$Rr \times RG$, ut $HG - \frac{IEF}{OQ}$ ad RG; ideoque ut $OR \times HG$ $- \frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OR \times GR$ ſeu (o) $OP \times PI$, hoc eſt (ob (p) æqualia $OR \times HG$, $OR \times HR - OR \times GR$, $ORHK - OPIK$, $PIHR$

(m) * *Arearum* I G H, *PIGR decrementa.* Cum enim corpus è loco D deſcendit in arcu D C, decreſcit area P I G R huic arcui proportionalis, & cum eâ decreſcit quoque area I G H.

(n) * *Et areæ &c.* Nam, ob datas O Q, & I E F, decrementum areæ $\frac{OR}{OQ}$IEF — I G H, ſumptis duorum terminorum fluxionibus, invenitur æquale $\frac{Rr}{OQ}$IEF — GHhg; & ideo, mutatis ſignis, ejuſdem areæ incrementum eſt GHhg — $\frac{Rr}{OQ}$ I E F, ſeu &c. 179.

(o) * *Seu* O P × P I. Per theor. 4. de hyperbolâ.

(p) * *Ob æqualia &c.* Cùm ſit H G = H R — G R, erit O R × H G = O R × H R — O R × G R; ſed O R × H R æquale eſt rectangulo O R H K, & (*per theor.* 4. *de hyp.*) O R × G R æquale eſt rectangulo O P I K. Quare O R × H G = O R H K — O P I K = P I H R = P I G R + I G H.

PIHR & *PIGR*+*IGH*) ut *PIGR*+*IGH*$-\frac{OR}{OQ}$*IEF* ad *OPIK*. Igitur ſi area $\frac{OR}{OQ}$*IEF*—*IGH* dicatur Y, atque areæ *PIGR* decrementum *RGgr* detur, (q) erit incrementum areæ Y ut *PIGR*—Y.

Quod ſi V deſignet vim à gravitate oriundam, arcui deſcribendo *CD* proportionalem, quâ corpus urgetur in *D*, & R pro reſiſtentia ponatur; erit V—R vis tota quâ corpus urgetur in *D*. (r) Eſt itaque incrementum velocitatis ut V—R & particula illa temporis in quâ factum eſt conjunctim: Sed (ſ) & velocitas ipſa eſt ut incrementum contemporaneum ſpatii deſcripti directè & particula eadem temporis inversè. Unde, cùm reſiſtentia per hypotheſin ſit ut quadratum velocitatis, incrementum reſiſtentiæ (*per* (t) *lem.* 11.) erit ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id (u) eſt, ut momentum ſpatii & V—R conjunctim; atque ideo, ſi momentum ſpatii detur, ut V—R; id eſt, ſi pro vi V ſcribatur ejus exponens *PIGR*, & reſiſtentia R exponatur per aliam aliquam aream Z, ut *PIGR*—Z.

Igitur areâ *PIGR* per datorum momentorum ſubductionem uniformiter decreſcente, creſcunt area Y in ratione *PIGR*—Y,

(q) * *Erit incrementum areæ Y ut PIGR—Y.* Quoniam enim (hyp.) eſt $\frac{OR}{OQ}$ IEF—IGH=*Y*, & (ex demonſtratis) incrementum areæ $\frac{OR}{OQ}$IEF—IGH eſt ad decrementum (*ex hyp.*) datum RGgr, ut PIGR+IGH$-\frac{OR}{OQ}$IEF, ſeu PIGR—*Y*, ad datum rectangulum OPIK; manifeſtum eſt quod incrementum areæ *Y* ſit ad PIGR—*Y* in datâ ratione, nimirum in ratione decrementi dati RGgr ad rectangulum datum OPIK.

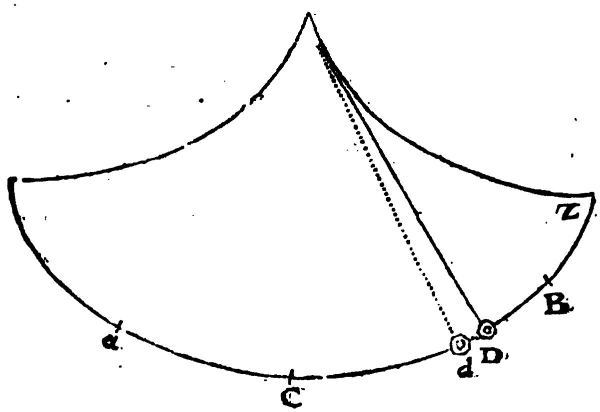
(r) * *Eſt itaque incrementum velocitatis, ut &c.* (18.).

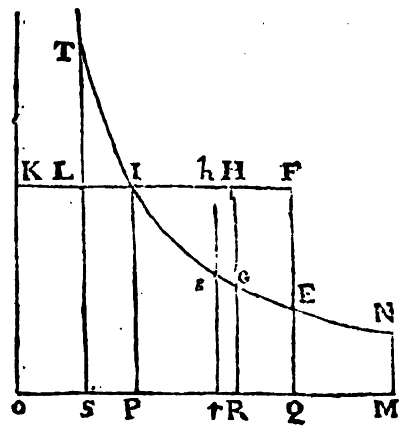
(ſ) * *Sed & velocitas ipſa eſt &c.* (11).

(t) * *Per Lemma* II. caſu 3°. idque ſtatim apparet: nam ſi velocitas dicatur *v*, cum ſit *R* ut *vv*, erit *dR* ut 2*vdv*, ſeu ut *vdv*.

(u) * *Id eſt, ut momentum ſpatii &c.* Quia (ex dem.) velocitatis incrementum eſt ut *V*—*R* & momentum temporis conjunctim, velocitas autem ipſa ut incrementum ſpatii directe & momentum temporis inversè; erit ex æquo, velocitas in ſuum incrementum ducta, ut *V*—*R* & incrementum ſpatii conjunctim, in quâ ratione eſt etiam incrementum reſiſtentiæ (*ex dem.*).

Y, & area Z in ratione *P I G R* —Z. Et propterea ſi areæ Y & Z ſimul incipiant & ſub initio æquales ſint, hæ (x) per additionem æqualium momentorum pergent eſſe æquales, & æqualibus itidem momentis ſubinde decreſcentes ſimul evaneſcent. Et viciſſim, ſi ſimul incipiunt & ſimul evaneſcunt, æqualia habebunt momenta & ſemper erunt æquales: id adeo quia





ſi reſiſtentia Z augeatur; velocitas unà cum arcu illo *C a*, qui in aſcenſu corporis deſcribitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis unà cum reſiſtentiâ ceſſat propius accedente ad punctum *C*, (y) reſiſtentia citius evaneſcet quàm area Y. Et contrarium eveniet ubi reſiſtentia diminuitur. Jam

(x.) * *Hæ per additionem æqualium momentorum pergent eſſe æquales*, &c. Cùm enim ſemper creſcat area *Y* in ratione P I G R — *Y*, & area Z in ratione P I G R — Z; ſi areæ illæ *Y* & *Z* ſimul incipiant & initio æquales ſint, erunt etiam areæ P I G R — *Y* & P I G R — *Z* ſub initio æquales; &, ob datam incrementorum areæ *Y* & areæ *Z* ad P I G R—*Y* & P I G R —*Z* rationem, incrementa illa ſicut & P I G R — *Y* ac P I G R — *Z* manebunt ſemper æqualia, uti ſub initio. Quare etiam areæ *Y* & *Z* æqualibus itidem momentis ſubinde decreſcent & ſimul evaneſcent:

(y) * *Reſiſtentia citius evaneſcet quam area* Y, *& contrarium &c.* Nam ſi area Z ſemper æqualis ſit areæ *Y*, ſimul incipient ſimulque evaneſcent. Incipit autem area *Y* (ut infra oſtendetur) ubi recta R G incidit in rectam Q E, & deſinit ubi recta R G incidit in rectam S T, ſuntque Q & S puncta fixa per arcuum C B, C a longitudines determinata (*per conſtr.*). Quare ſi reſiſtentia *Z* augeatur vel minuatur ita ut ceſſet in puncto arcûs C a infra vel ſupra a poſitum, citius vel tardius evaneſcet area *Z* quàm area *Y*, quia hæc non deſinit niſi ubi corpus pervenit ad locum a. Reſiſtentia igitur, ſeu area *Z* nec major nec minor eſſe poteſt quàm area *Y*, ſi ſimul incipiant & ſimul evaneſcant.

179.

Jam verò area Z incipit déſinitque ubi reſiſtentia nulla eſt, hoc eſt, in principio motûs ubi arcus *CD* arcui *CB* æquatur & recta *RG* incidit in rectam *QE*, & in fine motus ubi arcus *CD* arcui *Ca* æquatur & *RG* (z) incidit in rectam *ST*. Et area Y ſeu $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ incipit deſinitque ubi nulla eſt, ideoque ubi $\frac{OR}{OQ}IEF$ & *IGH* æqualia ſunt: hoc (a) eſt (per conſtructionem) ubi recta *RG* incidit ſucceſſivè in rectas *QE* & *ST*. Proindeque areæ illæ ſimul incipiunt & ſimul evaneſcunt, & propterea ſemper ſunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ æqualis eſt areæ Z, per quam reſiſtentia exponitur, & propterea eſt ad aream *PINM* per quam gravitas exponitur, ut reſiſtentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Eſt igitur reſiſtentia in loco infimo *C* ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ}IEF$ ad (b) aream *PINM*.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area *PIHR* eſt ad aream *IEF* ut *OR* ad *OQ*. Eo enim in caſu momentum ejus (nimirum *PIGR* — Y) (c) evadit nullum.

Corol.

(z) * *Incidit in rectam S T.* Hæc patent per conſtructionem, quâ areæ PIEQ, PIGR, PITS factæ ſunt arcubus CB, CD, Ca proportionales.

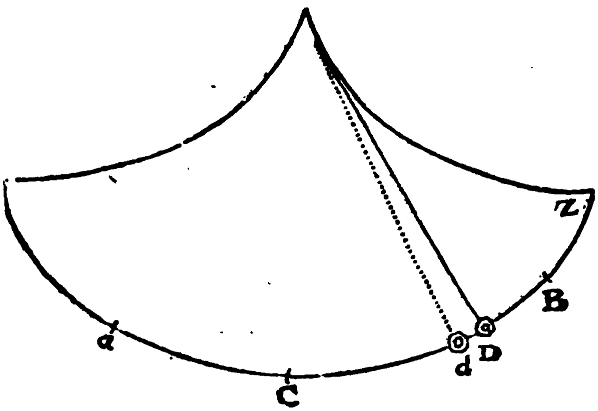
(a) * *Hoc eſt (per conſtructionem) ubi &c.* Ubi enim *Y* evaneſcit, fit quoque $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH = o$, & ideo $\frac{OR}{OQ}IEF = IGH$; hoc autem contingit ubi fit $IEF : IGH = OQ : OR$, quod evenit primo ubi recta R G incidit in rectam Q E & incipit area *Y*. Tunc enim $IEF = IGH$ & $OQ = OR$ ideoque $IEF : IGH = OQ : OR$. Eſt enim $\frac{OR}{OQ}IEF = IGH$, quando fit $OR = OS$ & $IGH = ILT$: nam cùm (*per conſtr.*) ſit area I E F ad aream I L T ut O Q ad OS, ſi ponatur $OR = OS$, fiet $ILT = IGH$, eritque area I E F ad aream I G H ut O Q ad O R, & hinc $\frac{OR}{OQ}IEF = IGH$. Eſt autem $OR = OS$, ubi recta R G incidit in rectam S T, & area *Y* deſinit ibidem.

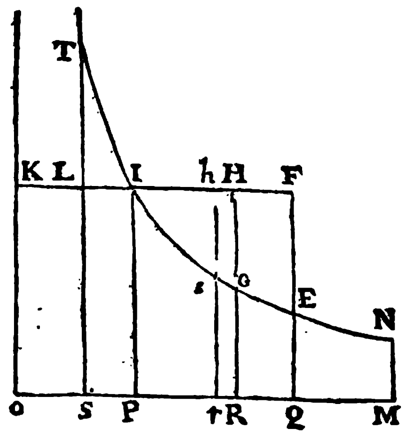
(b) * *Ad aream PINM.* Nam evaneſcente arcu C D, evaneſcit ipſi proportionalis area P I G R, & hinc evaneſcit etiam area I G H, fitque $OR = OP$, atque proinde $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH = \frac{OP}{OQ}IEF$.

(c) * *Evadit nullum.* Momentum areæ *Y* eſt ut $PIGR - Y$ (*ex dem.*), id eſt, ut $PIGR + IGH - \frac{OR}{OQ}IEF = PIHR = \frac{OR}{OQ}IEF$. Quâ propter momentum areæ *Y* nullum fit; & ideo reſiſten-

Corol. 3. Hinc etiam innoteſcit velocitas in locis ſingulis: quippe quæ eſt in ſubduplicatâ ratione reſiſtentiæ, & ipſo motûs initio æquatur velocitati corporis in eâdem cycloide ſine (d) omni reſiſtentiâ oſcillantis.

Cæ-



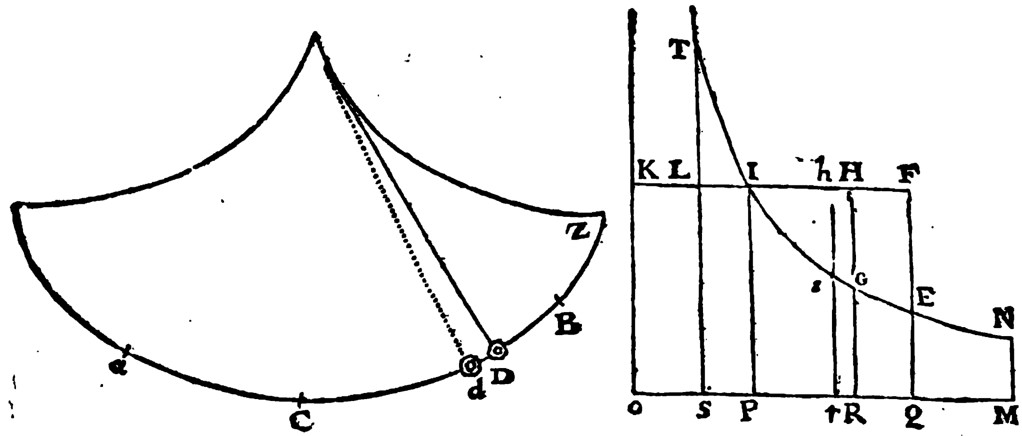


ſtentia (cui area *Y* proportionalis eſt) maxima evadit (48), ubi eſt $PIHR - \frac{OR}{OQ} IEF = 0$, ſeu ubi $PIHR = \frac{OR}{OQ} IEF$, ac proinde ubi area PIHR eſt ad aream IEF ut OR ad OQ.

(d) * *Sine omni reſiſtentiâ oſcillantis.* Quoniam velocitatis quadratum in loco quovis D eſt ut reſiſtentia, ſeu ut area *Y* in medio reſiſtente; & ut $CB^2 - CD^2$ (*per prop. LII. lib. I.*) ſeu ut $\overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2$ in medio non reſiſtente; ſi velocitates illæ dicantur *v*, *V*, ſintque *C* & *E* quantitates conſtantes, erit $vv = C \times Y$, & $VV = E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$. Et quia initio motûs, dum corpus eſt in B, velocitates illæ æquales ſunt, ob reſiſtentiam reſpectu vis à gravitate oriundæ evaneſcentem; erit initio motûs $C \times Y = E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$; ſed initio motûs eſt *Y*, ſeu $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH = \frac{OR}{OQ} IEF - IEF + QR \times FE = \frac{OR \times IEF - OQ \times IEF + OQ \times QR \times FE}{OQ} = \frac{QR}{OQ} \times \overline{OQ \times FE - IEF}$, coincidente nimirum GH cum EF, & QR ſeu HF evaneſcente. Et ſimiliter initio motus eſt $\overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2 = \overline{PIEQ + PIGR} \times \overline{PIEQ - PIGR} = \overline{2PIEQ - QR \times QE} \times \overline{QR \times QE} = 2PIEQ \times QR \times QE$, neglecto termino evaneſcente $QR^2 \times QE^2$. Quare erit initio motus $\frac{C \times QR}{OQ} \times \overline{OQ \times FE - IEF} = E \times QR \times QE \times 2PIEQ$, & ideo $C : E = 2PIEQ \times QE : \frac{OQ \times FE - IEF}{OQ}$; unde, cum ſit ſemper $vv : VV = C \times Y : E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$, erit quoque $vv : VV = 2PIEQ \times QE \times \frac{OR}{OQ} \overline{IEF - IGH} : \frac{OQ \times FE - IEF}{OQ} \times \overline{\overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2}$. 179.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXIX. PROBL. VI.

Cæterùm (e) ob difficilem calculum quo reſiſtentia & velocitas per hanc propoſitionem inveniendæ ſunt, viſum eſt propoſitionem ſequentem ſubjungere.



Innoteſcet igitur velocitas in medio reſiſtente per inventam ipſius rationem ad velocitatem in medio non reſiſtente in ſingulis locis.

(e) * *Cæterùm ob difficilem calculum &c.* Sit $OP = a$, $PI = FQ = b$, $OS = x$, & ideo $ST = \frac{ba}{x}$, $SP = LI = a - x$, & $LT = \frac{ba}{x} - b$. Deinde $OQ = z$, & hinc $QE = \frac{ba}{z}$, $PQ = FI = z - a$, & FE $b - \frac{ba}{z}$. Et erit areæ PIEQ elementum $= \frac{badz}{z}$, areæ PITS elementum $= -\frac{badx}{x}$; & inde area $PIEQ = baL.z + Q$ *conſt.*; & quia area illa evaneſcit ubi eſt $PQ = z - a = o$, ſeu ubi $z = a$, invenitur conſtans $Q = -baL.a$, atque adeo area $PIEQ = baL.z - baL.a = baL.\frac{z}{a}$. Simili modo reperitur area PITS $= baL.\frac{a}{x}$. Sit jam arcus BC ad arcum Ca, ut m ad 1; & erit (*per conſtr.*) $m : 1 = baL.\frac{z}{a} : baL.\frac{a}{x} = L.\frac{z}{a} : L.\frac{a}{x}$, ac proinde $L.\frac{z}{a} = mL.\frac{a}{x} = L.\frac{a^m}{x^m}$, atque $\frac{z}{a} = \frac{a^m}{x^m}$, & $z = \frac{a^{m+1}}{x^m}$.

Porro ex ſuperioribus denominationibus invenitur areæ IEF elementum $= bdz - \frac{badz}{z}$, & inde area ipſa $IEF = bz - baLz + Q$ *conſt.* quæ cùm ſit o ubi $FI = z - a$ evaneſcit ſitque $z = a$, eſt $Q = -ba + baL.a$, ideoque $IEF = baL.\frac{a}{z} + bz - ba$; & ſimiliter habetur area $ILT = baL.\frac{a}{x} + bx - ba$. Sed (*per conſtr.*) area IEF eſt ad aream ILT ut OQ ad OS, ſeu ut z ad x: quare $z : x = baL.\frac{a}{z} + bz - ba$

$-ba : baL\frac{a}{x} + bx - ba$, & dividendo per b, ac loco z ſcribendo ipſius valorem $\frac{a^{m+1}}{x^m}$, fit $a^{m+1} : x^{m+1} = aL.\frac{x^m}{a^m} + \frac{a^{m+1}}{x^m} - a : aL.\frac{a}{x} + x - a$; unde habetur $a^{m+2}L.\frac{a}{x} + a^{m+1}x - a^{m+2} = ax^{m+2}L.\frac{x^m}{a^m} + a^{m+1}x - ax^{m+1}$; & inde eruitur $mx^{m+1}Lx - mx^{m+1}La + a^{m+1}Lx - x^{m+1} = a^{m+1}L.a - a^{m+1}$. Si itaque ex hâc æquatione per ſerierum regreſſum, vel quâcumque alia methodo, determinetur valor x per arbitrariam lineam a, & deinde per æquationem $z = \frac{a^{m+1}}{x^m}$ inveniatur valor ipſius z; *Newtoniana* conſtructio ad calculum logarithmorum revocabitur.

Scholion. *Hermannus* prop. 73. & 74. lib. 2. *Phoronomiæ* geminam conſtructionem dedit, quâ corporis in curvâ qualibet oſcillantis reſiſtentia velocitatis quadrato proportionalis definitur, & *Newtonianam* pro cycloide conſtructionem ope logarithmicæ ſimpliciorem reddidit. Difficile autem non 179.
eſt (44) hanc NEWTONI conſtructionem revocare ad logarithmicam per punctum N & aſymptoto K O ad partes O productâ deſcribendam.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VI. Prop. XXX. Theor. XXIV.

PROPOSITIO XXX. THEOREMA XXIV.

Si recta a B *æqualis ſit cycloidis arcui quem corpus oſcillando deſcribit, & ad ſingula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* D K, *quæ ſint ad longitudinem penduli ut reſiſtentia corporis in arcus punctis correſpondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum deſcenſu toto deſcriptum & arcum aſcenſu toto ſubſequente deſcriptum ducta in arcuum eorundem ſemiſummam, æqualis erit area* B K a *à perpendiculis omnibus* D K *occupatæ.*

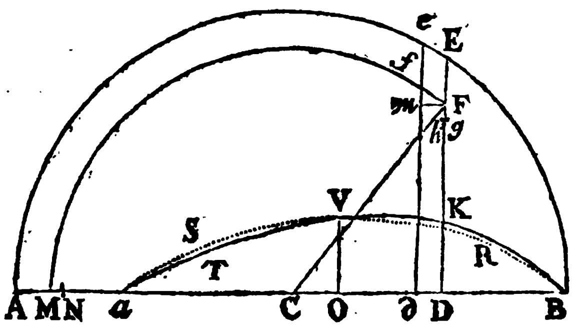
Exponatur enim tum cycloidis arcus, oſcillatione integrâ deſcriptus, per rectam illam ſibi æqualem *a B*, tum arcus qui deſcriberetur in vacuo per longitudinem *A B*. Biſecetur *A B* in *C*, & (f) punctum *C* repræſentabit infimum cycloidis punctum, & (g) erit *C D* ut vis à gravitate oriundâ, quâ corpus in *D* ſecundum tangentem cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem penduli quam (h) habet vis in *D* ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem *C D*, & vis gravitatis per longitudinem penduli, & ſi in *D E* capiatur *D K* in eâ ratione ad longitudinem penduli quam habet reſiſtentia ad gravitatem, erit *D K* exponens reſiſtentiæ. Centro *C* & intervallo *C A* vel *C B* conſtruatur ſemicirculus *B E e A*. Deſcribat autem corpus tempore quàm minimo ſpatium *D d*, & erectis perpendiculis *D E*, *d e* circumferentiæ occurrentibus in *E* & *e*, erunt hæc ut velocitates quas corpus in vacuo, deſcendendo à puncto *B*, acquireret in locis *D* & *d*. Patet hoc (*per prop.* LII. *lib.* I.). Exponantur itaque hæ velocitates per perpendicula illa *D E*, *d e*; ſitque *D F* velocitas quam acquirit in *D* cadendo de *B* in medio reſiſtente. Et ſi cen-

(f) * *Et punctum C repræſentabit infimum cycloidis punctum.* Nam cycloidis punctum infimum arcum quem corpus in medio non reſiſtente oſcillando deſcribit in duas partes æquales dividit.

(g) * *Et erit C D ut vis à gravitate oriunda &c.* patet per demonſtr. prop. LI. lib. I.

(h) * *Quam habet vis in D ad vim gravitatis*, per cor. 1. prop. LI. & not. 462. lib. I.

centro C & intervallo CF deſcribatur circulus FfM occurrens rectis de & AB in f & M, (i) erit M locus ad quem deinceps ſine ulteriore reſiſtentiâ aſcenderet, & df velocitas quam acquireret in d. Unde etiam ſi Fg deſignet velocitatis momentum quod corpus D deſcribendo ſpatium quam minimum Dd, ex reſiſtentiâ medii amittit; & ſumatur CN æqualis Cg: erit N locus ad quem corpus deinceps ſine ulteriore reſiſtentiâ aſcenderet, & MN erit decrementum aſcenſûs ex velocitatis il-



lius amiſſione oriundum. Ad df demittatur perpendiculum Fm, & velocitatis DF decrementum Fg à reſiſtentiâ DK genitum, erit ad velocitatis ejuſdem incrementum fm à vi CD genitum, ut vis generans DK (k) ad vim generantem CD. Sed & (l) ob ſimilia triangula Fmf, Fgh, FDC, eſt fm ad Fm ſeu Dd ut CD ad DF: & ex æquo Fg ad Dd ut DK ad DF. Item Fh ad Fg ut DF ad CF; & ex æquo perturbatè Fh (m) ſeu MN ad Dd ut DK ad CF ſeu CM; ideò-

(i) * *Erit M locus ad quem &c.* Eamdem enim velocitatem haberet corpus in D, ac ſi ſecluſâ omni reſiſtentiâ percurriſſet ſpatium C F — C D, & ideo (per modo demonſtrata) in loco d haberet velocitatem d f, & in loco M nullam.

(k) * *Ad vim generantem C D.* Sunt enim velocitatum elementa dato temporis momento genita, ut vires generantes (13. lib. 1.)

(l) * *Ob ſimilia triangula &c.* Sunt enim anguli ad m, h, & D recti, angulus C F D duobus triangulis F D C, F h g communis, & angulus f F m æqualis angulo C F D, quia ſi ex angulis rectis m F D, f F C ſubducatur communis angulus m F C, remanebunt anguli æquales f F m, C F D. Tria igitur triangula F m f, F h g & F D C æquales angulos habent, ſuntque proinde ſimilia.

(m) * *F h ſeu M N.* Cùm ſit C M æqualis C F, & C N æqualis C g ſeu C h, angulo h C g evaneſcente, eſt $MN = CM - CN = CF - Ch = Fh$.

179.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXX. THEOR. XXIV.

(n) ideoque ſumma omnium $MN \times CM$ æqualis erit ſummæ omnium $Dd \times DK$. Ad punctum mobile M erigi ſemper intelligatur ordinata rectangula æqualis indeterminatæ CM, quæ motu continuo ducatur in totam longitudinem Aa; & trapezium ex illo motu deſcriptum ſive huic æquale rectangulum $Aa \times \frac{1}{2} aB$ (o) æquabitur ſummæ omnium $MN \times CM$, ideoque ſummæ omnium $Dd \times DK$, id eſt, areæ $BKVTa$. *Q. E. D.*

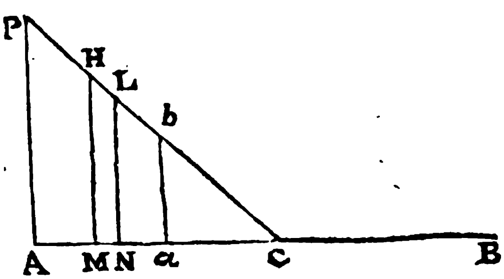
Corol. Hinc ex lege reſiſtentiæ & arcuum Ca, CB differentia Aa colligi poteſt proportio reſiſtentiæ ad gravitatem quam proximè.

Nam ſi uniformis ſit reſiſtentia DK, figura $BKTa$ rectangulum erit ſub Ba & DK; & inde rectangulum ſub $\frac{1}{2} Ba$ & Aa erit æquale rectangulo ſub Ba & DK, & DK æqualis erit $\frac{1}{2} Aa$. Quare cùm DK ſit exponens reſiſtentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit reſiſtentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2} Aa$ ad longitudinem penduli; omninò ut in prop. XXVIII. demonſtratum eſt.

Si reſiſtentia ſit ut velocitas, figura $BKTa$ ellipſis erit quàm proximè. Nam ſi corpus, in medio non reſiſtente, oſcillatione in-

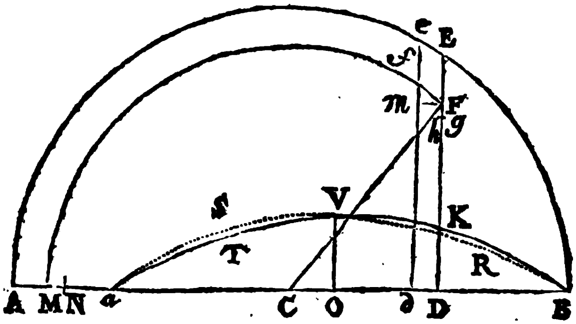
(n) * *Ideoque ſumma omnium MN × CM &c.* Quoniam (per modo demonſtrata) $MN \times CM = Dd \times DK$, erit ſumma omnium $MN \times CM$ æqualis ſummæ omnium $Dd \times DK$, modò ſimul incipiant ſimulque deſinant. Incipit autem ſumma omnium $Dd \times DK$ in B & deſinit in a, & ſumma omnium $MN \times CM$ incipit in A, & ideo ſi deſinat in a, erunt ſummæ illæ æquales.

(o) * *Æquabitur ſummæ &c.* Erigatur ad punctum A perpendiculum $AP = AC$, jungatur PC, & ductis per M & N ac a perpendiculis MH, NL, ab; erit ſemper $MN \times CM = MN \times HM$; ideoque ſi ordinata variabilis HM ducatur in totam longitudinem Aa, erit trapezium APba æquale ſummæ omnium $MN \times CM$ ab

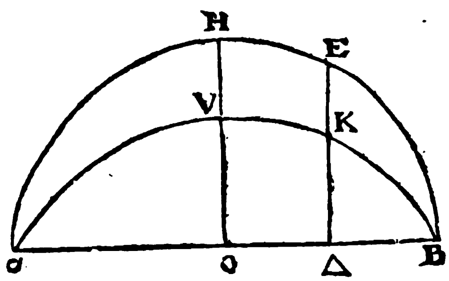


A ad a; ſed trapezium illud eſt $CAP - Cab = \frac{1}{2} CA^2 - \frac{1}{2} Ca^2 = \frac{1}{2}(CA + Ca) \times (CA - Ca) = \frac{1}{2} aB \times Aa$, ob $CB = CA$. Ergo &c.

integrâ deſcriberet longitudinem *B A*, velocitas in loco quovis *D* foret ut circuli diametro *A B* deſcripti ordinatim applicata *D E*. Proinde cùm *B a* in medio reſiſtente, & *B A* in medio non reſiſtente, (p) æqualibus circiter temporibus deſcribantur; ideoque velocitates in ſingulis ipſius *B a* punctis, ſint quam proximè ad velocitates in punctis correſpondentibus longitudinis *B A*, ut eſt *B a* ad *B A*; erit velocitas in puncto *D* in medio reſiſtente ut circuli vel ellipſeos ſuper diametro *B a*



(p) * 180. *Æqualibus circiter temporibus deſcribantur.* Quia reſiſtentia minuendo corporis velocitatem tempus producit in deſcenſu à B ad C, illudque contrahit in aſcenſu à C ad a, longitudines B A in medio non reſiſtente & B a in medio reſiſtente, earumque longitudinum partes proportionales, æqualibus circiter temporibus deſcribuntur. Sunt autem velocitates ut ſpatia eodem temporis momento deſcripta (11); quare velocitates in partibus longitudinum B A, B a correſpondentibus ſunt quam proximè ut longitudines B A, B a, id eſt, in ratione datâ. Centro O & diametro A B deſcribatur circulus B E H a, ſitque B Δ in hac figurâ ad B D in figurâ textûs, ut B a ad B A, hoc eſt, ut velocitas in loco Δ in medio reſiſtente ad velocitatem in loco D in medio non reſiſtente; & ductâ



ordinatâ Δ E, erit etiam, ob figurarum ſimilitudinem Δ E ad D E ut B a ab B A, ideoque ut velocitas in medio reſiſtente ad velocitatem in medio non reſiſtente. Velocitas igitur in medio reſiſtente erit ſemper ut ordinata variabilis Δ E, 180.

B a deſcripti ordinatim applicata; (q) ideoque figura *BKVTa* ellipſis erit quàm proximè. Cùm reſiſtentia velocitati proportionalis ſupponatur, ſit *OV* exponens reſiſtentiæ in puncto medio *O*; & ellipſis *BRVSa*, centro *O*, ſemiaxibus *OB*, *OV* deſcripta, figuram *BKVTa*, eique æquale rectangulum *Aa* × *BO*, æquabit quamproximè. Eſt igitur *Aa* × *BO* ad *OV* × *BO* ut (r) area ſemi-ellipſeos hujus ad *OV* × *BO*: id eſt, *Aa* ad *OV* ut (ſ) area ſemicirculi ad quadratum radii, ſive ut 11 ad 7 circiter: Et propterea $\frac{7}{11}$ *Aa* ad longitudinem penduli ut corporis oſcillantis reſiſtentia in *O* ad ejuſdem gravitatem.

Quod ſi reſiſtentia *DK* ſit in duplicatâ ratione velocitatis, figura *BKVTa* ferè (t) parabola erit verticem habens *V* & axem

(q) * *Ideoque figura BKVTa ellipſis erit quàm proximè.* Cùm enim (ex modò demonſtratis) velocitas in loco quovis Δ ſit ſemper ut ordinata Δ E ad circulum, & (*per hyp.*) reſiſtentia Δ K in hac figurâ, vel D K in figura textus, ſit ſemper ut velocitas Δ E, erit Δ K ut Δ E; & quia $\Delta E^2 = a\Delta \times \Delta B$) ex naturâ circuli), erit etiam ΔK^2 ut $a\Delta \times \Delta B$, & ideo figura B K V T a ellipſis, cujus centrum O, ſemiaxes a O, & O V, ſi O V exponat reſiſtentiam in puncto medio O axis a B.

(r) * *Ut area ſemi-ellipſeos hujus ad OV × BO.* Eſt enim area illa $= Aa \times \frac{1}{2} aB$ (*per prop. hanc*), & $\frac{1}{2} aB = BO$ (per conſtr.).

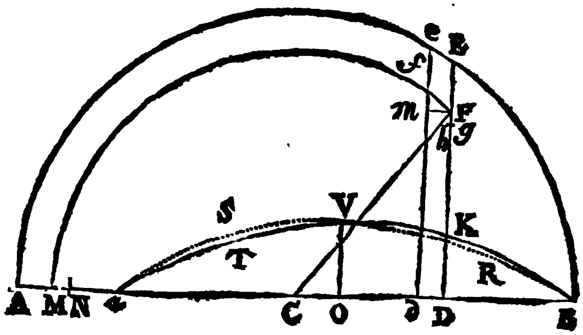
(ſ) * *Ut area ſemicirculi ad quadratum radii &c.* Area ellipſeos cujuſcumque eſt ad rectangulum ſub axibus in ratione datâ, nimirum in ratione areæ circuli ad quadratum diametri (250. *lib.* 1.); circulus enim eſt ellipſis cujus ſunt axes æquales; unde area ſemi-ellipſeos B K V T a eſt ad quartam partem rectanguli ſub axibus, ſeu ad rectangulum ſub ſemiaxibus O V × B O, ut area ſemicirculi ad quadratum radii. Sed ſi circuli radius ſit 7, erit ſemiperipheria 22 circiter, & area ſemicirculi 7 × 11, ideoque area ſemicirculi ad quadratum radii ut 11 ad 7 circiter. Eſt igitur A a ad O V ut 11 ad 7, & proinde $OV = \frac{7}{11} Aa$. Et propterea (*per prop. hanc*) $\frac{7}{11}$ A a eſt ad longitudinem penduli ut corporis oſcillantis reſiſtentia in O ad ejuſdem pondus.

(t) * *Ferè parabola erit.* Ordinata Δ E ad ſemicirculum B E H a (*vide fig. not.* 180.) eſt ſemper ut velocitas in loco Δ in medio reſiſtente, & (ex naturâ circuli) $\Delta E^2 = a\Delta \times \Delta B$, & (*ex hyp.*) reſiſtentia Δ K eſt ut velocitatis quadratum, ſeu ut ΔE^2, adeoque Δ K eſt ut rectangulum $a\Delta \times \Delta B$ ſive ut $\overline{OB + O\Delta} \times \overline{OB - O\Delta}$ hoc eſt ut $\overline{OB}^2 - \overline{O\Delta}^2$. * Sed in Parabolâ cujus vertex foret V & axis V O differentia abſciſſarum foret ſemper ad differentiam quadratorum ordinatarum in utriuſque abſciſſæ extremo ductarum, in datâ ratione. Jam verò ſi ex K ducatur in axem perpendicularis K P, eſt K Δ = P O & P O eſt differentia abſciſſarum V P & V O, eſt O Δ = P K ordinatæ in P, ideoque eſt $\overline{OB}^2 - \overline{O\Delta}^2$ differentia quadratorum ordinatarum in punctis P & O, cum ergo K D & $\overline{OB}^2 - \overline{O\Delta}^2$ ſint in

datâ

axem *O V*, (u) ideoque æqualis erit rectangulo ſub $\frac{2}{3}$ *B a* & *O V* quam proximè. Eſt igitur rectangulum ſub $\frac{1}{2}$ *B a* & *A a* æquale rectangulo ſub $\frac{2}{3}$ *B a* & *O V*, ideoque *O V* æqualis $\frac{3}{4}$ *Aa* : & propterea corporis oſcillantis reſiſtentia in *O* ad ipſius gravitatem ut $\frac{3}{4}$ *A a* ad longitudinem penduli.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXX. THEOR. XXIV.



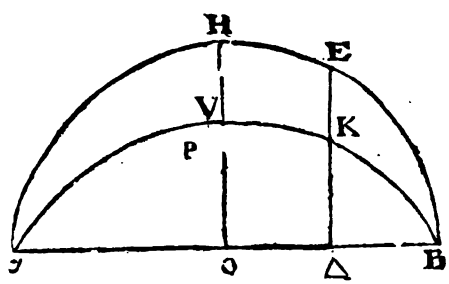
Atque has concluſiones in rebus practicis abundè ſatis accuratas eſſe cenſeo. Nam cùm ellipſis vel parabola *B R V S a* congruat cum figura *B K V T a* in (x) puncto medio *V*, hæc ſi ad partem alterutram *B R V* vel *V S a* excedit figuram illam, (y) deficiet ab eâdem ad partem alteram, & ſic eidem æqua-

datâ ratione figura B K V T a parabola erit verticem habens V & axem O V (per theor. 1. de parab.)

(u) * *Ideoque æqualis erit rectangulo ſub $\frac{2}{3}$ B a & O V quam proximè.* Nam area parabolica B K V O eſt $\frac{2}{3}$ B O × V O (*Theor. 4. de parab.*) & ipſius duplum, ſeu area tota B K V a eſt $\frac{2}{3}$ a B × O V.

(x) * *In puncto medio V.* Supponitur enim quòd O V accuratè exhibeat reſiſtentiam in puncto medio O, quodque parabola vel ellipſis per punctum V deſcripta ſit.

(y) * *Deficiet ab eâdem ad partem alteram.* Quia duæ ellipſeos vel parabolæ 180.



partes B R V & a S V ſimiles ſunt & æquales, ſi reſiſtentiæ in deſcenſu à B ad O majores ſint quàm pro ratione ordinatarum D R ad ellipſim vel parabolam,

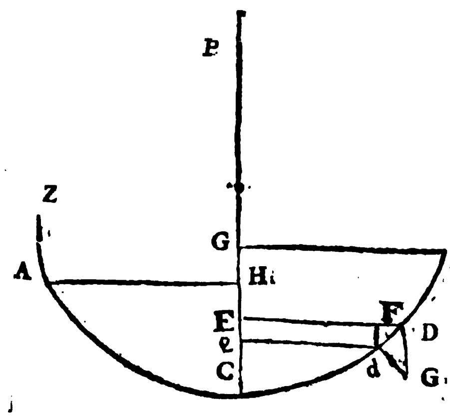
quabitur quàm proximè (z).

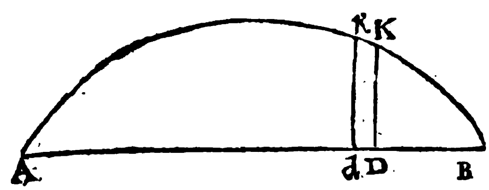
PRO-

ad alteram partem minores erunt; & contra.

181. Sit reſiſtentia in ratione ſeſquiplicatâ velocitatis, id eſt, (*vide fig. not.* 180.) ΔK ut $\Delta E^{\frac{3}{2}}$; & quoniam (ex naturâ circuli) $\Delta E = (BO^2 - \Delta O^2)^{\frac{1}{2}}$, & proinde $\Delta E^{\frac{3}{2}} = (BO^2 - \Delta O^2)^{\frac{3}{4}}$, erit ΔK ut $(BO^2 - \Delta O^2)^{\frac{3}{4}}$, & (*in fig. textûs*) DK ut $(BO^2 - DO^2)^{\frac{3}{4}}$. Dicantur $BO = a$, $VO = b$, $DO = x$, $DK = y$, & erit $b : y = a^{\frac{3}{2}} : (aa - xx)^{\frac{3}{4}}$, ideoque $y = \frac{b(aa - xx)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}}$; & hinc areæ OVKD momentum $ydx = bdx\frac{(aa - xx)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}}$.

Quantitas $(aa - xx)^{\frac{3}{4}}$ in ſeriem infinitam reſolvatur (551. *lib.* I.), & invenietur $dx(aa - xx)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{2}}dx - \frac{3x^2dx}{4a^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x^4dx}{4\times 8a^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\times 5x^6dx}{4\times 8\times 12a^{\frac{9}{2}}} - \frac{3\times 5\times 9x^8dx}{4\times 8\times 12\times 16a^{\frac{13}{2}}}$ — &c. Et ſumptis fluentibus S. $dx(aa - xx)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{2}}x - \frac{x^3}{4a^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x^5}{5\times 4\times 8a^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\times 5x^7}{7\times 4\times 8\times 12a^{\frac{9}{2}}} - \frac{3\times 5\times 9x^9}{9\times 4\times 8\times 12\times 16a^{\frac{13}{2}}}$ — &c. $= \frac{50841a^{\frac{5}{2}}}{71680}$, factâ $x = a$, & neglectis, ob parvitatem, cæteris ſeriei terminis. Quare cùm ſit area OVKD $= \frac{b}{a^{\frac{3}{2}}} \times$ S. $dx(aa - xx)^{\frac{3}{4}}$, ſi ponatur $x = a$ erit area OVKB $= \frac{50841}{71680}ba$, & 2OVKB ſeu area tota BKVTa $= \frac{50841}{35840}ba = \frac{10}{7}ba$, circiter. Eſt itaque $\frac{10}{7}$ VO × BO = Aa × BO, & hinc VO $= \frac{7}{10}$ Aa; ac propterea corporis oſcillantis reſiſtentia in O ad ipſius gravitatem ut $\frac{7}{10}$ Aa ad longitudinem penduli.





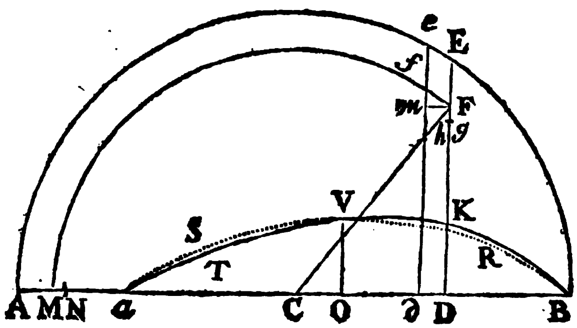
(z) * 182. *Quam proximè.* Propoſitionem 72. lib. 2. Phor. quæ 30æ. hujus libri fere ſimilis eſt, ſed generalis, & demonſtratu facilis, hic adjungemus.

Si curvæ cujuſvis BCZ arcus totus AB, quem grave deſcenſu per BC & ſubſequente aſcenſu per CA in medio reſiſtente deſcribit, extendatur in lineam rectam BA, & ad ſingula hujus rectæ puncta D erigantur perpendicula DK proportionalia medii reſiſtentiis quas mobile in homologis curvæ BCA punctis D ſubit, ſitque BKA curva quam punctum K perpetuo tan-

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXV.

Si corporis oſcillantis reſiſtentia in ſingulis arcuum deſcriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in datâ ratione; differentia inter arcum deſcenſu deſcriptum & arcum ſubſequente aſcenſu deſcriptum, augebitur vel diminuetur in eâdem ratione.

Oritur enim differentia illa (a) ex retardatione penduli per reſiſtentiam medii, ideoque eſt ut retardatio tota eique proportionalis



reſiſtentia retardans. In ſuperiore propoſitione rectangulum ſub rectâ $\frac{1}{2}$ *aB* & arcuum illorum *CB*, *Ca* differentia *Aa* æqualis

tangit: area curvilinea B K A B æquabitur rectangulo P C × G H ex recta P C, quæ gravitatem conſtantem exponit, in differentiam G H abſciſſarum G C, H C arcuum B C, C A deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum.

Ex punctis D, d infinitè propinquis demittantur ad P C perpendicula D E, d e, & ex puncto d ad E D perpendiculum d F; & vis gravitatis P C erit ad vim tangentialem in loco D, quâ motus corporis in curvâ acceleratur, ut D d ad F d.

* Nam ducta D G parallela P C & G d in curvam perpendiculari, exprimat D G gravitatis actionem, exprimet D d vim Tangentialem, ſed ob ſimilitudinem Triangulorum D d G, D d F eſt D G : D d = D d : F D, erit ergo D d ad F d ut vis gravitatis ad vim Tangentialem, quâpropter cum D d ſumatur ubique æqualis ut eſt actio gravitatis, ubique F d exprimet

vim Tangentialem; eſt F d = E e, ſi itaque P C repræſentet vim gravitatis erit 182.
D d : E e = P C ad vim Tangentialem,

† ideoque vis illa tangentialis $= \frac{PC \times Ee}{Dd}$.

Sed corporis deſcendentis vis acceleratrix æqualis eſt exceſſui vis tangentialis ſupra reſiſtentiam; erit igitur vis acceleratrix in loco $D = \frac{PC \times Ee}{Dd} - DK$. Ducatur hæc vis in elementum ſpatii D d, & fiet $PC \times Ee - DK \times Dd = v\,dv$, ſi velocitas in loco D ſit *v* (18, 19); & hinc, ſumptis fluentibus, habetur $PC \times GE - BKD = \frac{1}{2} vv$. Fiat $BD = BA$, & ideo $v = 0$, atque $GE = GC - CH = GH$, & erit $PC \times GH - BKAB = 0$, ac proinde $PC \times GH = BKAB$. Q. E. D.

(a) * *Oritur enim differentia illa ex retardatione penduli per reſiſtentiam medii.*

erat areæ *B K T a*. Et area illa, ſi maneat longitudo *a B*, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum *D K*; hoc eſt, in ratione reſiſtentiæ, (b) ideoque eſt ut longitudo *a B* & reſiſtentia conjunctim. Proindeque rectangulum ſub *A a* & $\frac{1}{2}$ *a B* eſt ut *a B* & reſiſtentia conjunctim, & propterea *A a* ut reſiſtentia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde ſi reſiſtentia ſit ut velocitas, differentia ar-

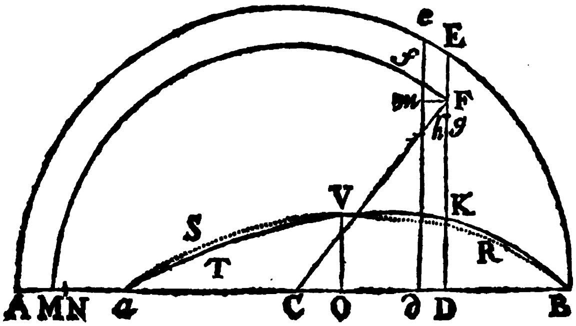
* Dividantur arcus à duobus pendulis deſcripti in partes proportionales infinitè parvas, & totum illud quod deeſt ſingulo arcui, poterit concipi ut effectus retardationum quas corpora paſſa ſunt ſingularum illarum particularum initio, ſpatium verò quod propter ſingulam retardationem deficit, eſt ut illa retardatio & tempus per quod corpus motum fuit poſt illam retardationem receptam uſque ad finem oſcillationis; ſed quoniam in oſcillationibus utut inæqualibus tempora quibus ſimiles arcuum partes deſcribuntur ſunt æqualia, in medio non reſiſtente, & in medio reſiſtente ſaltem quam proximè, (180) ſpatia quæ deficiunt propter retardationes in proportionalibus arcuum partibus receptas, ſunt ut illæ retardationes.

* *Ideo differentia arcuum eſt ut retardatio tota, eique proportionalis reſiſtentia retardans*, ſi quantitates materiæ corporum pendulorum ſint æquales, retardatio in ſingulis arcuum deſcriptorum partibus eſt ut reſiſtentia in iiſdem locis, ſed ut reſiſtentiæ ſunt in datâ quâdam Lege velocitatem ex Hypotheſi & velocitates in arcuum partibus proportionalibus ſunt in Ratione datâ, ideo reſiſtentiæ in ſingulis arcuum partibus proportionalibus ſunt in ratione datâ, ac per conſequens omnes retardationes, ſunt in eâdem ratione, ſummæ ergo retardationum erunt in eâdem ratione datâ, Ergo tota ſpatia deficientia illis retardationibus proportionalia erunt in eâdem ratione, *Differentiæ ergo inter arcum deſcenſu deſcriptum & arcum aſcenſu ſubſequente deſcriptum* in variis arcubus ab eodem corpore deſcriptis, *ſunt in Datâ Lege Reſiſtentiæ.*

183. * *Cor.* 1. Differentiæ arcuum, reſpectu arcuum deſcenſu deſcriptorum eamdem ſequuntur Legem quam reſiſtentiæ ſequuntur reſpectu velocitatum. Nam cùm tempora quibus correſpondentes & proportionales arcuum partes deſcribuntur ſint æqualia, velocitates erunt ſemper ut illæ arcuum partes, ſive ut arcus toti, (180.) quam proximè, ergo reſiſtentiæ, retardationes & differentiæ arcuum eamdem Legem ſequuntur reſpectu arcuum ac reſpectu velocitatum.

Cor. 2. * *Si Corpora pendula differant quantitate materiæ, Differentiæ arcuum ſunt directè in Lege datâ arcuum & inversè ut quantitates materiæ*: Nam eo in caſu retardationes in ſingulis arcuum partibus ſunt directè ut reſiſtentiæ & inversè ut quantitates materiæ; nam reſiſtentia motus jacturam producit, quæ motus jactura eſt factum ex retardatione & maſsâ retardatâ, (per Def. 2. lib. I.).

(b) * *Ideoque eſt ut longitudo a B & reſiſtentia conjunctim.* Area illa ſi maneat longitudo a B, augetur vel diminuitur in ratione reſiſtentiæ D K; ſi verò conſtans maneat reſiſtentia ſeu ordinata D K, ſed augeatur a B omneſque ejus partes d D in ratione totius a B augeantur, area illa augetur vel diminuitur in ratione longitudinis a B; unde ſi longitudo a B variabilis ſit & reſiſtentia ſeu ordinata D K in ſingulis longitudinum a B locis correſpondentibus augeatur vel diminuatur in datâ ratione, area B K T a augebitur vel diminuetur in ratione compoſitâ ex ratione longitudinis a B & ratione reſiſtentiæ auctæ vel diminutæ, proindeque rectangulum ſub A a & $\frac{1}{2}$ a B erit ut a B & reſiſtentia conjunctim, & propterea A a ut reſiſtentia.



arcuum in eodem medio erit ut arcus totus deſcriptus: & contra.

Corol. 2. Si reſiſtentia ſit in duplicatâ ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicatâ ratione arcûs totius: & contra.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi reſiſtentia ſit in triplicatâ vel aliâ quâvis ratione velocitatis, differentia erit in eâdem ratione arcûs totius: & contra.

Corol. 4. Et ſi reſiſtentia ſit partim in ratione ſimplici velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicatâ, differentia erit partim in ratione arcûs totius & partim in ejus ratione duplicatâ: & contra. Eadem erit lex & ratio reſiſtentiæ pro velocitate, quæ eſt differentiæ illius pro longitudine arcûs.

Corol. 5. Ideoque ſi, pendulo inæquales arcus ſucceſſivè deſcribente, inveniri poteſt ratio incrementi ac decrementi differentiæ hujus pro longitudine arcûs deſcripti; habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi reſiſtentiæ pro velocitate majore vel minore.

Scholium Generale.

Ex his propoſitionibus, per oſcillationes pendulorum in mediis quibuſcunque, invenire licet reſiſtentiam mediorum. Aeris

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

verò reſiſtentiam inveſtigavi per experimenta ſequentia. Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{7}{22}$, diametro digitorum *Londinenſium* $6\frac{7}{8}$ fabricatum, filo tenui ab unco ſatis firmo ſuſpendi, ita ut inter uncum & (c) centrum oſcillationis globi diſtantia eſſet pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem & unciâ unâ à centro ſuſpenſionis diſtans; & è regione puncti illius collocavi regulam in digitos diſtinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum à pendulo deſcriptas. Deinde numeravi oſcillationes quibus globus octavam motus ſui partem amitteret. Si pendulum deducebatur à perpendiculo ad diſtantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto ſuo deſcenſu deſcriberet arcum duorum digitorum, totâque oſcillatione primâ, ex deſcenſu & aſcenſu ſubſequente compoſitâ, arcum digitorum fere quatuor: (d) idem oſcillationibus 164 amiſit octavam motûs ſui partem, ſic ut ultimo ſuo aſcenſu deſcriberet arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum quatuor; amiſit octavam motûs partem oſcillationibus 121, ita ut aſcenſu ultimo deſcriberet arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum octo, ſexdecim, triginta duorum vel ſexaginta quatuor; amiſit octavam motûs partem oſcil-

(c) * *Et centrum oſcillationis globi.* Quid ſi centrum oſcillationis & quomodo inveniri poſſit, indicavimus in ſcholio poſt notam 478. lib. I. Et ex his quæ ibi dicta ſunt, ſatis liquet in longioribus pendulis graviori globo inſtructis & filo tenui, centrum oſcillationis cum centro globi coincidere quàm proximè.

(d) * *Idem oſcillationibus 164. amiſit octavam motûs ſui partem, ſic ut ultimo ſuo aſcenſu deſcriberet arcum digiti* $1\frac{3}{4}$.

* Liquet (ex notâ *a* præcedente) quod differentia inter arcum deſcenſu deſcriptum & arcum aſcenſu ſubſequente deſcriptum ſit toti retardationi quam corpus paſſum eſt proportionalis, ideoque motui deſtructo per reſiſtentiæ actionem; aſcendat itaque corpus in fine primæ oſcillationis ad altitudinem qualemcunque, ſumaturque differentia arcûs aſcenſu deſcripti ab arcu deſcenſu primo percurſi: Secundâ oſcillatione corpus aſcendere deberet in vacuo ad eam altitudinem ad quam in fine primæ oſcillationis aſſurrexerat, & ſumatur quod deeſt in ſecundo aſcenſu ab illâ altitudine, duæ illæ differentiæ ſunt ut motus in ſingulâ oſcillatione amiſſi, earum ſumma eſt ergo ut ſumma motûs amiſſi in utraque oſcillatione, ſed duæ illæ differentiæ ſunt differentia inter altitudinem è quâ corpus primò deſcendit, & altitudinem ad quam ultimò aſſurrexit; Ergo ratiocinio ad 164. oſcillationes continuato differentia inter altitudinem è quâ corpus primò deſcendit, & altitudinem ad quam ultimò aſſurrexit, eſt ut ſumma motûs quem reſiſtentia durantibus illis 164. oſcillationibus deſtruere valuit.

oſcillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, reſpectivè. Igitur differentia inter arcus deſcenſu primo & aſcenſu ultimo deſcriptos, erat in caſu primo, ſecundo, tertio, quarto, quinto, ſexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 reſpective. (e) Dividantur eæ differentiæ per numerum oſcillationum in caſu unoquoque, & in oſcillatione unâ mediocri, quâ arcus digitorum $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 deſcriptus fuit, differentia arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum, erit $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes digiti reſpectivè. (f) Hæ autem in majoribus oſcillationibus ſunt in duplicatâ ratione arcuum deſcriptorum quàm proximè, in minoribus verò paulò majores quàm in eâ ratione; & propterea (*per corol.* 2. *prop.* XXXI. *libri hujus*) reſiſten-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

(e) * *Dividantur eæ differentiæ per numerum oſcillationum &c.* Exempli cauſâ, ſi in primo caſu dividatur differentia $\frac{1}{4}$ per numerum oſcillationum 164, habebitur $\frac{1}{656}$ differentia inter arcum deſcenſu deſcriptum & arcum ſubſequente aſcenſu deſcriptum in una mediocri oſcillatione; quia differentia $\frac{1}{4}$ ex omnibus differentiis quæ per oſcillationes 164 producuntur, compoſita eſt; & quia arcus totus unâ mediocri oſcillatione deſcriptus medius eſt arithmeticè inter arcum maximum fere digitorum 4. primâ oſcillatione deſcriptum, & arcum minimum digitorum $2\frac{3}{2}$ ultimâ oſcillatione deſcriptum, ideo arcus ille mediocris invenitur capiendo dimidium ſummæ arcuum $4 + 2\frac{3}{2}$, quod eſt $3\frac{3}{4}$, aut etiam capiendo ſummam arcuum dimidiorum, videlicet $2 + 1\frac{3}{4}$. Atque eodem modo de cæteris ratiocinandum eſt.

(f) * *Hæ autem in majoribus oſcillationibus &c.* * Dividantur omnes arcuum differentiæ in oſcillatione mediocri per primam, omnes illæ differentiæ erunt ut 1.; 2. 7107.; 9. 5072., 36. 9577.; 141. 8378.; 542. 8965.

Quadrata verò arcuum ſunt ut 1, 4, 16, 64, 256, 1024. unde ex eorum numerorum inſpectione liquet differentias quæ in minoribus oſcillationibus obſervatæ ſunt eſſe ad eas quæ in majoribus arcubus obſervantur in majore ratione quàm duplicatâ arcuum; In majoribus verò oſcillationibus rationes illarum differentiarum ad rationem duplicatam arcuum magis accedunt, ut enim arcus in Progreſſione duplâ fuere ſumpti, ratio duplicata arcuum proximorum eſt ratio 1 ad 4, jam verò 9. 5072. eſt non multo major 4â. parte numeri 36. 9577., iſte autem ad 4. partem numeri 141. 8378., magis accedit, propius adhuc iſte accedit ad quartam partem numeri 542. 8965. Unde inter arcus magnos, motus amiſſos in duplicatâ fere ratione arcuum ſive velocitatum ſumi poſſe deducitur. 183.

Idem manifeſtius patebit ſi dividantur hi numeri qui arcuum differentias exprimunt per ipſorum arcuum rationes, habebuntur enim 1.; 1. 3553; 2. 3788; 4. 6197; 8. 8648; 16. 9655, qui ſi reſiſtentiæ forent ut quadrata velocitatum, deberent eſſe ut ipſi arcus $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16. Sed ex ipsâ inſpectione liquet minores differentias majoribus numeris exprimi quam ipſi arcus; majores verò ferè iiſdem. Si verò ſupponeretur reſiſtentiam non tantùm eſſe in ratione duplicatâ velocitatum, ſed etiam partem aliquam aliun-

ſtentia globi, ubi celerius movetur, eſt in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè; ubi tardiùs, paulò major quàm in eâ ratione.

(g) Deſignet jam V velocitatem maximam in oſcillatione quâvis, ſintque A, B, C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum ſit $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$. (h) Cùm velocitates maximæ ſint in cycloide ut ſemiſſes arcuum oſcillando deſcrip-

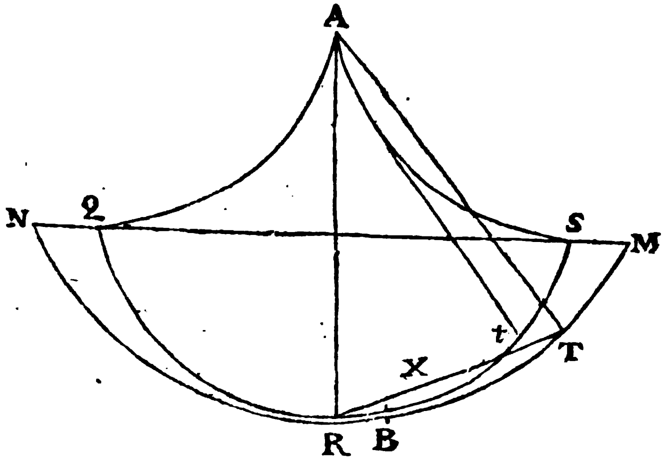
aliunde quàm ex merâ inertiâ materiæ oriundam, eſſe ut velocitas, ideoque cùm hæ quantitates mox inventæ ſint quotientes differentiarum arcuum per velocitates diviſarum, hæ quantitates conſtarent parte conſtante & aliâ parte velocitati ſive arcui proportionatâ.

Sumatur itaque prima quantitas 1, & ordine conferatur cum 2â, tum cùm tertiâ, cum quartâ &c. ſupponaturque illas conſtare duabus partibus altera velocitati proportionata altera conſtanti, v. gr. ſit prima quantitas $1 = a + x$ ſecunda $1.3553 = 2a + x$, iis ita binatim calculatis ut eruatur valor a & x, quantitas conſtans x, in ſingulo calculo eadem non invenietur, ſed varii iſti obtinebuntur valores hoc ordine .6447; .5404; .4829; .4757; .4849, qui decreſcunt ordine quodam regulari (ultimo excepto ob aliqualem exiguum errorem), unde liquet, rationem differentiarum arcuum, non eſſe partim in ratione duplicatâ ipſorum arcuum, & partim in eorum arcuum ratione ſimplici, ſed his adjungi debere rationem aliquam intermediam quàm ſeſquiplicatam arcuum aſſumit *Newtonus*, quod cum experimentis propiùs conſentit.

(g) * *Deſignet jam V velocitatem maximam*, ſive quantitatem velocitati maximæ proportionalem, *in oſcillatione quavis, ſintque A, B, C quantitates* conſtantes, quarum valores per experimenta determinabuntur; & fingamus quòd reſiſtentia, ſeu differentia arcuum ipſi proportionalis (*prop.* XXXI.), ſit partim ut velocitas, partim ut velocitatis quadratum, & partim ut velocitatis dignitas cujus index $\frac{3}{2}$, & proinde *ſupponamus quod arcuum differentia ſit* $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$ *&c.*

(h) * *Cùm velocitates maximæ &c.* Corpus pendulum in medio non reſiſtente oſcilletur in cycloide SBRQ, ſitque A punctum ſuſpenſionis, & R punctum infimum ac medium arcûs totius SRQ. Centro A & radio AR deſcribatur arcus circuli MTRN, in quo corpus idem, vel aliud ſimile & æquale oſcilletur in eodem medio non reſiſtente. Sit TR arcus circularis æqualis arcui cycloidis tR, & RB arcus quàm minimus cycloidi & circulo communis (465. *lib.* I.). Jam ſi corpus è locis T & B ſucceſſivè cadat in circulo, erit ipſius velocitas maxima in R deſcenſu per arcum TR acquiſita, ad velocitatem deſcenſu per arcum BR acquiſitam, ut chorda TXR ad chordam arcûs RB (88. lib. I.), aut, quod idem eſt (*per lemma VII. lib.* I.), ut chorda TXR ad arcum cycloidis BR; & velocitas deſcenſu per arcum BR acquiſita in R eſt ad velocitatem maximam deſcenſu per arcum cycloidis tBR acquiſitam, ut arcus BR ad arcum tBR ſeu arcum circuli æqualem TBR (*per demonſtr. prop. LI. lib.* I.). Quare, ex æquo, velocitas maxima in R deſcenſu per arcum circularem TBR acquiſita eſt ad velocitatem maximam in R deſcenſu per cycloidis arcum tBR acquiſitam, ut chorda RT ad arcum tBR vel TBR. Sunt autem velocitates maximæ in medio reſiſtente velocitatibus maximis in medio non reſiſtente proportionales quàm proximè, & in puncto medio arcuum qui oſcillatione integrâ deſcribuntur, ferè contingunt (180). Paribus igitur arcubus, velocitates maximæ in cycloide ſunt ad velocitates maximas in circulo, ut ſemiſſes

criptorum, in circulo verò ut ſemiſſium arcuum illorum chordæ; ideoque paribus arcubus majores ſint in cycloide quam in circulo, in ratione ſemiſſium arcuum ad eorundem chordas; (i) tempora autem in circulo ſint majora quàm in cycloide



miſſe arcuum oſcillando deſcriptorum ad eorumdem arcuum circularium chordas, quam proximè; & ideo, paribus arcubus majores ſunt in cycloide quàm in circulo in ratione ſemiſſium arcuum ad eorumdem chordas in circulo ductas.

(i) * *Tempora autem in circulo ſunt majora quam in Cycloide in velocitatis ratione reciprocâ.* * Id eſt, tempora in circulo ſunt ad tempus in arcu quovis Cycloidis, ut ſemiſſis arcus circuli oſcillando deſcripti ad ejuſdem ſemiſſis chordam, ſive invertendo & temporum dimidia ſumendo, tempus ſemioſcillationis in Cycloide eſt ad tempus ſemioſcillationis in circulo (pendulis exiſtentibus ejuſdem longitudinis) ut chorda arcus deſcripti ad ipſum arcum, quæ quidem proportio proximè tantùm obtinet.

* Eſt enim tempus oſcillationis integræ cujuſvis in Cycloide ad tempus deſcenſûs per dimidiam penduli longitudinem ut ſemiperipheria ad radium (*vide not.* 470. *ad Prop. LII. lib.* I.) ideoque etiam tempus ſemioſcillationis in cycloide ad tem- 183.
pus illud deſcenſûs per dimidiam penduli longitudinem ut quadrans circuli ad radium, ſed tempus deſcenſûs per quadruplum dimidiæ longitudinis penduli, ſive tempus deſcenſûs per Diametrum circuli cujus pendulum eſt radius, eſt duplum temporis deſcenſûs per dimidiam penduli longitudinem, ideoque tempus ſemioſcillationis in Cycloide eſt ad tempus deſcenſûs per Diametrum circuli cujus longitudo penduli eſt radius, ut circuli quadrans ad Diametrum. Sed, ratio temporis lapſûs per Diametrum circuli ad tempus ſemioſcillationis in arcu ejuſdem circuli eſt (ut mox liquebit) compoſita ex ratione Diametri ad quadrantem circuli & chordæ ad arcum, quàm proximè, unde ex æquo erit tempus in Cycloide ad tempus in circulo ut chorda circuli ad ejus arcum oſcillando deſcriptum. Rationem autem temporis deſcenſûs per Diametrum circuli ad tempus ſemioſcillationis in arcu ejus circuli eſſe cómpoſitam ex ratione Diametri ad qua-

de in velocitatis ratione reciprocâ; patet arcuum differentias (quæ

quadrantem circuli & ex ratione chordæ ad arcum oſcillando deſcriptum, ſaltem quam proximè, ſequenti calculo conſtabit.

Deſcendat itaque corpus per arcum L B centro C deſcriptum & Diametro A B, ſit t tempus quæſitum quo corpus deſcendit per eum arcum L B, ſitque b tempus datum quo corpus labitur per Diametrum A B, & quo velocitate per eum lapſum in B acquiſitâ poſſet deſcribere uniformiter duplum A B ſive 2 A B, ſumatur in arcu L B portiuncula infinitè parva M m quam corpus deſcendens uniformiter deſcribere cenſeatur tempore infinitè parvò dt, ducanturque ex punctis L & M lineæ L H, M E in diametrum perpendiculares; Cùm tempora quibus ſpatia data uniformiter deſcribuntur ſint ut illa ſpatia directè & velocitates quibus percurruntur inversè, ſitque velocitas quæ in B acquiſita eſt per lapſum ex A B ad velocitatem per lapſum ex L in M, ſive ex H in E acquiſitam, ut $\sqrt{AB}$ ad $\sqrt{HE}$, erit $b : dt = \frac{2AB}{\sqrt{AB}} : \frac{Mm}{\sqrt{HE}}$; Dicatur ergo $AB = 1$; $HB = h$, $BE = x$, $EM = y$; $HE = h - x$ erit $b : dt = 2 : \frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$, eſt autem $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ & ex naturâ circuli (cùm ſit $yy = x - xx$, & $2y\,dy = dx - 2x\,dx$, ſive $dy = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-xx}}$) dx invenietur $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm \frac{dx}{2\sqrt{x-xx}}$, & quoniam dum creſcit B E decreſcit L M eſt $Mm = \frac{-dx}{2\sqrt{x-xx}}$, reſolvatur ergo $\frac{1}{\sqrt{x-xx}}$ in ſeriem per formulam *Newtonianam* invenietur $\frac{1}{\sqrt{x-xx}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{2\times 4}$ &c. ideoque M m ſive $\frac{-dx}{2\sqrt{x-xn}} = \frac{1}{2} \times - \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 4}$ &c. Pariter reſolvatur $\frac{1}{\sqrt{h-x}}$ in ſeriem per eamdem formulam erit $\frac{1}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{2\,h^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2}{2\times 4 h^{\frac{5}{2}}}$ &c. $= \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} \times 1 + \frac{x}{2h} + \frac{3x^2}{2\times 4 h^2}$ &c. Ductis ergo per ſe mutuo his ſeriebus

$$\frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}} \times - \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 4} \text{ \&c}$$

$$- \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2h} - \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 2h} - \frac{3x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times 4\times 2h} \text{ \&c.}$$

$$- \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 4h^2} - \frac{3x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times 2\times 4h2} - \frac{3\times 3x^{\frac{7}{2}}dx}{2\times 4\times 2\times 4h^2} \text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

ideoque integralis

$$S.\frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}} \times - 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2\times 3} - \frac{2\times 3x^{\frac{5}{2}}}{2\times 4\times 5} \text{ \&c.}$$

$$- \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2\times 3h^1} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{2\times 2\times 5h} - \frac{2\times 3x^{\frac{7}{2}}}{2\times 4\times 2\times 7h} \text{ \&c.}$$

$$- \frac{2\times 3x^{\frac{5}{2}}}{2\times 4\times 5h^2} - \frac{2\times 3x^{\frac{7}{2}}}{2\times 2\times 4\times 7h^2} - \frac{2\times 3\times 3x^{\frac{9}{2}}}{2\times 4\times 2\times 4\times 9h^2} \text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

Cùm ergo ſit $b : dt = 2 : \frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$ erit $b : t = 2 : S.\frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$, ſed quando t ſit o, tunc eſt $h = x$ ideoque Integralis quæſita in hanc mutatur, (poſito ubique h pro x)

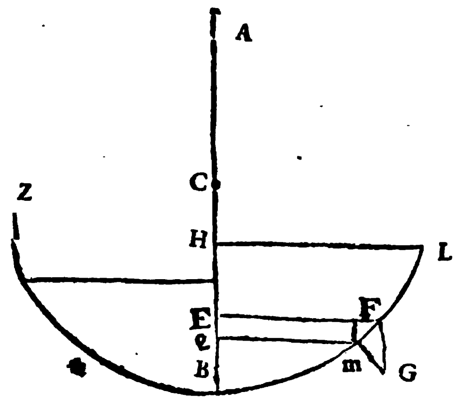
$$S.\frac{Mm}{h-x} = - 1 - \frac{h}{2\times 3} - \frac{3h2}{2\times 4\times 5} \text{ \&c.}$$

$$- \frac{1}{2\times 3} - \frac{h}{2\times 2\times 5} - \frac{3h^2}{2\times 4\times 2\times 7} \text{ \&c.}$$

$$- \frac{3}{2\times 4\times 5} - \frac{3h}{2\times 2\times 4\times 7} - \frac{2\times \ \times 3h^2}{2\times 4\times 2\times 4\times 9} \text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

Ideoque hæc eſt quantitas illa conſtans quæ debet tolli ex valore integralis quæ in proportione $b : t = 2 : S.\frac{M'm}{\sqrt{h-n}}$ pro $S.\frac{Mm}{\sqrt{h-n}}$ adhibetur, quæcumque aſſumatur valor in-



indeterminatæ x; ſed ubi totus arcus L B eſt deſcriptus, tunc x fit o, & evaneſcit prior ſeries $\frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}}\sqrt{} - 2\ x\ \frac{1}{2}$ &c. ergo in eo caſu integralis $S. \frac{Mm}{\sqrt{h - n}}$ eſt æqualis ſoli quantitati illi conſtanti adſumptæ cum ſignis mutatis, ideoque eſt,

$$b : t = 2 : \quad 1 + \frac{h}{2\times3} + \frac{3h2}{2\times4\times5} \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{1}{2\times3} + \frac{h}{2\times2\times5} \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{3}{2\times4\times5} \text{ \&c.}$$
$$\text{\&c.}$$

Jam autem cùm M m, ſit æqualis ſeriei $\frac{1}{2}\times\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} + \frac{dx^{\frac{3}{2}}dx}{2\times4}$ &c. ejus integralis eſt $\frac{1}{2}\times2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2\times3} + \frac{2\times3x^{\frac{5}{2}}}{2\times4\times5}$ &c. $= \sqrt{x}\times1 + \frac{1}{2\times3} + \frac{3x^2}{2\times4\times5}$ &c. in quâ ſi fiat $x = 1$ habebitur ſemiperipheria circuli, & ſi fiat $x = h$ habebitur arcus L B, tumque illæ duæ ſeries in has abibunt

$$1 + \frac{1}{2\times3} + \frac{3}{2\times4\times5} \text{ \&c.}$$
$$\text{\&}\ \sqrt{h}\times1 + \frac{h}{2\times3} + \frac{3h^2}{2\times4\times5} \text{ \&c.}$$

Quæ ſi per ſe mutuò ducantur; earum 183.
factum erit

$$\sqrt{h}\times\ 1 + \frac{h}{2\times3} + \frac{3h^2}{2\times4\times5} \text{ \&c.}$$
$$\frac{1}{2\times3} + \frac{h}{2\times3\times2\times3} \text{ \&c.}$$
$$\frac{3}{2\times4\times5} \text{ \&c.}$$
$$\text{\&c.}$$

Sed termini hujus ſeriei ſaltem primi, iidem ſunt cum terminis ſeriei ſuperius inventæ pro valore $S. \frac{Mm}{\sqrt{h-n}}$, fit ergo arcus L B $= a$, Peripheria circuli cujus Diameter eſt 1 ſit p, erit $\sqrt{h}\times S. \frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{ap}{2}$, ſive $S. \frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{ap}{2\sqrt{h}}$; ſed $\sqrt{h}$ eſt æqualis chordæ L B, ex naturâ circuli, quæ ſi dicatur c, erit $S. \frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{ap}{2c}$. Unde tandem eſt $b : t = 2 : \frac{ap}{2c} = 1 : \frac{ap}{4c} = 1\times c : a\times\frac{p}{4}$ ſive eſt b tempus deſcenſus per Diametrum vel per chordam quamlibet ad t tempus deſcenſus per arcum in ratione compoſitâ ex ratione Diametri 1 ad $\frac{p}{4}$ ſive quadrantem peripheriæ, & ex ratione chordæ c ad arcum a. Q. E. D.

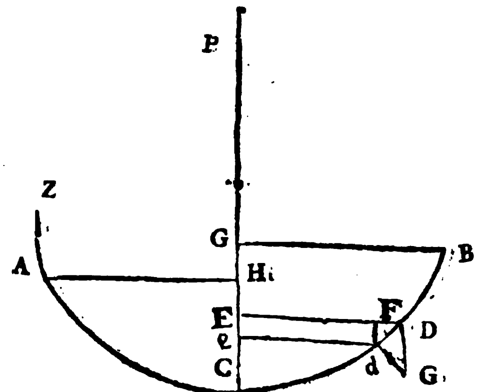
quabitur quàm proximè (z).

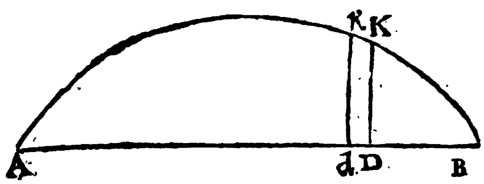
PRO-

ad alteram partem minores erunt; & contra.

181. Sit reſiſtentia in ratione ſeſquiplicatâ velocitatis, id eſt, (*vide fig. not.* 180.) ΔK ut $\Delta E^{\frac{3}{2}}$; & quoniam (ex naturâ circuli) $\Delta E = (BO^2 - \Delta O^2)^{\frac{1}{2}}$, & proinde $\Delta E^{\frac{3}{2}} = (BO^2 - \Delta O^2)^{\frac{3}{4}}$, erit ΔK ut $(BO^2 - \Delta O^2)^{\frac{3}{4}}$, & (*in fig. textûs*) DK ut $(BO^2 - DO^2)^{\frac{3}{4}}$. Dicantur $BO = a$, $VO = b$, $DO = x$, $DK = y$, & erit $b : y = a^{\frac{3}{2}} : (aa - xx)^{\frac{3}{4}}$, ideoque $y = \frac{b(aa - xx)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}}$; & hinc areæ OVKD momentum $ydx = bdx\frac{(aa-xx)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}}$

Quantitas $(aa - xx)^{\frac{3}{4}}$ in ſeriem infinitam reſolvatur (551. *lib.* I.), & invenietur $dx(aa-xx)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{2}}dx - \frac{3x^2dx}{4a^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x^4dx}{4\times8a^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\times5x^6dx}{4\times8\times12a^{\frac{9}{2}}} - \frac{3\times5\times9x^8dx}{4\times8\times12\times16a^{\frac{13}{2}}}$ — &c. Et ſumptis fluentibus $S.dx(aa-xx)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{2}}x - \frac{x^3}{4a^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x^5}{5\times4\times8a^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\times5x^7}{7\times4\times8\times12a^{\frac{9}{2}}} - \frac{3\times5\times9x^9}{9\times4\times8\times12\times16a^{\frac{13}{2}}}$ — &c. $= \frac{50841a^{\frac{5}{2}}}{71680}$, factâ $x = a$, & neglectis, ob parvitatem, cæteris ſeriei terminis. Quare cùm ſit area $OVKD = \frac{b}{a^{\frac{3}{2}}} \times S.dx(aa-xx)^{\frac{3}{4}}$, ſi ponatur $x = a$ erit area $OVKB = \frac{50841}{71680}ba$, & $2OVKB$ ſeu area tota $BKVTa = \frac{50841}{35840}ba = \frac{10}{7}ba$, circiter. Eſt itaque $\frac{10}{7}VO \times BO = Aa \times BO$, & hinc $VO = \frac{7}{10}Aa$; ac propterea corporis oſcillantis reſiſtentia in O ad ipſius gravitatem ut $\frac{7}{10}Aa$ ad longitudinem penduli.





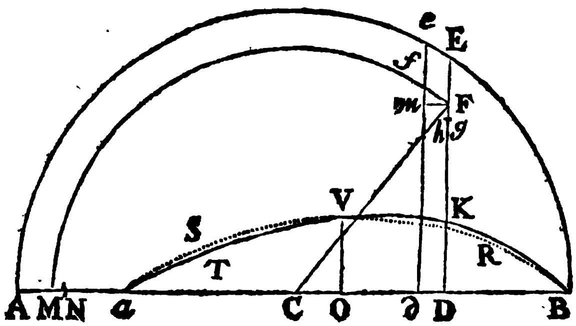
(z) * 182. *Quam proximè.* Propoſitionem 72. lib. 2. Phor. quæ 30ª. hujus libri fere ſimilis eſt, ſed generalis, & demonſtratu facilis, hic adjungemus.

Si curvæ cujuſvis BCZ arcus totus AB, quem grave deſcenſu per BC & ſubſequente aſcenſu per CA in medio reſiſtente deſcribit, extendatur in lineam rectam BA, & ad ſingula hujus rectæ puncta D erigantur perpendicula DK proportionalia medii reſiſtentiis quas mobile in homologis curvæ BCA punctis D ſubit, ſitque BKA curva quam punctum K perpetuo tan-

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXV.

Si corporis oſcillantis reſiſtentia in ſingulis arcuum deſcriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in datâ ratione; differentia inter arcum deſcenſu deſcriptum & arcum ſubſequente aſcenſu deſcriptum, augebitur vel diminuetur in eâdem ratione.

Oritur enim differentia illa (a) ex retardatione penduli per reſiſtentiam medii, ideoque eſt ut retardatio tota eique proportionalis



reſiſtentia retardans. In ſuperiore propoſitione rectangulum ſub rectâ $\frac{1}{2}$ *a B* & arcuum illorum *C B*, *C a* differentia *A a* æqualis

tangit: area curvilinea B K A B æquabitur rectangulo P C × G H ex recta P C, quæ gravitatem conſtantem exponit, in differentiam G H abſciſſarum G C, H C arcuum B C, C A deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum.

Ex punctis D, d infinitè propinquis demittantur ad P C perpendicula D E, d e, & ex puncto d ad E D perpendiculum d F; & vis gravitatis P C erit ad vim tangentialem in loco D, quâ motus corporis in curvâ acceleratur, ut D d ad F d.

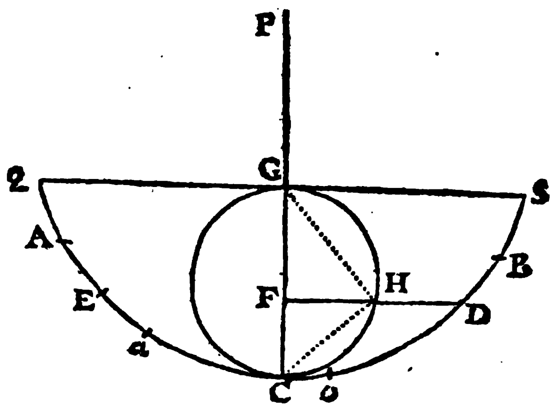
* Nam ducta D G parallela P C & G d in curvam perpendiculari, exprimat D G gravitatis actionem, exprimet D d vim Tangentialem, ſed ob ſimilitudinem Triangulorum D d G, D d F eſt DG : D d = D d : F D, erit ergo D d ad F d ut vis gravitatis ad vim Tangentialem, quapropter cum D d ſumatur ubique æqualis ut eſt actio gravitatis, ubique F d exprimet vim Tangentialem; eſt F d = E e, ſi itaque P C repræſentet vim gravitatis erit D d : E e = P C ad vim Tangentialem, 182.

† ideoque vis illa tangentialis $= \frac{PC \times Ee}{Dd}$.

Sed corporis deſcendentis vis acceleratrix æqualis eſt exceſſui vis tangentialis ſupra reſiſtentiam; erit igitur vis acceleratrix in loco $D = \frac{PC \times Ee}{Dd} - DK$. Ducatur hæc vis in elementum ſpatii D d, & fiet $PC \times Ee - DK \times Dd = v\,dv$, ſi velocitas in loco D ſit v (18, 19); & hinc, ſumptis fluentibus, habetur $PC \times GE - BKD = \frac{1}{2} vv$. Fiat $BD = BA$, & ideo $v = 0$, atque $GE = GC - CH = GH$, & erit $PC \times GH - BKAB = 0$, ac proinde $PC \times GH = BKAB$. Q. E. D.

(a) * *Oritur enim differentia illa ex retardatione penduli per reſiſtentiam medii.*

globus deſcenſu ſuo toto in medio non reſiſtente (p) deſcriberet arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{3}{62}$, idque in cycloide, ad quam motum penduli ſupra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam globus, perpendiculariter cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem arcus illius ſinui verſo æqualem, acquirere poſſet. Eſt autem ſinus ille verſus in cycloide ad arcum iſtum $62\frac{3}{62}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis



(p) * *Deſcriberet arcûs illius partem dimidiam.* Corpus oſcillando deſcribat arcum B a in medio reſiſtente & arcum B A in medio non reſiſtente; ſit C punctum cycloidis infimum; O, punctum medium arcûs B a, & arcûs CD ſit æqualis arcui BO, velocitas maxima deſcenſu corporis per arcum B O acquiſita in medio reſiſtente eſt ad velocitatem maximam per arcum B C acquiſitam in medio reſiſtente ut arcus B O, ad arcum B C (180). Sed ſi corpus è loco D in medio non reſiſtente cadendo deſcribat arcum D C, erit etiam velocitas ipſius in C deſcenſu per arcum D C acquiſita ad velocitatem acquiſitam ibidem deſcenſu per arcum B C ut arcus C D, vel æqualis B O ad arcum B C, (*pr. p.* 51. *lib.* 1). Ergò velocitas in medio reſiſtente per arcum B O acquiſita in O æqualis eſt velocitati quam corpus in medio non reſiſtente cadendo per arcum D C = B O haberet in C; & propterea (85. *lib.* 1. velocitas illa æqualis eſt velocitati quam corpus perpendiculariter cadendo in medio non reſiſtente, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem F C æqualem ſinui verſo arcûs CD, acquirere poſſet. Sit jam P punctum ſuſpenſionis, P C longitudo penduli S D C ſemicyclois, S G & D F ad P C normales, & C H G C circulus diametro G C deſcriptus ſecans D F in H. Jungatur chorda C H, & erit arcus cycloidis S D = 2 G C — 2 C H, & arcus S E = 2 G C (462. *lib.* 1.) ideóque arcus D C = 2 C H. Eſt autem (ex naturâ circuli) C F ad C H ut C H ad C G, & hinc C F ad 2 C H ſeu D C, ut 2 C H ad 4 C G, ſivè ut D C ad 2 P C; Hoc eſt, ſinus verſus C F, ad arcum C D, ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam.

lis digitis 15, 278. Quare velocitas ea ipſa eſt quam corpus cadendo & caſu ſuo ſpatium 15, 278 digitorum deſcribendo acquirere poſſet. Tali igitur cum velocitate globus reſiſtentiam patitur, quæ ſit ad ejus pondus ut 0, 61705 ad 121, vel (ſi (q) reſiſtentiæ pars illa ſola ſpectetur quæ eſt in velocitatis ratione duplicatâ) ut 0, 56752 ad 121.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VI. Prop. XXXI. Theor. XXV.

(r) Experimento autem hydroſtatico inveni quod pondus globi hujus lignei eſſet ad pondus globi aquei magnitudinis ejuſdem ut 55 ad 97: & propterea cum 121 ſit ad 213, 4 in eâdem ratione, erit reſiſtentia globi aquei præfatâ cum velocitate progredientis (ſ) ad ipſius pondus ut 0, 56752 ad 213, 4, id eſt, ut 1 ad $376\frac{1}{50}$. Unde cùm pondus globi aquei, quo tempore globus cum velocitate uniformiter continuatâ (t) deſcribat longitudinem digitorum 30, 556, velocitatem illam omnem in globo cadente generare poſſet; (u) manifeſtum eſt quod vis reſiſtentiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem minorem in ratione 1 ad $376\frac{1}{50}$, hoc eſt, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$.

Et

(q) * *Si reſiſtentiæ pars illa ſola &c.* Si enim in quantitate, 0, 0022169 V^2 quæ eſt ad longitudinem penduli ut reſiſtentiæ pars velocitatis quadrato proportionalis ad corporis pondus loco V ſcribatur 16, & loco V^2 ſcribatur 256, fiet 0, 0022169 V^2 = 0, 56752, quamproximè.

(r) * *Experimento autem hydroſtatico.* Experimentum facile eſt. Cùm enim corpus fluido immerſum, eâdem vi ſurſum urgeatur quâ par fluidi volumen ſuſtinetur, id eſt, vi quæ æqualis eſt ponderi fluidi ejuſdem magnitudinis (*cor.* 5. & 6. *prop.* 20. *lib. hujus*) corpus fluido ſpecificè leviori immerſum ponderis ſui partem amittet æqualem ponderi fluidi ejuſdem voluminis; & propterea ſi corpus illud fluido immerſum ponderetur, cognoſcetur pondus fluidi ejuſdem magnitudinis cum corpore. Si fluidum corpore immergendo ſpecificè gravius ſit, corpori illi adjungi poteſt aliud corpus majoris gravitatis ſpecificæ ut eorum ſumma fluido ſpecificè gravior fiat. 183.

(ſ) *Ad ipſius pondus.* Reſiſtentia globi ſolidi æqualis eſt reſiſtentiæ globi aquei ejuſdem magnitudinis & cum eâdem velocitate in eodem medio progredientis, ſed reſiſtentia globi ſolidi eſt ad ejuſdem pondus ut 0, 56752 ad 121, & pondus globi ſolidi ad pondus globi aquei ut 121 ad 213. 4, ſeu ut 1 ad $376\frac{1}{50}$ quamproximè.

(t) * *Deſcribat longitudinem digit.* 30, 556, duplam nimirum longitudinis digitorum 15. 278, quæ velocitatem illam omnem in globo cadente generare poſſet (29. lib. 1.).

(u) * *Manifeſtum eſt.* Sunt enim velocitates dato tempore genitæ vel extinctæ, ut vires quibus generantur vel extinguuntur (13. *lib.* 1.).

Et propterea quo tempore globus, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ, longitudinem ſemidiametri ſuæ, ſeu digitorum $3\frac{7}{16}$, deſcribere poſſet, (x) eodem amitteret motûs ſui partem $\frac{1}{3342}$.

Numerabam etiam oſcillationes quibus pendulum quartam motûs ſui partem amiſit. In ſequente tabulâ numeri ſupremi denotant longitudinem arcûs deſcenſu primo deſcripti, in digitis & partibus digiti expreſſam: numeri medii ſignificant longitudinem arcûs aſcenſu ultimo deſcripti; & loco infimo ſtant numeri oſcillationum. Experimentum deſcripſi tanquam magis accuratum quàm cùm motûs pars tantùm octava amitteretur. (y) Calculum tentet qui volet.

Deſ-

(x) * *Eodem amitteret motûs ſui partem.* Nam velocitates eâdem vi conſtante vel extinctæ ſunt ut tempora quibus generantur vel extinguuntur (13. *lib.* 1.), ſed tempora quibus corpora duo eâdem velocitate uniformi percurrunt longitudines digit. 30,556, & digit. $3\frac{7}{16}$, ſunt ut hæ longitudines (5. *lib.* 1.). Quarè velocitates amiſſæ ſunt ut eædem longitudines, & ideò 30,556 ad $3\frac{7}{16}$, ut $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$ ad velocitatem amiſſam eo tempore quo globus longitudinem ſemidiametri ſuæ ſeu digit. $3\frac{7}{16}$, percurrit; undè invenitur velocitas illa amiſſa $= \frac{1}{3342}$, quamproximè.

(y) * *Calculum tentet.* Quoniam experimentum magis accuratum eſt, calculum tentabimus. Erunt igitur differentiæ arcuum primo deſcenſu & ultimo aſcenſu deſcriptorum.

$\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16.

Arcus in unâ mediocri oſcillatione decripti, ſunt

$3\frac{1}{2}$, 7, 14, 28, 56, 112.

Differentiæ arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu in unâ mediocri oſcillatione deſcriptorum, ſunt

$\frac{\frac{1}{2}}{374}$, $\frac{1}{272}$, $\frac{2}{162\frac{1}{2}}$, $\frac{4}{83\frac{1}{3}}$, $\frac{8}{41\frac{2}{3}}$, $\frac{16}{22\frac{2}{3}}$

ſive ut 1. 2. 7500; 9. 2061; 35. 5040; 143. 7760; 528. 5882

Hæ autem differentiæ in majoribus oſcillationibus ſunt in duplicatâ ratione arcuum deſcriptorum ſatis proximè; Nam $\frac{8}{41\frac{2}{3}} : \frac{16}{22\frac{2}{3}} = 34 : 125$, & $34 : 126 = 1 : 4$; hoc eſt, in duplicatâ ratione arcuum deſcriptorum. Et ſimiliter $\frac{4}{83\frac{1}{3}} : \frac{8}{41\frac{2}{3}} = 1 : 4$, accuratè; in minoribus verò oſcillationibus, differentiæ illæ ſunt in ratione paulò majore quam duplicatâ arcuum deſcriptorum. Eſt enim $\frac{1}{272} : \frac{1}{162\frac{1}{2}} = 325 : 1088$ & hæc ratio major eſt ratione 1 ad 4. Deſignet jam V, ut ſupra, velocitatem maximam in oſcillatione quâvis, & $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$, differentiam arcuum; & quoniam velocitates ponendæ ſunt arcubus deſcriptis ſcil. numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, analogæ, ſcribamus in caſ. 2°. 4°. & 6°. numeros 1, 4, 16, pro V, & prodibit arcuum differentia $\frac{1}{272} = A + B + C$ in caſ. 2°. $\frac{4}{83\frac{1}{3}} = 4A + 8B + 16C$ in caſ.

Deſcenſus primus	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oſcillat.	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Poſtea globum plumbeum diametro digitorum 2, & pondere unciarum *Romanarum* $26\frac{1}{4}$ ſuſpendi filo eodem, ſic ut inter centrum globi & punctum ſuſpenſionis intervallum eſſet pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam oſcillationes quibus data motûs pars amitteretur. Tabularum ſubſequentium prior exhibet numerum oſcillationum quibus pars octava motûs totius ceſſavit: ſecunda numerum oſcillationum quibus ejuſdem pars quarta amiſſa fuit.

Deſ-

caſ. 4°. & $\frac{16}{22\frac{1}{3}} = 16A + 64B + 256C$ in caſ. 6°. Ex his æquationibus habetur $A = 0{,}0005096$, $B = 0{,}0005884$, & $C = 0{,}0025784$. Eſt igitur differentia arcuum ut $0{,}0005096\,V + 0{,}0005884\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0025784\,V^2$, & propterea cùm reſiſtentia globi in medio arcûs oſcillando deſcripti ubi velocitas eſt V, ſit ad ipſius pondus ut $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli, fiet reſiſtentia globi ad ejus pondus ut $0{,}0003243\,V + 0{,}0004119\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0019338\,V^2$, ad longitudinem penduli inter centrum ſuſpenſionis & regulam, id eſt, ad 121 digit. Unde cùm V in caſ. 2°. deſignet 1; in 4°. 4, in 6°. 16; erit reſiſtentia ad pondus globi in caſ. 2°. ut 0,0267 ad 121; in 4°. ut 0,0355332 ad 121; in 6°, ut 0,5266032 ad 121.

Ponatur reſiſtentia in tardioribus motibus partim uniformis & partim velocitati, partim velocitatis quadrato proportionalis, ideòque arcuum differentia ſit $A + BV + CV^2$, & ſcribamus in caſ. 1°. 2°. & 3°. numeros 1, 2, 4, pro V, prodibunt æquationes $A + B + C = \frac{1}{748}$, $A + 2B + 4C = \frac{1}{272}$, & $A + 4B + 16C = \frac{4}{323}$, ex quibus eruitur $A = 0{,}00034$ [illegible] $B = 0{,}0003255$, & $C = 0{,}0006714$; & proptereà cùm (*per cor. prop.* 30.) reſiſtentia globi in medio arcûs oſcillando deſcripti, ubi velocitas eſt V, ſit ad ipſius pondus ut $\frac{1}{2}A + \frac{7}{11}BV + \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli; ſi pro A, B, & C, ſcribantur numeri inventi, ſint reſiſtentia globi ad ejus pondus ut $0{,}00017 + 0{,}0002071\,V + 0{,}0005035\,V^2$ ad 121, id eſt, in 1°. caſ. ut 0,0008806 ad 121; in 2°. caſ. ut 0,0025982 ad 121; in 3°. caſ. ut 0,0090544, ad 121; reſiſtentia verò uniformis erit ad pondus globi ut 0,00017 ad 121, ſeu ut 1, ad 735294. 183.

Deſcenſus primus	1	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Numerus Oſcillat.	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

Deſcenſus primus	1	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oſcillat.	510	518	420	318	204	121	70

In tabulâ priore ſeligendo ex obſervationibus tertiam, quintam & ſeptimam, & exponendo velocitates maximas in his obſervationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 reſpectivè, & generaliter per quantitatem V ut ſupra: emerget in obſervatione tertiâ $\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$, in quintâ $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$, in ſeptimâ $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$. Hæ verò æquationes reductæ dant A = 0,001414, B = 0,000297, C = 0,000879. Et inde prodit reſiſtentia globi cum velocitate V moti in eâ ratione ad pondus ſuum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0{,}0009\,V + 0{,}000208\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}000659\,V^2$ ad penduli longitudinem 121 digitorum. Et ſi ſpectemus eam ſolummodo reſiſtentiæ partem quæ eſt in duplicatâ ratione velocitatis, hæc erit ad pondus globi ut $0{,}000659\,V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars reſiſtentiæ in experimento primo ad pondus globi lignei unciarum $57\frac{7}{22}$ ut $0{,}002217\,V^2$ ad 121: (z) & inde fit reſiſtentia globi lignei ad reſiſtentiam globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{22}$ in 0,002217 ad $26\frac{1}{4}$ in

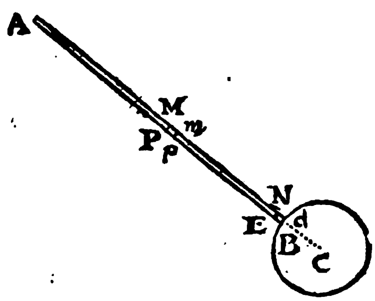
(z) *Et indè fit reſiſtentia.* Eſt enim (*ex dem.*) reſiſtentia globi lignei $57\frac{7}{22} \times \frac{0{,}002217}{121}$; & reſiſtentia globi plumbei $26\frac{1}{4} \times \frac{0{,}000659}{121}$, ideóque reſiſtentia globi lignei ad reſiſtentiam globi plumbei ut $57\frac{7}{22} \times 0{,}002217$ ad $26\frac{1}{4} \times 0{,}000659$ id eſt, $7\frac{1}{3}$ ad 1.

in o, 000659, id eſt, ut $7\frac{1}{3}$ ad 1. Diametri globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ & 2 digitorum, & harum quadrata ſunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, ſeu $11\frac{13}{16}$ & 1 quamproximè. Ergo reſiſtentiæ globorum æquivelocium erant in minore ratione quàm duplicatâ diametrorum. ([a]) At nondum conſideravimus reſiſtentiam fili, quæ certè permagna erat, ac de pendulorum inventâ reſiſtentiâ ſubduci debet. Hanc accuratè definire non potui, ſed majorem tamen inveni quàm partem tertiam reſiſtentiæ totius minoris penduli; & inde didici quod reſiſtentiæ

(a) 184. *At nondum conſideravimus* &c.

PROBLEMA.

Fili tenſi oſcillantis reſiſtentiam invenire in medio cujus reſiſtentia eſt ut velocitatis & diametri globi quadrata conjunctim.



Filum cylindricum homogeneum A B, circà punctum A, oſcilletur, ſitque ejus longitudo $AB = a$, diameter $EN = 2b$, globi C, diameter $= 2r$, longitudo variabilis $AP = x$, $Pp = dx$; & cylindruli evaneſcentis P M, velocitas erit ut diſtantia A P, ejuſque proindè reſiſtentia ut $xxdx$, ſive ut altitudo cylindruli P p & quadratum velocitatis conjunctim; & hinc, ſumptâ fluente, reſiſtentia fili A P, fit ut $\frac{1}{3}x^3$, & totius fili A B reſiſtentia ut $\frac{1}{3}a^3$. Capiatur in B, cylindrulus B N, cujus altitudo B E ſit æqualis diametro fili E N, ſeu $2b$, & reſiſtentia fili A E, erit ut $\frac{1}{3}(a-2b)^3$, ideoque cylindri B N reſiſtentia ut $\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}(a-2b)^3$. Eſt igitur reſiſtentia fili totius A B, ad reſiſtentiam cylindri B N, ut a^3 ad $a^3 - (a-2b)^3$; ſed ut infra prop. 34. demonſtrabitur, cylindri B N reſiſtentia eſt ad reſiſtentiam globuli huic cylindro inſcripti ut 2 ad 1, & reſiſtentia globuli hujus eſt ad reſiſtentiam globi C, in ratione quamproxime compoſitâ ex ratione quadrati diametri E N, ad quadratum diametri 2 B C; & ratione quadrati velocitatis globuli ad quadratum velocitatis globi C hoc eſt, ut $bb(a-b)^2$ ad $rr(a+r)^2$. Quarè (per compoſitionem rationum & ex æquo) reſiſtentia fili A B, eſt ad reſiſtentiam globi C, ut $2a^3bb(a-b)^2$, ad $a^3rr(a+r)^2 - rr(a+r)^2 \times (a-2b)^3$, ſeu ponendo $a+r=c$, ut $a^3b(a-b)^2$ ad $3a^2rrcc - 6abrrcc + 4bbrrcc$; & hinc reſiſtentia fili ad reſiſtentiam totius penduli ut $a^3b(a-b)^2$, ad $a^3b(a-b)^2 + rrcc(3aa - 6ab + 4bb)$ Q. E. I. 184.

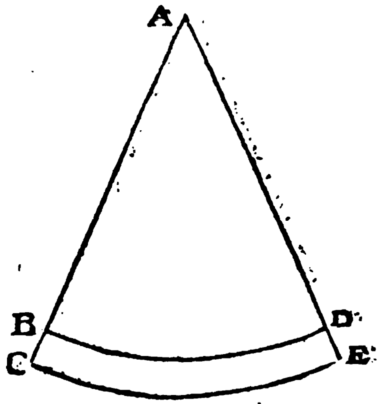
185. *Coroll.* Si fili ſemidiameter b, ſit admodum exigua reſpectu longitudinis ejuſdem a, erit ferè $3aa - 6ab + 4bb = 3aa - 6ab + 3bb = 3(a-b)^2$. Quare fili reſiſtentia erit ad reſiſtentiam globi ut a^3b ad $3rrcc$, & ad reſiſtentiam totius penduli ut a^3b ad $a^3b + 3rrcc$. Exempli causâ. Sit $c = 126$. digit. $r = 1$ digit. $a = 125$ digit. $b = \frac{1}{100}$ digit. & reſiſtentia fili erit ad reſiſtentiam totius penduli ut 1953125 ad 4762800, ſeu ut 1 ad 2,438 quamproximè.

186. In-

tiæ globorum, demptâ fili reſiſtentiâ, ſunt quam proxime in duplicatâ ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, ſeu $10\frac{1}{2}$ ad 1 non longe abeſt à diametrorum ratione duplicata $11\frac{13}{16}$ ad 1.

Cùm reſiſtentia fili in globis majoribus minoris ſit momenti, tentavi etiam experimentum in globo cujus diameter erat $18\frac{3}{4}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis erat digitorum $122\frac{1}{2}$, inter punctum ſuſpen-

186. Inveniri etiam poteſt pars illa reſiſtentiæ fili quæ uniformis eſt, quæque in tardioribus motibus obſervatur; poſito quod uniformis illa reſiſtentia fili ſit ad uniformem reſiſtentiam globi, ut ſpatium ſolidum quod filum oſcillando deſcribit ad ſpatium ſolidum quod deſcribit globus. Filum cylindricum A B oſcillatione unâ deſcribat ſpatium ſolidum ſeu priſma cujus baſis eſt ſector circularis A B D, & altitudo diameter fili, interea dum globi centrum C, deſcribit arcum C E, diameter fili dicatur 2 R, & ſpatium à filo deſcriptum erit $R \times AB \times BD$; ſpatium verò a globo deſcriptum eſt factum ex area circuli cujus radius B C, in arcuum C E quem centrum C deſcribit; ſeu eſt $\frac{22}{7} BC^2 \times CE$. Quarè uniformis reſiſtentia fili eſt ad uniformem reſiſtentiam globi ut $R \times AB \times BD$ ad $\frac{22}{7} BC^2 \times CE$, hoc eſt, ob rectas A B, A C arcubus B D, C E proportionales, ut $R \times {}^{2}AB^{2}$ ad $\frac{22}{7} BC^2 \times AC$, totaque uniformis reſiſtentia penduli ad uniformem reſiſtentiam globi ut $R \times AB^2 + \frac{22}{7} BC^2 \times AC$ ad $\frac{22}{7} BC^2 \times AC$.



Exempli causâ. Sit $R = \frac{1}{100}$ digit. $AC = 126$ digit. $BC = 3\frac{7}{16}$, $AB = 122\frac{9}{16}$ ut in experimentis primo ac ſecundo, & invenietur uniformis reſiſtentia fili ad uniformem reſiſtentiam globi ut 1 ad 31 circiter, & ideo reſiſtentia fili eſt reſiſtentiæ totius penduli pars $\frac{1}{32}$. Cùm igitur ſupra inventa ſit reſiſtentia uniformis ad pondus globi lignei ut 1 ad 735294, ſubductâ reſiſtentiâ fili, erit uniformis reſiſtentia globi lignei ad ejuſdem pondus unciar. Rom. $57\frac{7}{22}$ ut 1 ad 760000 circiter. Quæramus nunc reſiſtentiam uniformem globi plumbei in ultimo experimento. Mediocres arcuum differentiæ in primâ tabulâ ſumptæ ſunt in caſ. 1°. 2°. & 3°. $\frac{1}{1808}$, $\frac{1}{912}$, & $\frac{1}{386}$, reſpectivè. Loco V, in quantitate $A + BV + CV^2$, ſcribantur ſucceſſivè numeri 1, 2, & 4, & prodi-

penſionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli deſcenſu à nodo deſcriptus 32 dig. Arcus aſcenſu ultimo poſt oſcillationes quinque ab eodem nodo deſcriptus 28 dig. Summa arcuum ſeu arcus totus oſcillatione mediocri deſcriptus 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. (b) Ejus pars decima ſeu differentia inter deſcenſum & aſcenſum in oſcillatione mediocri $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oſcillatione mediocri à nodo deſcriptus ad arcum totum $67\frac{1}{8}$ dig. oſcillatione mediocri à centro globi deſcriptum; & ita dif-

dibunt æquationes $A + B + C = \frac{1}{1808}$; $A + 2B + 4C = \frac{1}{912}$, & $1A + 4B + 16C = \frac{1}{386}$, ex quibus habetur $A = 0{,}0001455$ $B = 0{,}0004076$, & $C = 0{,}0000679$. Unde reſiſtentia uniformis eſt ad pondus globi unciar. Rom. $26\frac{1}{4}$ ut $\frac{1}{2}A$ ſeu 0,0000728 ad 121, id eſt, ut 1 ad 1662088. Jam verò cùm in hoc experimento ſit AC = 126 digit. BC = 1; AB = 125, ſi ponatur $R = \frac{1}{100}$ digit. invenitur uniformis reſiſtentia fili ad reſiſtentiam uniformem globi ut 15625 ad 39600, ſivè ferè ut 2 ad 5; & ideò fili reſiſtentia totius reſiſtentiæ uniformis partes continet $\frac{2}{7}$. Quarè uniformis reſiſtentia globi plumbei eſt ad ejus pondus unciar. Rom. $26\frac{1}{4}$ ut 1 ad 2326923 circiter; & hinc uniformis reſiſtentia globi plumbei cujus diameter eſt digit. 2, eſt ad ad reſiſtentiam globi lignei uniformem cujus diameter eſt digit. $6\frac{7}{8}$ ut $26\frac{1}{4} \times 760000$ ad $57\frac{7}{22} \times 2326923$, hoc eſt, ut 19950000 ad 133374995 ſivè ut 1 ad 6,685.

Verùm ſi ponatur reſiſtentia partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis, reſiſtentia globi lignei invenitur eſſe ad ejuſdem pondus $57\frac{7}{22}$ unciar. 186. Rom. in ratione 1 ad 450000 circiter, & reſiſtentia uniformis globi plumbei ad ejus pondus $26\frac{1}{4}$ unciar. in ratione 1, ad 910900 per tabulam primam; & in ratione 1, ad 1021097 per tabulam ſecundam ultimi experimenti; undè ſumptâ mediocri ratione, reſiſtentia uniformis globi plumbei eſt ad pondus $26\frac{1}{4}$ unciar. ut 1 ad 966000 circiter. Et ideò, in hâc reſiſtentiæ Hypotheſi, uniformis reſiſtentia globi plumbei cujus eſt diameter digit. 2, eſt ad reſiſtentiam uniformem globi lignei cujus diameter eſt digit. $6\frac{1}{8}$, ut $26\frac{1}{4} \times 450000$ ad $57\frac{7}{22} \times 966000$ ſeu ut 1, ad 4,687, circiter.

(b) * *Ejus pars decima.* Si oſcillatio ex itu & reditu penduli, ſeu ex bino deſcenſu binoque aſcenſu componatur, quinque oſcillationes ſic acceptæ æquivalent oſcillationibus decem quarum ſingulæ ex uno tantùm deſcenſu unoque aſcenſu conſtant. Priore ſignificatione NEWTONUS oſcillationes quinque, de quibus hic loquitur, accepiſſe videtur, ut potè qui differentiam 4 digit. Per N. 10 dividit ut differentiam inveniat inter arcus deſcenſu uno & ſubſequente aſcenſu deſcriptos in unâ mediocri oſcillatione ex deſcenſu uno unoque aſcenſu compoſitâ.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

differentia $\frac{2}{3}$ ad differentiam novam 0, 4475. ([c]) Si longitudo penduli, manente longitudine arcûs deſcripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$; tempus oſcillationis augeretur, & velocitas penduli diminueretur in ratione illâ ſubduplicatâ, maneret verò arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum differentia 0, 4475. Deinde ſi arcus deſcriptus augeretur in ratione $124\frac{3}{31}$ ad $67\frac{1}{8}$, differentia iſta 0, 4475 ([d]) augeretur in duplicatâ illa ratione, ideoque evaderet 1, 5295. Hæc ita ſe haberent, ex hypotheſi quod reſiſtentia penduli eſſet in duplicatâ ratione velocitatis. Ergo ſi pendulum deſcriberet arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, & longitudo ejus inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis eſſet 126 digitorum, differentia arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum foret 1, 5295 digitorum. Et hæc differentia ducta in pondus globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 318, 136. Rurſus ubi pendulum ſuperius ex globo ligneo conſtructum centro oſcillationis, quod à puncto ſuſpenſionis digitos 126 diſtabat, deſcribebat arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, differentia arcuum deſcenſu & aſcenſu deſcriptum ([e]) fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$, quæ ducta

(c) * *Si longitudo penduli*, in medio non reſiſtente *augeretur in ratione* 126 *ad* 122 $\frac{1}{2}$, *tempus oſcillationis*, ob datam globi ſune penduli maſſam & pondus, *augeretur in ratione illâ ſubduplicatâ* (*per cor. 6. prop.* 24.) quod etiam in medio reſiſtente verum eſt quam proximè (180).

* Mutatâ longitudine penduli & manente longitudine arcûs deſcripti, velocitas penduli diminuetur in ratione ſubduplicatâ longitudinis penduli, (ideoque inversè ut tempus); Nam velocitates deſcenſu per arcus quoſvis acquiſitæ ſunt in ratione ſubduplicatâ abſciſſarum illis arcubus correſpondentium; Chordæ verò pro quibus arcus ſumere hic liceat, ſunt mediæ proportionales inter abſciſſas ſuas & circulorum Diametros, ſi ergo ſumantur arcus æquales in circulis inæqualibus, abſciſſæ eorum arcuum erunt inversè ut Diametri circulorum ſive inversè ut eorum Radii, hoc eſt inversè ut longitudines pendulorum, ergo velocitates quæ ſunt in ratione ſubduplicatâ abſciſſarum, erunt in ratione ſubduplicatâ inverſâ longitudinum pendulorum; Cùm ergo arcuum differentiæ ſint ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim, reſiſtentiaque ſit ut quadratum velocitatis; ſitque quadratum velocitatis inversè ut longitudo pendulorum; & quadratum temporis directè ut longitudo pendulorum, compenſatis rationibus manebunt eædem arcuum differentiæ, ſi mutatâ pendulorum longitudine arcus æquales deſcribantur.

(d) * *Augeretur in duplicatâ illâ ratione.* (Per cor. 2. prop. 31.).

(e) * *Fuit* $\frac{126}{121}$ *in* $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$. Cùm enim in caſ. 6°. experimenti primi penduli ſeu fili,

ducta in pondus globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{22}$, producit 49, 396. Duxi autem differentias haſce in pondera globorum, ut invenirem eorum reſiſtentias. Nam differentiæ oriuntur ex reſiſtentiis, (f) ſuntque ut reſiſtentiæ directè & pondera inversè. Sunt igitur reſiſtentiæ ut numeri 318, 136 & 49, 396. Pars autem reſiſtentiæ globi minoris, quæ eſt in duplicatâ ratione velocitatis, erat ad reſiſtentiam totam ut 0,56752 ad 0,61675, id eſt, ut 45,453 ad 49,3965 & pars reſiſtentiæ globi majoris propemodum æquatur ipſius reſiſtentiæ toti; ideoque partes illæ ſunt ut 318, 136 & 45,453 quamproximè, id eſt, ut 7 & 1. Sunt autem globorum diametri $18\frac{3}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{17}{64}$ ſunt ut 7,438 & 1, id eſt, ut globorum reſiſtentiæ 7 & 1 quamproximè. Differentia rationum haud major eſt, quam quæ ex fili reſiſtentiâ oriri potuit. Igitur reſiſtentiarum partes illæ quæ ſunt, paribus globis, ut quadrata velocitatum, ſunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum globorum.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

Cæterum globorum, quibus uſus ſum in his experimentis; maximus non erat perfectè ſphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quaſdam brevitatis gratiâ neglexi; de calculo accurato in experimento non ſatis accurato minimè ſollicitus. Optarim itaque, (g) cùm demonſtratio vacui ex his dependeat, ut experimenta cum globis & pluribus & majoribus & magis accu-

fili ad nodum uſquè longitudo eſſet 121 digit. arcus deſcriptus erat $119\frac{5}{29}$ digit. & arcuum differentia $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ digit. Et mutatâ penduli longitudine in ratione 126 ad 121, arcus deſcriptus & differentia mutantur in eâdem ratione, fiebatque proindè arcus $\frac{126}{121} \times 119\frac{5}{29}$, ſeu $124\frac{3}{31}$ digit. & differentia $\frac{126}{121} \times \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ digit.

(f) * *Suntque ut reſiſtentiæ directè & pondera inversè.* Nam, *per cor. prop.* 30.) differentiæ illæ in datos numeros ductæ ſunt ad penduli longitudinem, ut reſiſtentia ad gravitatem ſeu pondus globi penduli; data igitur penduli longitudine, differentiæ illæ ſunt ut reſiſtentiæ directe & pondera iuverſè.

186.

(g) 187. * *Cùm demonſtratio vacui &c.* Utrum reſiſtentia quam in motis corporibus experimur, tota ſit in eorum externâ ſuperficie, an verò partes etiam internæ in ſuperficiebus propriis reſiſtentiam notabilem ſentiant, experimentis globorum in medio reſiſtente oſcillantium inveniri poteſt. Nam ſi, exempli causâ, globorum in dato medio paribus velocitatibus motorum reſiſtentiæ ſemper eſſent in

accuratis tentarentur. Si globi ſumantur in proportione geometricâ, putà quorum diametri ſint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progreſſione experimentorum colligetur quid in globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam verò conferendo reſiſtentias diverſorum fluidorum inter ſe, tentavi ſequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aquâ fontanâ, fecique ut immerſa pendula in medio aquæ oſcillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{6}$ unciarum, diametro $3\frac{5}{8}$ digitorum movebatur ut in tabulâ ſequente deſcripſimus, exiſtente videlicet longitudine penduli à puncto ſuſpenſionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oſcillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

Ar-

in duplicatâ diametrorum ratione, inſenſibilis foret in partibus internis reſiſtentia; cum enim reſiſtentia illa interna à numero, magnitudine, figurâ & texturâ internarum partium penderet, non poſſet eadem conſtanter manere in globis æqualibus & heterogeneis, ligneis v. g. & plumbeis, nec in globis inæqualibus externarum ſuperficierum, ſed potiùs ſolidorum rationem ſequeretur. Porrò ſuperioribus experimentis jam probatum eſt in velocioribus globorum motibus, reſiſtentias quadratis diametrorum proportionales eſſe quam proxime; concludendum igitur eſt nullam eſſe notabilem in partibus corporum internis reſiſtentiam, quod tamen deinceps pluribus aliis argumentis demonſtrabit NEWTONUS. Verum ſi medium quoddam æthereum vel longe ſubtiliſſimum omnes omnium corporum poros & meatus repleret, propter medii illiusætherei ſummam denſitatem atque inertiam omni materiæ propriam, partes internæ corporum per magnam reſiſtentiam ſentirent. At qui *Carteſianum* mundi pleni ſyſtema emendarunt noviſque inventis ornarunt eruditiſſimi ſagaciſſimique Mathematici, ii, repudiatis veteribus effugiis, quibus *Carteſianorum* vulgus utitur, ex ſubtilitate ac mobilitate ætheris & pororum quibus corpora omnia pertuſa ſunt diſpoſitione petitis, hoc unum reſponſum proferunt, æthercam materiam corporum gravium motibus minime reſiſtere, quod ſit omni gravitate deſtituta. Duplicis itaque generis materiam in univerſo diſtinguunt, gravem alteram cujus partes in vorticulos diviſæ non ſunt, alteram non gravem, omnis tamen gravitatis cauſam, cujus partes ex tenuiſſimis variorum ordinum vorticulis elaſticis conſtant. Cùm autem vis motrix ad datum corpus grave datâ celeritate movendum adhibenda, decreſcente corporis hujus gravitate, in eâdem ratione decreſcat, nullaque ſit ætheris gravitas, conſequens eſſe aiunt ut corpus grave quod in æthere datâ celeritate fertur, nonniſi infiniteſimam motûs ſui partem ex reſiſtentia ætheris finito quovis tempore deperdat. Verùm prætterquam quod totum hoc ſiſtema, ut ut elegans ac venuſtum, fictis fere ad arbitrium hypotheſibus, quas NEWTONUS è Phyſicâ experimentali vellet eliminari, nititur, plurimiſque & graviſſimis aliis ex Mechanica atque Aſtronomiâ difficultatibus premitur, adductum modò reſponſum his etiam laborat incommodis. Primum quidem evidens eſt, vim illam quæ ad corpus grave contrà gravitatis directionem ſuſti-

nen-

Arcus deſcenſu primo a puncto in filo notato deſcriptus, digitorum	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus, digitorum	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum differentia motui amiſſo proportionalis, digitorum	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oſcillationum in aqua			$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Numerus Oſcillationum in aere		$85\frac{1}{2}$	287	535					

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oſcillationibus 535 in aere, & $1\frac{1}{5}$ in aquâ amiſſi ſunt. Erant quidem oſcilla-

nondum neceſſaria eſt, cum corporis pondere decreſcere debere; ſed non ità manifeſtum eſt vim motricem ad datum corpus grave datâ celeritate movendum adhibendam, in ratione ponderis decreſcere oportere, ubi vis illius motricis directio gravitatis directioni oppoſita non eſt, ſed illi perpendicularis aut cum illâ conſpirans. Præterea materia omnis ætherea circa ſolem, ſtellas, atque planetas ſingulos perniciſſimo motu in orbem acta vi centrifugâ pollet quâ à centris magnorum vorticum, atque etiam à centris ſingulorum vorticulorum propriis recedere nititur, undè cæterorum corporum gravitas ortum habet; at vis illa centrifuga quæ cum vi centripetâ ſeu gravitate conferri poteſt, idem præſtare in æthere debet ratione motûs in datâ materiæ quantitate datâ vi motrice imprimendi, quod in cæteris corporibus gravitas præſtat. Nulla igitur eſſe ratio videtur cur corpus grave datâ celeritate motum nonniſi infiniteſimam ſuæ celeritatis particulam ex ætheris non gravis reſiſtentiâ amittat, ſiquidem illud vi centrifugâ pollet; Et, ſi materia ætherea ſuâ vi centrifugâ vel certè vi indè ortâ corporum gravitatem producat, eorumque motum finitum acceleret & extinguat finito tempore, multò magis eadem materia corpus grave movere, aut motum ejus finito tempore extinguere debet, ſi finitâ velocitate in illud incurrat ac continuò urgeat, cum vis centrifuga infiniteſima ſit,
ſi cum vi quâ corpus ſpatium finitum 187.
tempore infinito deſcribit, conferatur.

* Et quidem reſiſtentia ex gravitate materiæ occurrentis non pendet, ſed ex ejus inertiâ, quâ fit ut nullum corpus ab alio motum ſuſcipiat quin tantumdem motus in eo deſtruat, idque Mechanici communiter ſtatuunt tam ex conſenſu omnium quorumcumque Phænomenorum, ubi (ſemotâ gravitatis conſideratione) nullus motus motum producendo non conſumitur, quam ex Principiis Metaphyſicis quâ liquet quod ſi res ita ſe non haberet, vel minimus motus infinitum motum produceret, totaque Univerſi moles ex Atomi progreſſione dimoveretur, quod abſurdum. Unde ſi Æther non reſiſteret, hoc eſt vi inertiæ careret, fingendæ forent duæ materiæ ſpecies, quarum altera vi inertiæ prædita foret, altera vero non, ita ut quamvis ab occurrente materia dimoveatur, nihil tollat de ejus motu; ſimul autem ſtatuitur quod id æther corporum motum ſiſtere poteſt aut mutare quomodocumque, nam ſi æther ſit gravitatis cauſa oportet ut illa ipſa materia ætherea quæ corporis moti actione movetur, dum tamen nihil quicquam de illius motu tollit, poſſit illud idem corpus ſi ſurſum feratur ſiſtere, in adverſum ejus directionem mutare &c. Quæ Metaphyſicè etiam inter ſe repugnare videntur, nec ſatis fuiſſe perpenſa ab ingenioſiſſimis Carteſianiſmi reſtauratoribus.

DE MOTU CORPORUM: LIBER SECUND: SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

oſcillationes in aere paulo celeriores quàm in aquâ. At ſi oſcillationes in aquâ in eâ ratione accelerarentur ut motus pendulorum in medio utroque fierent æquiveloces, maneret numerus idem oſcillationum $1\frac{1}{5}$ in aquâ, quibus (h) motus idem ac prius amitteretur; ob reſiſtentiam auctam & ſimul quadratum temporis diminutum in eâdem ratione illâ duplicatâ. Paribus igitur pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oſcillationibus 535 & in aquâ oſcillationibus $1\frac{1}{5}$ amiſſi ſunt; (i) ideoque reſiſtentia penduli in aquâ eſt ad ejus reſiſtentiam in aere ut 535 ad $1\frac{1}{5}$. Hæc eſt proportio reſiſtentiarum totarum in caſu columnæ quartæ.

Deſignet jam $AV + CV^2$ differentiam arcuum in deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum à globo in aere cum velocitate maximâ V moto; & cum velocitas maxima in caſu columnæ quartæ ſit ad velocitatem maximam in caſu columnæ primæ, ut 1 ad 8; & differentia illa arcuum in caſu columnæ quartæ ad differentiam in caſu columnæ primæ (k) ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, ſeu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: ſcribamus in his caſibus 1 & 8 pro-

(h) * *Motus idem ac prius amitteretur.* Differentia arcuum motui amiſſo proportionalis, eſt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim (*per cor. 5. Lem. X*); ſed aucta paululum velocitate, reſiſtentia quamproximè augetur in ejus ratione duplicatâ (per hyp.) & ſimul quadratum temporis minuitur in eâdem ratione illâ duplicatâ, quia totus arcus deſcriptus numero oſcillationum $1\frac{1}{5}$ idem quam proximè manet. Quarè motus amiſſus numero oſcillationum $1\frac{1}{5}$ idem manet, ſi oſcillationes in aquâ accelerentur ut dictum eſt (vid. not. ſup. c).

(i) * *Ideoque reſiſtentia penduli.* Nam motus in aëre amiſſus unâ mediocri oſcillatione, quâ arcus digit. 14 deſcribitur, eſt pars $\frac{1}{535}$ motûs totius oſcillationibus 535, amiſſi; Et ſimiliter motus in aquâ amiſſus æquali oſcillatione quâ arcus digit. 14 pari velocitate deſcriberetur eſt quam proximè pars $\frac{1}{1\frac{1}{5}}$ ejuſdem motûs totius amiſſi oſcillationibus $1\frac{1}{5}$ in aquâ & oſcillationibus 535 in aëre. Quarè cùm reſiſtentiæ totæ unâ oſcillatione mediocri ſint ut partes illæ motûs amiſſæ, eſt reſiſtentia penduli in aquâ ad ejus reſiſtentiam in aëre ut $\frac{1}{1\frac{1}{5}}$ ad $\frac{1}{535}$, id eſt, ut 535 ad $1\frac{1}{5}$.

(k) * *Ut* $\frac{2}{535}$ *ad* $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$. Dividendo nimirum arcuum differentias per numerum oſ-

8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro differentiis arcuum, & fiet $A + C = 85\frac{1}{2}$ & $8A + 64C = 4280$ ſeu $A + 8C = 535$; indeque per reductionem æquationum proveniet $7C = 449\frac{1}{2}$ & $C = 64\frac{3}{14}$ & $A = 21\frac{3}{7}$: atque ideo reſiſtentia, (l) cùm ſit ut $\frac{7}{11}AV + \frac{3}{4}CV^2$, erit ut $13\frac{6}{11}V + 48\frac{9}{56}V^2$. Quare in caſu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, reſiſtentia tota eſt ad partem ſuam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11} + 48\frac{9}{56}$ ſeu $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$; & idcirco reſiſtentia penduli in aquâ eſt ad reſiſtentiæ partem illam in aere, quæ quadrato velocitatis proportionalis eſt, quæque ſola in motibus velocioribus conſideranda venit, (m) ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$ & 535 ad $1\frac{1}{5}$ conjunctim, id eſt, ut 571 ad 1. Si penduli in aquâ oſcillantis filum totum fuiſſet immerſum, reſiſtentia ejus fuiſſet adhuc major; adeo ut penduli in aquâ oſcillantis reſiſtentia illa, quæ velocitatis quadrato proportionalis eſt, quæque ſola in corporibus velocioribus conſideranda venit, ſit ad reſiſtentiam ejuſdem penduli totius, eadem cum velocitate in aere oſcillantis, (n) ut 850 ad 1 circiter, hoc eſt, ut denſitas aquæ ad denſitatem aeris quamproxime.

In hoc calculo ſumi quoque deberet pars illa reſiſtentiæ penduli in aquâ, quæ eſſet ut quadratum velocitatis, ſed (quod mirum forte videatur) reſiſtentia in aqua augebatur in ratione velocitatis pluſquam duplicatâ. Ejus rei cauſam inveſtigan-

oſcillationum ut differentia in unâ mediocri oſcillatione habeatur, quemadmodum ſuprà factum eſt.

(l) * *Cùm ſit ut* $\frac{7}{11}AV + \frac{3}{4}CV^2$, (per cor. prop. 30.).

(m) * *Ut* $61\frac{12}{17}$ *ad* &c. Eſt enim, ex ſuprà dictis, reſiſtentia in aquâ ad reſiſtentiam totam in aere ut 535 ad $1\frac{1}{5}$ & reſiſtentia tota in aere ad reſiſtentiæ partem illam in aere quæ velocitatis quadrato proportionalis eſt ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$, & idcircò (ex æquo) & per compoſitionem rationum) *reſiſtentia penduli in aquâ eſt ad reſiſtentiæ partem illam in aere, &c.* 187.

(n) * *Ut* 850. *ad* 1 circiter. Si enim reſiſtentia fili ponatur ut ſuprà factum eſt, æqualis tertiæ parti reſiſtentiæ totius in aere, erit fere reſiſtentia penduli in aquâ ad ejus reſiſtentiam totam in aere ut $535 - \frac{6}{15}$ ad $1\frac{1}{5} - \frac{6}{15}$, ſeu ut 2673 ad 4, & $2673 \times 61\frac{12}{17}$ ad $4 \times 48\frac{9}{56}$, ut 850 ad 1 circiter.

gando, in hanc incidi, quod arca nimis anguſta eſſet pro magnitudine globi penduli, & motum aquæ cedentis præ anguſtiâ ſuâ nimis impediebat. Nam ſi globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur; reſiſtentia augebatur, in duplicatâ ratione velocitatis quam proximè. Id tentabam conſtruendo pendulum ex globis duobus, quorum inferior & minor oſcillaretur in aquâ, ſuperior & major proximè ſupra aquam filo affixus eſſet, & in aere oſcillando, adjuvaret motum penduli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo inſtituta ſe habebant ut (o) in tabulâ ſequente deſcribitur.

Arcus deſcenſu primo deſcriptus	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum diff motui amiſſo proport.	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oſcillationum	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Conferendo reſiſtentias mediorum inter ſe, effeci etiam ut pendula ferrea oſcillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quaſi trium, & diameter globi penduli quaſi tertia pars digiti. Ad filum autem proximè ſupra mercurium affixus erat globus alius plumbeus ſatis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vaſculum, quod capiebat quaſi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aquâ communi, ut pendulo in fluido utroque ſucceſſivè oſcillante, invenirem proportionem reſiſtentiarum; & prodiit reſiſtentia argenti vivi ad reſiſtentiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id eſt, ut denſitas argenti vivi ad denſitatem aquæ. Ubi globum pendulum paulo majorem adhibebam, putà cujus diameter eſſet quaſi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat reſiſtentia argen-

(o) * *In tabulâ ſequente.* Arcuum differentiæ dividantur per numerum oſcillationum in caſu unoquoque, & prodibunt differentiæ in oſcillatione unâ mediocri 1. 1851; 0. 3076; .0827; .0235; .0073; .0023 .0010 quæ ſunt quam proximè ut quadrata velocitatum, ſive ut 16; 4; 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{64}$ $\frac{1}{256}$ in majoribus oſcillationibus. priores enim termini ſunt proximè ſequentium fere quadrupli, in minoribus verò oſcillationibus præcedentes termini ſunt in minore ratione ad ſequentes.

argenti vivi in eâ ratione ad reſiſtentiam aquæ, quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum eſt, propterea quod in his ultimis vas nimis anguſtum fuit pro magnitudine globi immerſi. Ampliato globo, deberet etiam vas ampliari. Conſtitueram quidem hujuſmodi experimenta in vaſis majoribus & in liquoribus tum metallorum fuſorum, tum aliis quibuſdam tam calidis quam frigidis repetere: ſed omnia experiri non vacat, & ex jam deſcriptis ſatis liquet reſiſtentiam corporum celeriter motorum denſitati fluidorum in quibus moventur proportionalem eſſe quam proximè. Non dico accuratè. Nam fluida tenaciora, pari denſitate, proculdubio magis reſiſtunt quàm liquidiora, ut oleum frigidum quam calidum, calidum quàm aqua pluvialis, aqua quàm ſpiritus vini. Verum in liquoribus, qui ad ſenſum ſatis fluidi ſunt, ut in aere, in aquâ ſeu dulci ſeu ſalsâ, in ſpiritibus vini, terebinthi & ſalium, in oleo à fæcibus per deſtillationem liberato & calefacto, oleoque vitrioli & mercurio, ac metallis liquefactis, & ſi qui ſint alii, qui tam fluidi ſunt ut in vaſis agitati motum impreſſum diutius conſervent, effuſique liberrimè in guttas decurrendo reſolvantur, nullus dubito quin regula allata ſatis accuratè obtineat: præſertim ſi experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis inſtituantur.

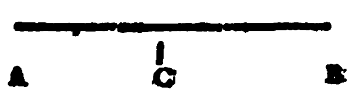
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

Denique cùm nonnullorum opinio ſit, medium quoddam æthereum & longè ſubtiliſſimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrimè permeet; à tali autem medio per corporum poros fluente reſiſtentia oriri debeat: ut tentarem an reſiſtentia, quam in motis corporibus experimur, tota ſit in eorum externâ ſuperficie, an vero partes etiam internæ in ſuperficiebus propriis reſiſtentiam notabilem ſentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis ab unco chalybeo ſatis firmo, mediante annulo chalybeo, ſuſpendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad conſtituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus ſurſum præacutus erat acie concavâ, ut annulus arcu ſuo ſuperiore aciei annixus liberrimè moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita conſtitutum deducebam à perpendiculo ad diſtantiam quaſi pedum ſex, idque ſecundum planum aciei unci perpendiculare,

ne annulus, oſcillante pendulo, ſupra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum ſuſpenſionis, in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accuratè notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demiſſo notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oſcillationis primæ, ſecundæ ac tertiæ. Hoc repetebam ſæpius, ut loca illa quam potui accuratiſſimè invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuam, unà cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter uncum & pyxidem pendulam tendebatur. Nam filum tenſum (p) dimidio ponderis ſui pendulum à perpendiculo digreſſum ſemper urget. Huic ponderi addebam pondus aeris quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat quaſi pars ſeptuageſima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum plena, pondere ſuo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam filum ut penduli jam oſcillantis eadem eſſet longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum retracto ac dimiſſo, numerabam oſcillationes quaſi ſeptuaginta & ſeptem, donec pyxis ad locum ſecundo notatum rediret, totidemque ſubinde donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rurſus totidem donec pyxis reditu ſuo attingeret locum quartum. Unde concludo quod reſiſtentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad reſiſten-

tiam

(p) * *Dimidio ponderis ſui.* Fili tenſi AB homogenei & æqualis ubique craſſitiei centrum gravitatis eſt in loco medio C, (59. *lib.* 1.) ideóque vis quâ filum pondere ſuo toto P, ad rotandum circà A, urgetur, eſt ut AC $\times P$, ſeu ut $\frac{1}{2}P \times$ AB.) 63. *lib.* 1.) jam ſi inveniendum ſit pondus Q in B locandum ut momentum $Q \times$ AB æquivaleat momento ſeu vi fili totius; erit $Q \times AB = \frac{1}{2}P \times AB$, ideóque $Q = \frac{1}{2}P$. Quarè filum tenſum dimidio ponderis ſui P pendulum à perpendiculo digreſſum ſemper urget.



tiam pyxidis vacuæ quàm 78 ad 77. Nam ſi æquales eſſent ambarum reſiſtentiæ, pyxis plena ob vim ſuam inſitam ſeptuagies & octies majorem vi inſitâ pyxidis vacuæ, motum ſuum oſcillatorium tanto diutius conſervare deberet, atque ideo completis ſemper oſcillationibus 78 (q) ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oſcillationibus 77.

Deſignet igitur A reſiſtentiam pyxidis in ipſius ſuperficie externâ, & B reſiſtentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & ſi reſiſtentiæ corporum æquivelocium in partibus internis ſint ut ma-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

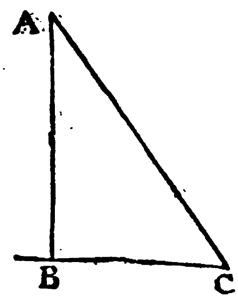
(q) * *Ad loca illa notata redire.* Si reſiſtentiæ in ſingulis oſcillationibus eſſent æquales, motus amiſſi, ut potè reſiſtentiis proportionales, eſſent quoque æquales; ſed motus amiſſi, paribus oſcillationum temporibus, ſunt ut maſſæ ſeu pondera corporum & ſpatia motibus amiſſis deſcribenda conjunctim; ideoque ſpatia illa eſſent ut pondera inversè; hoc eſt, ſpatium motu pixidis vacuæ amiſſo in unâ oſcillatione deſcribendum, eſſet ad ſpatium motu pixidis plenæ oſcillatione unâ amiſſo percurrendum ut 78 ad 1, & propterea ſpatia illa, completâ unicâ pixidis vacuæ oſcillatione, & pixidis plenæ oſcillationibus 78 abſolutis, forent æqualia quamproximè, atque ideò pixis plena, completis ſemper oſcillationibus 78, ad loca notata rediret.

Cùm in hâc Sectione cl. NEWTONUS de ſolo corporum in cycloide oſcillantium motu egerit, multa verò à recentioribus authoribus inventa ſint, quibus generalis motuum in curvis quibuſlibet theoria longe promota eſt, principia quibus uſi ſunt ſequenti problemate breviter exponemus.

PROBLEMA.

188. Tendente vi gravitatis uniformi ubique perpendiculariter ad planum horizontis, definire motum corporis per curvam quamlibet aſcendentis vel deſcendentis in medio uniformi cujus reſiſtentia eſt ut velocitatis functio quælibet.

De corporum aſcenſu ac deſcenſu in lineis rectis ad horizontem quomodocum-

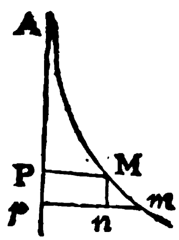


que inclinatis agere hic neceſſum non eſt; 188.
ſi enim corpus in lineâ rectâ AC ad horizontem BC utcumque inclinatâ aſcendat vel deſcendat, reſiſtentia & celeritas in quibuſcumque locis & ſpatium deſcriptum ac tempus quo deſcriptum eſt, definiuntur per Prop. 3. Sect. 1; 8am. & 9am. Sect. 2; 13am. & 14am. Sect. 3. ac per notas iiſdem locis adjunctas. Cum enim vis gravitatis ſecundum directionem AB urgentis ſit ad ipſius partem quæ agit juxta directionem AC, in datâ ratione lineæ AC ad AB, ſeu in datâ ratione ſinûs totius ad ſinum anguli inclinationis ACB; ſi loco vis gravitatis horizonti perpendicularis adhibeatur in calculis & conſtructionibus pars illius data quæ ſecundum directionem AC agit, conſtructiones calculique in citatis locis non mutantur. Supereſt igitur ut corporis in curvâ lineâ aſcendentis aut deſcendentis motum definiamus.

Def-

materia, ſeu numerus particularum quibus reſiſtitur: erit 78 B reſiſtentia pyxidis plenæ in ipſius partibus internis: ideoque pyxidis vacuæ reſiſtentia tota A + B erit ad pyxidis plenæ reſiſtentiam totam A + 78 B ut 77 ad 78, & diviſim A + B ad 77 B, ut 77 ad 1, indeque A + B ad B ut 77 × 77 ad 1, & diviſim A ad B ut 5928 ad 1. Eſt igitur reſiſtentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejuſdem reſiſtentia in externâ ſuperficie, & amplius. Sic verò diſputamus ex hypotheſi quod major illa reſiſtentia pyxidis plenæ, non ab aliâ aliquâ cauſâ latente oriatur, ſed ab actione ſolâ fluidi alicujus ſubtilis in metallum incluſum.

Hoc



Deſcendat primùm corpus è loco dato A per curvam A M, ducatur verticalis A P, ad quam ex punctis M, & m, infinitè propinquis demittantur perpendicula M P, m p, & ex M ad p m perpendiculum M n. Gravitas conſtans ſecundùm directionem verticali A P parallelam ſemper agens ſit $= g$, reſiſtentia in loco M $= r$, velocitas corporis ibidem $= v$; tempus quo deſcribitur A M $= t$, A P $= x$, A M $= s$, P p $=$ M n $= dx$, & M m $= ds$. Jam verò M m, eſt ad M n, ſeu ds ad dx, ut vis gravitatis g ad ipſius partem in directioue M m agentem quæ ideo erit $= \frac{g\,dx}{ds}$; ſubducatur vis reſiſtentiæ r, & vis reſidua quâ corpus in loco M, juxtà directionem, M m urgetur erit $= \frac{g\,dx}{ds} - r$. Undè (18) fit $g\,dx - r\,ds = v\,dv$. Hujus autem æquationis fluens ità ſumi debet ut evaneſcentibus x & s evaneſcat quoque v ſi velocitas corporis in loco A nulla ſit, & fiat $v = c$, ſi velocitas corporis in A, ſit $= c$. Simili modo ſi corpus è loco dato A per arcum A M aſcendat, & omnia ut modò ſuppoſuimus maneant, erit (18) $g\,dx + r\,ds = -v\,dv$, cujus æquationis fluentem ità ſumi oportet ut poſitis x & $s = 0$, fiat v, æqualis velocitati in loco A datæ.

Si abſciſſa x in verticali B C per curvæ A C D punctum infimum C ducta capiatur, ſitque B P $= x$, & cætera maneant ut ſupra, erit adhuc pro corporis deſcenſu $g\,dx - r\,ds = v\,dv$; at pro aſcenſu per arcum C μ ſi data ſint puncta A & B, dicaturque C μ vel A C $\mu = s$, erit $-g\,dx + r\,ds = -v\,dv$, ſeu adhuc $g\,dx - r\,ds = v\,dv$, quia creſcente s decreſcit x & contrà. Si vero dicatur C P $= x$ & C M $= s$, quia hæ quantitates reſpectu aliarum B P, & A M negativæ ſunt, fiet pro deſcenſu $-g\,dx + r\,ds = v\,dv$, ſeu $g\,dx - r\,ds = -v\,dv$, & pro aſcenſu ſi dicatur C $\mu = s$ erit $g\,dx + r\,ds = -v\,dv$ quarum æquationum altera in alteram abit, mutato ſigno quantitati r, præfixo. Ex datâ igitur lege reſiſtentiæ, loco r ſcribatur ipſius valor per v & datas quantitates, & ex datâ æquatione ad curvam A M, loco dx ſcribatur valor ejus per ds, s & datas quantitates in ſuperioribus formulis ſeu æquationibus; & deinde per curvarum quadraturas vel per ſeries, capiantur, ut oportet, formularum fluentes, obtinebitur

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in quâ illud aliquando deſcripſeram, intercidit. Unde fractas quaſdam numerorum partes, quæ memoriâ exciderunt, omittere compulſus ſum.

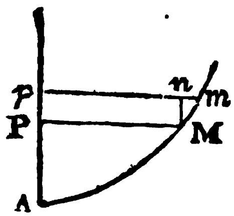
De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VI. Prop. XXXI. Theor. XXV.

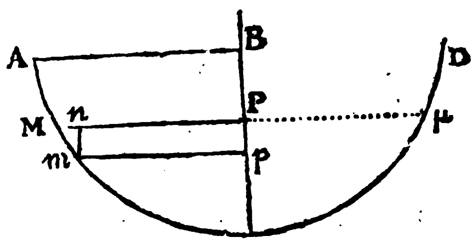
Nam omnia denuò tentare non vacat. Primâ vice, cùm unco infirmo uſus eſſem, pyxis plena citius retardabatur. Cauſam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oſcillationibus obſequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum ſuſpenſionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti ſupra deſcripſimus.

SEC-

tur v per s & contrà, atque etiam r per s, & quia tempus t, quo arcus s deſcribitur eſt $S.\frac{ds}{v}$, dabitur quoque tempus. Q. E. I.

Exempli causâ. Sit reſiſtentia partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis, quæ eſt Hypotheſis naturæ, ſeu ſit $r = \frac{aa + vv}{b}$, dicanturque B P $= x$, A M $= s$ & æquatio $g\,dx - r\,ds = v\,dv$ in hanc migrabit $g\,dx - \frac{aa\,ds}{b} = v\,dv + \frac{vv\,ds}{b}$; ut hoc ſecundum æquationis membrum debitam formam acquirat, ponatur $ds = \frac{\frac{1}{2}b\,dz}{z}$, ſeu $s = \frac{1}{2}b\,L.z$, æquatio evadet $gz\,dx - \frac{1}{2}aa\,dz = zv\,dv + \frac{1}{2}vv\,dz$, ſumptis fluentibus, fit $g\,S.z\,dx - \frac{1}{2}aaz = \frac{1}{2}zvv$. Undè invenietur $vv = \frac{2g\,S.z\,dx}{z} - aa$. Eſt autem $S.z\,dx$, area curvæ cujus abſciſſa x & ordinata z; & z datur per s, ope logarithmicæ, & x per s ope æquationis ad curvam A M. Sit h numerus cujus logarithmus eſt unitas, ſeu $L.h = 1$, erit $s\,L.h = \frac{1}{2}b\,L.z$, & $\frac{2s}{b}L.h = L.h^{\frac{2s}{b}} = L.z$. atquè $h^{\frac{2s}{b}} = z$, undè habetur $vv = \frac{2g\,S.h^{\frac{2s}{b}}\,dx}{h^{\frac{2s}{b}}} - aa$.





Si in his æquationibus ponatur $a = 0$, definietur motus corporis in lineâ qualibet curvâ deſcendentis & aſcendentis in medio uniformi, cujus reſiſtentia velocitatis quadrato proportionalis eſt. Cæterum totam hanc materiam copioſiſſimè & accuratiſſimè tractavit Clariſſ. *Eulerus* Tom. 2. Mechan. 188.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXII. THEOR. XXVI.

SECTIO VII.

De motu fluidorum & reſiſtentiâ projectilium.

PROPOSITIO XXXII. THEOREMA XXVI.

Si corporum ſyſtemata duo ſimilia ex æquali particularum numero conſtent, & particulæ correſpondentes ſimiles ſint & proportionales, ſingulæ in uno ſyſtemate ſingulis in altero, & ſimiliter ſitæ inter ſe, ac datam habeant rationem denſitatis ad invicem, & inter ſe temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant (eæ inter ſe quæ in uno ſunt ſyſtemate & eæ inter ſe quæ ſunt in altero) & ſi non tangant ſe mutuo quæ in eodem ſunt ſyſtemate, niſi in momentis reflexionum, neque attrahant, vel fugent ſe mutuò, niſi viribus acceleratricibus quæ ſint ut particularum correſpondentium diametri inversè & quadrata velocitatum directè: dico quod ſyſtematum particulæ illæ pergent inter ſe temporibus proportionalibus ſimiliter moveri. (r).

Corpora ſimilia & ſimiliter ſita temporibus proportionalibus inter ſe ſimiliter moveri dico, quorum ſitus ad invicem in fine temporum illorum ſemper ſunt ſimiles: putà ſi particulæ unius ſyſtematis cum alterius particulis correſpondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus ſimiles & proportionales figurarum ſimilium partes à particulis correſpondentibus deſcribuntur. Igitur ſi duo ſint ejuſmodi ſyſtemata, particulæ correſpondentes, ob ſimilitudinem incœptorum motuum, pergent ſimiliter moveri, uſque donec ſibi mutuo occur-

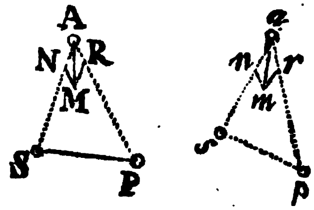
(r) * *Similiter moveri.* Sunto A & a, P & p, S & s, &c. particulæ in duobus ſyſtematibus ſibi mutuò correſpondentes. Particula A in ſuo ſyſtemate tempore T, deſcribat ſpatium quàm minimum A B, & particula correſpondens a, in altero ſyſtemate tempore t, deſcribat ſpatium a b, priori A B, ſimile ſimiliterque ſitum, ità ut ſit A B, ad a b, ut diameter particulæ A, ad diametrum particulæ a, ſivè ut A S ad a s, vel P S ad p s, & angulus A S B æqualis angulo a s b, atque S A B æqualis s a b. Et aliæ ſibi mutuò correſpondentes particulæ quieſcant vel ſimili modo moveantur. His poſitis, demonſtrandum eſt, quod ſi ſumantur tempora alia quæ ſint ut T & t, particulæ correſpondentes erunt utrinque ſimiliter poſitæ.

currant. Nam ſi nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter (ſ) in lineis rectis per motûs leg. 1. Si viribus aliquibus ſe mutuo agitant, & vires illæ ſint ut particularum correſpondentium diametri inversè & quadrata velocitatum directè; quoniam particularum ſitus ſunt ſimiles & vires proportionales, (t) vires totæ quibus particulæ correſpondentes

(ſ) * *In lineis rectis per mot. leg.* 1. Ideóque ob velocitates uniformes & ſimiles motuum directiones pergent ſimiliter moveri temporibus proportionalibus, uſque ad occurſus ſuos primos.

(t) * *Vires totæ quibus particulæ correſpondentes agitantur ſimiles habebunt determinationes, & erunt ad invicem ut correſpondentium particularum Diametri inversè & quadrata velocitatum directè.*

* Particula *A* inter duas *S* & *P*, & particula *a* inter duas *s* & *p* ſint ſimiliter ſitæ, & quâcumque celeritate in directione ſimiliter poſitâ particulæ illæ *A* & *a* ferantur, trahanturque vel fugentur illæ particulæ *A* & *a* à particulis *S* & *P*, *s* & *p* per vires quæ ſint ut Diametri particularum correſpondentium inversè ſive ut lineæ homologæ inversè, & quadrata velocitatum directè, dico 1°. quod directio vis compoſitæ trahentis particulas *A* & *a* ſimiliter poſita erit in utroque ſyſtemate, nam anguli S A P & s a p, quos faciunt vires agentes, ex hypotheſi æquales ſunt, vis autem compoſita ſequetur Diagonalem quæ faciat angulos cum directione utriuſque vis componentis quorum ſinus ſint reciprocè ut vires agentes, per nat. virium compoſitarum, ſit ea Diagonalis hic A M, illic a m, erit ergo ſinus anguli S A M, ad ſinum anguli P A M, inversè ut vis particulæ S ad vim particulæ *P* ſive directè ut lineæ homologæ S A & P A (nam quoniam de unico corpore A nunc agitur ratio quadratorum velocitatum hic nihil mutat) pariter ſinus anguli s a m eſt ad ſinum Anguli p a m ut s a ad p a; ſed eſt S A ad P A ſicut s a ad p a ex hypotheſi, ergo anguli æquales S A P & s a p in eadem ratione ſecantur per lineas A M, a m, ideoque anguli S A M & s a m, M A P & m a p ſunt æquales, ergo directio vis compoſitæ trahentis particulas *A* & *a*



in ſingulo ſyſtemate ſimiliter eſt poſita. Q. erat 1um. 188.

2°. Vires illæ compoſitæ erunt ut particularum Diametri inversè & quadrata velocitatum directè.

Secetur utcumque in directione AS lineola AN quæ vim particulæ S exprimat, ducaturque N M, parallela AP, & ex M ducatur M R parallela A S, fiet parallelogrammum A N M R, in quo M R = A N, & angulus A M R = ang. M A N, ideoque A N ad A R ut ſinus anguli M A R ad ſinum ang. M A N, ſive ut P A ad S A, hoc eſt ut vires particularum *S* & *P*, ideoque A R exprimet vim particulæ *P*, & A M exprimet vim compoſitam ex viribus *S* & *P*. Sumatur in a s lineola a n; quæ ſit ad A N, ut a s ad A S inversè, & ut quadratum velocitatis in *a* ad quadratum velocitatis in *A* directè, ductiſque n m & m r parallelis lineis a p, a s erunt a n & a r ut vires particularum s & p, & a m exprimet vim ex iis compoſitam.

Sed ob ſimilitudinem triangulorum ANM, a n m eſt AN ad AM ſicut a n ad a m, ſive vis particulæ *A*, ad vim compoſitam ex particulis *S* & *P*, ut vis particulæ *a* ad vim compoſitam ex particulis *s* & *p*, ideoque viciſſim, vis particulæ *A* ad vim particulæ *a* ut, vis compoſita ex vi particularum *S* & *P*, ad vim compoſitam ex viribus particularum *s* & *p*; Sed vis particulæ *A* eſt ad vim particulæ *a*, inversè ut par-

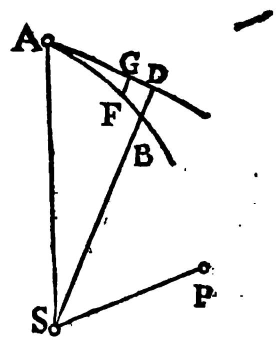
tes agitantur, ex viribus ſingulis agitantibus (per legum corollarium ſecundum) compoſitæ, ſimiles habebunt determinationes, perinde ac ſi centra inter particulas ſimiliter ſita reſpicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires ſingulæ componentes, hoc eſt, ut correſpondentium particularum diametri inversè, & quadrata velocitatum directè: & propterea efficient ut correſpondentes particulæ figuras ſimiles deſcribere pergant. (u). Hæc ita ſe habebunt (*per corol.* 1. & 8. *prop.* IV. *lib.* 1.) ſi modò centra illa quieſcant. Sin moveantur, quoniam

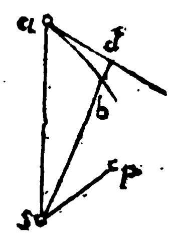
particularum Diametri, & directè ut velocitatum Quadrata ex hypotheſi, ergo vires compoſitæ ſunt in eädem ratione. Q. E. D.

Idem ratiocinium ad vires compoſitas ex pluribus particulis extendetur. Unde *vires totæ &c.*

(u) * *Hæc itá ſe habebunt.* (*Per cor.* 1. & 8. *prop.* 4. *lib.* 1.) Aut quod idem eſt per hoc Lemma.

189. *Lemma.* Si corpora duo A, a, circà centra immota S, s, projiciantur ſecundum directiones A D, a d, quæ cum diſtantiis A S & a s æquales angulos D A S, d a s conſtituunt, & urgeantur viribus acceleratricibus centra illa S, s reſpicientibus, quæ ſemper ſint inter ſe ut quadrata velocitatum corporum directè & diſtantiæ à centris inversè, corpora illa figuras ſimiles circà centra S & s deſcribent, ſimileſque & proportionales figurarum illarum partes temporibus proportionalibus percurrent.





In projectilium directionibus capiantur partes quam minimæ A D, a d diſtantiis A S, a s proportionales. Jungantur S D, s d & corpora A, a temporibus quibuſvis T, t deſcribant arcus A B, a b qui lineas S D, s d attingunt. Sumantur arcus A F, a b qui eodem tempuſculo deſcripti ſint, & ductâ F G parallelâ S D, erit (4. *lib.* 1.) F G ad b d ut vis centralis quâ corpus A urgetur ad vim centralem quâ urgetur corpus a; & quia vires illæ (*per hyp.*) ſunt ut quadratum velocitatum directè & diſtantiæ A S, a s, inversè, velocitates autem ſunt ut ſpatia quæ ſimul deſcripta fuiſſent in Tangente A G, a d, erit F G ad b d, ut $AG^2 \times as$ ad $ad^2 \times AS$. Sed (*per cor.* 1. *Lem.* XI.) $BD : FG = AD^2 : AG^2$; quarè (per compoſitionem rationum, & ex æquo) $Bd : bd = AD^2 \times as : ad^2 \times AS$. Cùm igitur ob triangulorum A S D, a s d, ſimilitudinem (*ex hyp.*) ſit $AD : ad = AS : as$ & ideò $AD^2 \times as : ad^2 \times AS = AS : as$, erit $BD : bd = AS : as$, & ob ſimilitudinem

niam (x) ob tranſlationum ſimilitudinem, ſimiles manent eorum ſitus inter ſyſtematum particulas; ſimiles inducentur mutationes in figuris quas particulæ deſcribunt. Similes igitur erunt correſpondentium & ſimilium particularum motus uſque (y) ad occurſus ſuos primos, & propterea ſimiles occurſus, & ſimiles reflexiones, & ſubinde (per jam oſtenſa) ſimiles motus inter ſe donec iterum in ſe mutuo inciderint, & ſic deinceps in infinitum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpora duo quævis, quæ ſimilia ſint & ad ſyſtematum particulas correſpondentes ſimiliter ſita, inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant, ſintque eorum magnitudines ac denſitates ad invicem ut magnitudines ac denſitates correſpondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus ſimiliter moveri. Eſt enim eadem ratio partium majorum ſyſtematis utriuſque atque particularum.

Corol. 2. Et ſimiles & ſimiliter poſitæ ſyſtematum partes omnes quieſcant inter ſe: & earum duæ, quæ cæteris majores ſint, & ſibi mutuo in utroque ſyſtemate correſpondeant, ſecundum lineas ſimiliter ſitas ſimili cum motu utcumque moveri incipiant: hæ ſimiles in reliquis ſyſtematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri; atque ideo ſpatia diametris ſuis proportionalia deſcribere.

PRO-

nem figurarum, ut A D ad a d, ideoque ob æquales angulos *D* & d, triangula A D B, a d b erunt ſimilia, & propterea arcus A B, a b, ſimiles & ſimiliter ſiti. Simili modo demonſtrabitur quod corpora è locis B & b progreſſa ſimiles arcus a c ſimiliter poſitos deſcribant, atque ità deinceps. Deſcribent ergò figuras ſimiles circà centra S & s. His verò demonſtratis patet (196. *lib.* 1.) quod deſcribent ſimiles & proportionales figurarum ſimilium partes temporibus proportionalibus, ſeu quæ ſemper ſint ut tempora T & t.

(x) * *Ob tranſlationum ſimilitudinem.* Oriuntur enim centrorum illorum tranſlationes ex cauſis proportionalibus & ſimiliter agentibus, videlicet ex ſimilibus particularum ſimilium & correſpondentium motibus, adeò ut quemadmodum initio motûs centra ſimiliter moveri cœperunt, ſimiliter quoque deinceps moveri pergant. 189.

(y) * *Uſque ad occurſus ſuos primos &c.* Nam cùm particularum correſpondentium diſtantiæ, poſt quævis tempora proportionalia, ſint ſemper in datâ diametrorum ratione in duobus ſyſtematibus (*ex dem.*), neceſſe eſt ut diſtantiæ temporibus proportionalibus evaneſcant, & proindè ut particularum occurſus primi

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA XXVII.

Iiſdem poſitis, dico quod ſyſtematum partes majores reſiſtuntur in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione velocitatum ſuarum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione denſitatis partium ſyſtematum.

Nam reſiſtentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particulæ ſyſtematum ſe mutuo agitant, partim ex occurſibus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris autem generis reſiſtentiæ ſunt ad invicem ut vires totæ motrices à quibus oriuntur, (z) id eſt, ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correſpondentibus; hoc eſt (*per hypotheſin*) ut quadrata velocitatum directè & diſtantiæ particularum correſpondentium inversè & quantitates materiæ in partibus correſpondentibus directè: ideoque cum diſtantiæ particularum ſyſtematis unius ſint ad diſtantias correſpondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in ſyſtemate priore ad diametrum particulæ vel partis correſpondentis in altero, (a) & quantitates materiæ ſint ut denſitates partium & cubi diametrorum; reſiſtentiæ ſunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & denſitates partium ſyſtematum. *Q. E. D.* (b) Poſterioris generis reſiſtentiæ ſunt ut reflexionum correſpondentium numeri & vires

contingant, ubi particulæ illæ figurarum ſimilium partes ſimiles deſcripſerunt. Ex quo ſequitur particularum illarum occurſus primos ſimiles fore, tum ratione directionum, quod jam demonſtratum eſt, tum etiam ratione velocitatum & quantitatum motûs. Siquidem ſpatia percurſa temporibus proportionalibus ſunt ſemper in datâ ratione, ideoque velocitates in locis ſimilibus ſunt ſemper in datâ ratione, & indè ob particularum correſpondentium ſimilitudinem & datam denſitatum rationem, quantitates motûs quæ ſunt ut velocitates & denſitates & volumina conjunctim, in locis ſimilibus manent in datâ ratione. Reflexiones igitur quæ ex ejuſmodi motibus atque occurſibus ſimilibus naſcuntur, ſimiles erunt.

(z) * *Id eſt ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ* (per def. 8. lib. 1.)

(a) * *Et quantitates materiæ ſint &c.* Quantitates materiæ ſunt ut denſitates & volumina partium conjunctim (2. *lib.* 1.), & ob partium ſimilitudinem, volumina ſunt ut cubi laterum homologorum, ſeu diametrorum, ideóque quantitates materiæ ſunt ut denſitates partium & cubi diametrorum.

(b) * *Poſterioris generis reſiſtentiæ &c.* Si enim vires reflexionum ſupponantur æquæ

vires conjunctim. Numeri autem reflexionum ſunt ad invicem ut velocitates partium correſpondentium directè, & ſpatia inter earum reflexiones inversè. Et vires reflexionum ſunt ut velocitates & magnitudines & denſitates partium correſpondentium conjunctim; id eſt, ut velocitates & diametrorum cubi & denſitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus. reſiſtentiæ partium correſpondentium ſunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & denſitates partium conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur ſi ſyſtemata illa ſint fluida duo elaſtica ad modum aeris, & partes eorum quieſcant inter ſe: corpora autem duo ſimilia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & denſitatem proportionalia, & inter partes illas ſimiliter poſita, ſecundum lineas ſimiliter poſitas, utcunque projiciantur; vires autem acceleratrices, quibus particulæ fluidorum ſe mutuo agitant, ſint ut corporum projectorum diametri inversè, & quadrata velocitatum directè: corpora illa temporibus proportionalibus ſimiles excitabunt motus in fluidis, & ſpatia ſimilia ac diametris ſuis (c) proportionalia deſcribent.

Corol. 2. Proinde in eodem fluido projectile velox reſiſtentiam patitur, quæ eſt in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè. Nam ſi vires, quibus particulæ diſtantes ſe mutuo agitant,

quales, reſiſtentiæ ſunt ut numeri reflexionum ſeu occurſuum; & ſi numeri reflexionum æquentur, reſiſtentiæ ſunt ut vires reflexionum correſpondentium; undè, conjunctis his rationibus, reſiſtentiæ quæ ex particularum & partium majorum occurſibus & reflexionibus oriuntur, ſunt ſemper ut reflexionum correſpondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum, cæteris paribus, ſunt ad invicem ut velocitates partium correſpondentium directè, &, cæteris paribus, ſunt inversè ut ſpatia inter particularum & partium correſpondentium occurſûs ſeu reflexiones intercepta, id eſt, inversè ut partium correſpondentium diametri, ideóque *numeri reflexionum ſunt ad invicem ut velocitates partium correſpondentium directè* & earumdem diametri inversè. *Et vires reflexionum ſunt ut* motûs quantitates in occurſibus *id eſt, ut velocitates & diametrorum cubi & denſitates partium correſpondentium. Et conjunctis his omnibus rationibus &c.*

(c) * *Proportionalia deſcribent.* Probatur enim ut in dem. prop. 32. lemmate (189) ſimiles ſimilium figurarum partes temporibus proportionalibus à corporibus illis ſemper deſcribi. Undè corollarium hoc patet (*per cor.* 1. *&* 2. *prop.* 32.) 189.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXIII. THEOR. XXVII.

tant, augerentur in duplicatâ ratione velocitatis, (d) reſiſtentia foret in eâdem ratione duplicatâ accuratè; (e) ideoque in medio, cujus partes ab invicem diſtantes ſeſe viribus nullis agitant, reſiſtentia eſt in duplicatâ ratione velocitatis accuratè. Sunto igitur media tria *A*, *B*, *C* ex partibus ſimilibus & æqualibus & ſecundum diſtantias æquales regulariter diſpoſitis conſtantia. Partes mediorum *A* & *B* fugiant ſe mutuo viribus quæ ſint ad invicem ut *T* & *V*, illæ medii *C* ejuſmodi viribus omninò deſtituantur. Et ſi corpora quatuor æqualia *D*, *E*, *F*, *G* in his mediis moveantur, priora duo *D* & *E* in prioribus duobus *A* & *B*, & altera duo *F* & *G* in tertio *C*; ſitque velocitas corporis *D* ad velocitatem corporis *E*, & velocitas corporis *F* ad velocitatem corporis *G* in ſubduplicatâ ratione virium *T* ad vires *V*: reſiſtentia corporis *D* erit ad reſiſtentiam corporis *E*, & reſiſtentia corporis *F* ad reſiſtentiam corporis *G*, (f) in velocitatum ratione duplicatâ; & propterea reſiſtentia corporis *D* erit ad reſiſtentiam corporis *F* ut reſiſtentia corporis *E* ad reſiſtentiam corporis *G*. Sunto corpora *D* & *F* æquivelocia ut & corpora *E* & *G*; & augendo velocitates corporum *D* & *F* in ratione quâcunque, ac diminuendo vires particularum medii *B* in eâdem ratione duplicatâ, (g) accedet medium *B* ad formam & conditionem medii *C* pro lubitu,

(d) * *Reſiſtentia foret in eâdem ratione duplicatâ accuratè.* Nam ſi idem corpus variâ cum velocitate in uno eodemque fluido ſimiliter projiciatur, eædem ſunt reſiſtentiæ, ac ſi corpora duo ſimilia & æqualia ſimiliter projicerentur in duobus fluidis priori omnino paribus; ſed in hoc caſu, ob æquales inter ſe partium correſpondentium diametros & denſitates, reſiſtentiæ ſunt in duplicatâ ratione velocitatum accuratè (*per prop.* 33. *& ejus coroll.* 1.). Ergò &c.

(e) * *Ideóque in medio &c.* In medio cujus partes ab invicem diſtantes ſeſe viribus quibuſcumque in ratione velocitatis duplicatâ creſcentibus agitant, reſiſtentia (ex modò dem.) eſt ſemper in eâdem ratione duplicatâ; Quarè ſi vires illæ quibus particulæ ſeſe agitant, ſupponantur quàm minimæ, manebit ſemper reſiſtentia in ratione velocitatis duplicatâ accuratè; evaneſcant tandem illæ vires, manet reſiſtentia in ratione velocitatis duplicata; ſed idem melius patet per ſecundam partem demonſtrationis propoſitionis hujus 33.

(f) * *In velocitatum ratione duplicatâ.* (Ex demonſtratis initio coroll. hujus.).

(g) * *Accedet medium B &c.* Si enim velocitates corporum D & F, quam maximè augerentur vires particularum medii B, manentibus viribus medii A & velocitate corporis E quam maximè decreſcerent, quia eſt ſemper vis medii A ad vim medii B ut quadratum velocitatis corporis D ad quadratum velocitatis corporis E.

bitu, & idcirco reſiſtentiæ corporum æqualium & æquivelocium E & G in his mediis, perpetuò accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cùm reſiſtentiæ corporum D & F ſint ad invicem ut reſiſtentiæ corporum E & G, accedent etiam hæ ſimiliter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur D & F, ubi velociſſimè moventur, reſiſtentiæ ſunt æquales quam proximè: & propterea cùm reſiſtentia corporis F ſit in duplicatâ ratione velocitatis, erit reſiſtentia corporis D in eâdem ratione quàm proximè.

(h) *Corol.* 3. Corporis in fluido quovis elaſtico velociſſimè moti eadem ferè eſt reſiſtentia ac ſi partes fluidi viribus ſuis centrifugis deſtituerentur, ſeque mutuo non fugerent: ſi modo fluidi vis elaſtica ex particularum viribus centrifugis oriatur, & velocitas adeo magna ſit ut vires non habeant ſatis temporis ad agendum.

Corol. 4. Proinde cùm reſiſtentiæ ſimilium & æquivelocium corporum, in medio cujus partes diſtantes ſe mutuo non fugiunt, (i) ſint ut quadrata diametrorum; ſunt etiam æquivelocium & celerrimè motorum corporum reſiſtentiæ in fluido elaſtico ut quadrata diametrorum quàm proximè.

Corol. 5. Et cùm corpora ſimilia, æqualia & æquivelocia, in mediis ejuſdem denſitatis, quorum particulæ ſe mutuo non fugiunt, ſive particulæ illæ ſint plures & minores, ſive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus impingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & viciſſim (per motûs legem tertiam) æqualem ab eâdem reactionem patiantur, hoc eſt, æqualiter reſiſtantur: manifeſ-

(h) * *Corollarium* 3. Patet per cor. 2. in quo vis T quâ particulæ medii A in quo corpus D movetur ſe fugiunt, qualiſcumque ſupponitur; corporum D & F ubi velociſſimè moventur, reſiſtentiis manentibus æqualibus quam proxime, licet medii C in quo corpus F movetur, particulæ viribus centrifugis prorſus deſtituantur. Patet etiam ex eo quod ſupponatur vires non habere ſatis temporis ad agendum, unde caſus redit ad eum in quo vires illæ nullæ ſunt. 189.

(i) * *Sint ut quadrata diametrorum.* Per 2am. partem dem. prop. hujus, ob datas corporum velocitates & medii denſitatem datam.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XXXIII. Theor. XXVII.

nifeſtum eſt etiam quod in ejuſdem denſitatis fluidis elaſticis, ubi velociſſimè moventur, æquales ſint eorum reſiſtentiæ quam proximè; ſive fluida illa ex particulis craſſioribus conſtent, ſive ex omnium ſubtiliſſimis conſtituantur. Ex medii ſubtilitate reſiſtentia projectilium celerrimè motorum non multum diminuitur.

Corol. 6. Hæc omnia ita ſe habent in fluidis, quorum vis elaſtica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod ſi vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expanſione ad inſtar lanæ vel ramorum arborum, aut ex aliâ quâvis causâ, quâ motus particularum inter ſe redduntur minus liberi: reſiſtentia, ob minorem medii fluiditatem, erit major quàm in ſuperioribus corollariis.

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA XXVIII.

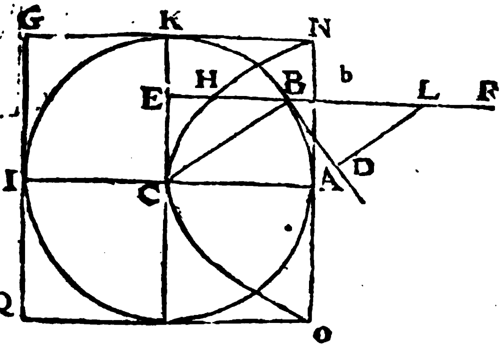
Si globus & cylindrus æqualibus diametris deſcripti, in medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem diſtantias liberè diſpoſitis conſtante, ſecundùm plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit reſiſtentia globi duplo minor quàm reſiſtentia cylindri.

Nam quoniam actio medii in corpus eadem eſt (per legum corol. 5.) ſive corpus in medio quieſcente moveatur, ſive medii particulæ eâdem cum velocitate (k) impingant in corpus quieſcens: conſideremus corpus tanquam quieſcens, & videamus quo impetu urgebitur à medio movente. Deſignet igitur *ABKI* corpus ſphæricum centro *C* ſemidiametro *CA* deſcriptum, & incidant particulæ medii datâ cum velocitate in corpus illud ſphæricum, ſecundum rectas ipſi *AC* parallelas: ſitque *FB* ejuſmodi recta. In eâ capiatur *LB* ſemidiametro *CB* æqualis, & ducatur *BD* quæ ſphæram tangat in *B*. In *KC* &

(k) * *Impingant in corpus quieſcens.* Eadem enim eſt in utroque caſu velocitas reſpectiva, eademque proindè vis percuſſionis (*per dem. in cor. 5. leg. mot.*) idem quoque manifeſtum eſt per motûs Leg. 3. quia fluidum & corpus ob reactionem actioni æqualem & contrariam, in utroque caſu in ſe mutuò agunt.

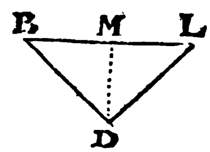
De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. 34. Theor. 28.

& *B D* demittantur perpendiculares *B E*, *L D*, & vis quâ particula medii, ſecundum rectam *FB* obliquè incidendo, globum ferit in *B*, erit ad vim quâ particula eadem cylindrum *ONGQ* axe *ACI* circa globum deſcriptum perpendiculariter feriret in *b*, (l) ut *LD* ad *LB* vel *BE* ad *BC*. Rurſus efficacia hujus vis ad movendum globum ſecundum incidentiæ ſuæ plagam *FB* vel *AC*, eſt ad ejuſdem efficaciam ad movendum globum ſecundùm plagam determinationis ſuæ, id eſt, ſecundùm plagam rectæ *BC* quâ globum directè urget (m) ut *BE* ad *BC*. Et (n) conjunjunctis rationibus, efficacia particulæ in globum ſecundum rectam *FB* obliquè incidentis, ad movendum eundem ſecundùm plagam incidentiæ ſuæ, eſt ad



(l) * *Ut L D ad L B vel B E ad B C.* Si enim recta data L B exponat vim quâ particula medii circularem baſim cylindri perpendiculariter ferit in b, & vis illa (*per leg. cor.* 2.) reſolvatur in vires B D, L D, vis B D juxtà directionem tangentis in B agens nullam efficaciam habet ad globum promovendum & recta L D vim exponet quâ particula medii globulum perpendiculariter ferit in B. Quia verò radius C B, tangenti perpendicularis eſt, & ideo (*per conſtr.*) D L parallela C B, triangula rectangula C E B, B D L, ſimilia ſunt, imo ob B L = C B (*per conſtr.*) æqualia; Eſt igitur L D ad L B ut B E ad B C.

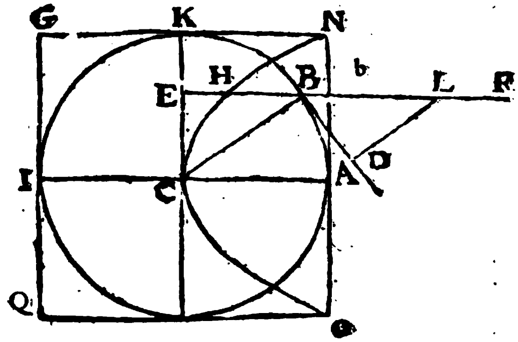
(m) 190. * *Ut B E ad B C.* Vis L D ductâ ex puncto D ad L B perpendiculari D M, iterum reſolvatur in vires L M & M D, & ob triangulorum L M D L D B, ſimilitudinem, erit vis L M ad vim L D, ut L D ad L B, ſeu ut B E ad B C; nulla verò ratio habenda eſt vis M D, cujus directio perpendicularis eſt ad axem A I, quia ſimili conſtructione factâ ad alteram hujus axis partem in puncto ſphæræ



quod puncto B directè oppoſitum eſt, vis M D, vi æquali & directè oppoſitâ eliditur. Unde ſola conſideranda eſt vis L M, quæ ſecundùm directionem axi A I parallelam agit. Eſt autem vis L M ad vim L B quâ particula medii circularem baſim cylindri perpendiculariter ferit in b, ut LD^2 ad LB^2, ob continuè proportionales L M, L D, L B. 190.

(n) * *Conjunctis rationibus.* Et ex æquo.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXIV. THEOR. XXVIII.



ad efficaciam particulæ ejuſdem ſecundum eandem rectam in cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipſum movendum in plagam eandem, ut BE quadratum ad BC quadratum. Quare ſi in bE, quæ perpendicularis eſt ad cylindri baſem circularem NAO & æqualis radio AC, ſumatur bH æqualis $\frac{BE\ quad.}{CB}$: erit bH ad bE ut effectus particulæ in globum ad effectum particulæ in cylindrum. (o) Et propterea ſolidum quod à rectis omnibus bH occupatur erit ad ſolidum quod à rectis omnibus bE occupatur, ut effectus particularum omnium in globum ad effectum particularum omnium in cylindrum. (p) Sed ſolidum prius eſt parabolois vertice C, axe CA & latere recto CA deſcriptum, & ſolidum poſterius eſt cylindrus para-

(o) * *Et propterea ſolidum.* Si in omnibus rectæ N A punctis erigantur perpendicula ut b H & b E, ſitque N H C curva quam punctum H perpetuò tangit, & recta K C locus omnium punctorum E; ſolidum quod perpendiculis omnibus b H, per totam baſim cylindri ductis occupatur, æquale erit conoidi ſeu figuræ ſolidæ quæ ex rotatione figuræ planæ N H C A circà axem C A factâ generatur, & ſolidum quod à rectis omnibus b E occupatur erit cylindrus ex rotatione rectanguli A K circà eandem axem C A factâ deſcriptus.

(p) * *Sed ſolidum prius.* Cùm (*per conſtr.*) ſit $bH = \frac{BE^2}{CB}$ ideoque $bH \times CB = \overline{BE}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CE}^2$ & (ex naturâ circuli) $BC = CA = KC$, ideoque $BE^2 = KC^2 - CE^2$ & $bH \times CB$, ſeu $\overline{KC - EH} \times KC$, ſeu $KC^2 - KC \times EH = KC^2 - CE^2$, ideoque $KC \times EH = CE^2$; ſed ſi ex puncto H duceretur ad C A, ordinata perpendicularis, hæc eſſet æqualis C E, & abſcinderet à C A, partem æqualem E H. Quarè rectangulum ſub abſciſſâ & datâ lineâ K C ſive C A, æquale eſt quadrato ordinatæ ad C A perpendicularis; unde curva C H N, (*per theor. 1. de Parab.*) eſt Parabola cujus vertex C, axis C A, & latus rectum C A.

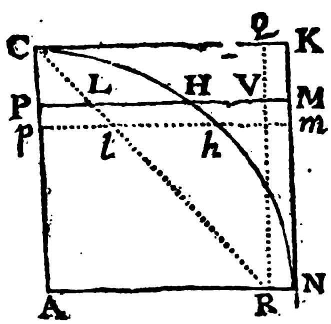
paraboloidi circumſcriptus, & notum eſt (†) quod parabolois ſit ſemiſſis cylindri circumſcripti. Ergo vis tota medii in globum eſt duplo minor quam ejuſdem vis tota in cylindrum. Et propterea ſi particulæ medii quieſcerent, & cylindrus ac globus æquali cum velocitate moverentur, foret reſiſtentia globi duplo minor quàm reſiſtentia cylindri. *Q. E. D.*

Scholium.

(q) Eâdem methodo figuræ illæ inter ſe quoad reſiſtentiam comparari poſſunt, eæque inveniri quæ ad motus ſuos in mediis reſiſtentibus continuandos aptiores ſunt. Ut ſi baſe circulari

(†)* *Et notum eſt quod &c.*

191. *Lemma.* Parabolois ſeu ſolidum ex rotatione Parabolæ C H N, circà axem C A genitum eſt ſemiſſis cylindri circumſcripti, qui producitur ex rotatione rectanguli A K circà latus C A. Per punctum mobile P, erigatur ad axem C A normalis P M, parabolam ſecans in H, & rectam K N in M; & in rotatione figuræ totius circà axem C A, lineæ P H & P M circulos deſcribent, qui erunt inter ſe ut radiorum P H, P M quadrata, ſeu (*ex naturâ Parabolæ*) & ob P M = A N, ut abſciſſæ C P, C A. Ducatur jam punctum P cum verticali P H M per totam altitudinem C A, & ſolidum ex rotatione figuræ C H N genitum erit ad cylindrum ex rotatione rectanguli C K N A ortum, ut ſumma omnium circulorum quos recta mobilis P H rotando deſcribit, ad ſummam omnium circulorum quos deſcribit recta P M, hoc eſt, ut ſumma omnium C P, ad ſummam omnium C A. In lineâ A N; capiatur A R æqualis A C, jungatur C R ſecans P H in L, & erigatur ad A R, perpendicularis R Q, ſecans P M in V; cum ſit ſemper P L = C P, & P V = C A, ſumma omnium C P, ſeu P L, per totam altitudinem C A, eſt triangulum iſoſcele C R A, & ſumma omnium

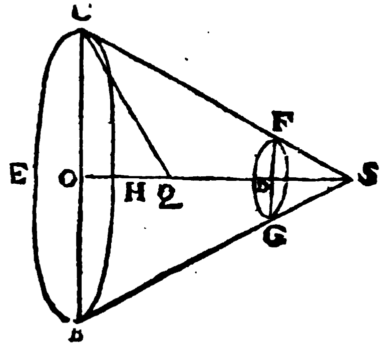


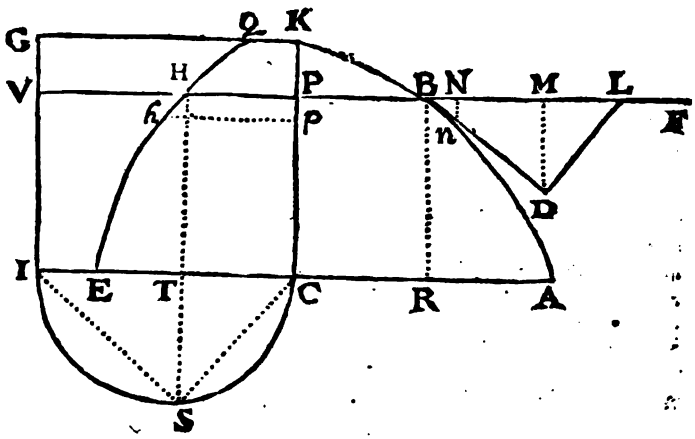
C A, ſeu P V, per eandem altitudinem C A, eſt quadratum C A R Q; cum igitur triangulum C R A, ſit ſemiſſis quadrati C A R Q, Parabolois eſt etiam ſemiſſis cylindri circumſcripti. Q. E. D.

(q) 192. *Eâdem methodo &c.* Solidum

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXIV. THEOR. XXVIII.

lari *CEBH*, quæ centro *O*, radio *OC* deſcribitur, & altitudine *OD*, conſtruendum ſit fruſtum coni *CBGF*, quod omnium eâdem baſi & altitudine conſtructorum & ſecundùm plagam axis ſui verſus *D* progredientium fruſtorum minimè reſiſtatur:





dum ex rotatione curvæ cujuſvis K B A; circà rectam A I poſitione datam genitum in medio reſiſtente moveatur ſecundùm directionem rectæ I A, & oporteat reſiſtentiam quam patitur conferre cum reſiſtentiâ cylindri ſecundùm eandem directionem moti & cujus baſis eſt circulus radio K C ad A C normali deſcriptus. Diametro C I ad arbitrium aſſumptâ deſcribatur ſemicirculus C S I, agatur per punctum I chorda I S, parallela B D curvam tangenti in puncto quovis B; ducatur per B recta B V parallela A I, & per S recta S H parallela C K, ambæ concurrentes in H, ſitque Q H E curva quam punctum H perpetuò tangit; & completo rectangulo CKGI; reſiſtentia ſolidi rotundi per converſionem curvæ K B A circà C A geniti erit ad reſiſtentiam baſis ipſius, ſeu circuli centro C & radio C K deſcripti, ut ſolidum ex rotatione figuræ K Q H E circà C I genitum; ad cylindrum rotatione rectanguli C K G I circà eandem C I factâ deſcriptum. Producatur enim H B ad L, ut ſit B L = C I; ex puncto L demittatur ad B D perpendicularis L D, & ex D ad B L perpendicularis D M; & eodem modo quo ſuprà (190) patet efficaciam particulæ medii ad movendum ſolidum totum K B A ſecundùm plagam incidentiæ ſuæ L B eſſe ad efficaciam particulæ ejuſdem ſecundum eandem rectam in baſim circularem K C, perpendiculariter in P ad cylindrum qui rotatione rectanguli C K G I deſcribitur movendum in plagam eandem, ut eſt LD^2 ad LB^2, ſeu etiam ut eſt L M ad L B; ſed (per conſtr.) C I = L B, & ob angulum S I C = D B L & angulum I S C = B D I, eſt etiam C T ſeu P H = L M; Quarè ſolidum quod à rectis omnibus P H, occupatur,

patur, erit ad ſolidum quod à rectis omnibus P V=C I, occupatur, aut quod idem eſt, ſolidum ex rotatione figuræ C K Q H E circà C I, erit ad cylindrum ex rotatione rectanguli C K G I genitum, ut reſiſtentia ſolidi quod figura C K B A circà C A, rotata deſcribit, ad reſiſtentiam baſeos circularis quam deſcribit recta C K quæ eadem eſt cum reſiſtentiâ cylindri cujuslibet ejuſdem baſis, quia ſuperficies cylindri quam recta K G rotando circà A I deſcribit, nullam reſiſtentiam patitur, ſecundùm directionem motûs ipſi K G parallelam. Q. E. D.

193. Ex conſtructione liquet, ſi recta quæ curvam K B A tangit in A ſit ad axem C A normalis, punctum E coincidere cum puncto I, & ſi recta tangens curvam K B A, in K perpendicularis ſit ad K C, punctum Q in quo curva E H ſecat latus K G coincidere cum puncto K.

194. Ex puncto B demittatur ad C A perpendicularis B R, dicaturque $CI=a$, $AR=x$, $BR=HT=CP=y$, $HP=CT=z$, $BM=dx$, N n perpendicularis ad B L curvæque occurrens in $n=dy$, ac proindè $Bn^2=dx^2+dy^2$. Et quoniam triangula B n N, I C S, ſimilia ſunt (*per conſtr.*) erit $Bn^2:Nn^2=CI^2:CS^2=CI:CT$, hoc eſt, $dx^2+dy^2:dy^2=a$ z. Et propereà $ady^2=zdx^2+zdy^2$, formula per quam ex datâ æquatione ad curvam K B A, inveniri poteſt æquatio ad curvam alteram E H Q & contrà; nam quoniam $CP=y$, ſi loco dx eruatur ex æquatione curvæ K B A ejus valor in y & dy habebitur æquatio quæ continebit z, y & dy ſive C P, P H & fluxionem P C, cum conſtantibus.

195. Ducta ſit ordinata p h alteri P H infinitè propinqua, & ſi radius ſit ad peripheriam circuli ut unitas ad numerum p, erit py peripheria circuli quem linea P C circà axem C I, rotando deſcribit, ideòque annulus cylindricus quem arcus P H h p in eâdem convolutione deſcribit, erit $pzydy$, & inde ſolidum ex rotatione figuræ C P H E, genitum, erit S. $pzydy$, fluente hâc ità ſumptâ ut factâ $y=0$ ea evaneſcat. Quare cùm cylindrus convolutione rectanguli C P V I, deſcriptus ſit $\frac{1}{2}payy$, reſiſtentia ſolidi ex revolutione figuræ A B R geniti, erit ad reſiſtentiam baſeos ipſius circuli radio B R deſcripti ut S. $pzydy$ ad $\frac{1}{2}payy$, ſeu ut S. $zydy$ ad $\frac{1}{2}ayy$.

196. Sit K B A ellipſis vel hyperbola cujus vertex A axis principalis A I. Sit ſemiaxis principalis $=b$, ſemilatus rectum $=c$, $AR=x$, $RB=y$, & erit $byy=2bcx-cxx$ æquatio ad ellipſim; & $byy=2bcx+cxx$, æquatio ad hyperbolam. Prioris æquationis fluxio $bydy=bcdx-cxdx$, ex quâ habetur $dx^2=\frac{b^2y^2dy^2}{(bc-cx)^2}$ 196.

$$=\frac{by^2dy^2}{b^2cc-2bccx+ccxx}=\frac{by^2dy^2}{bcc-cyy}.$$

Hinc æquatio (194) $ady^2=zdx^2+zdy^2$, in hanc abit * $ady^2=\frac{zby^2dy^2}{-cy^2+bcc}+zdy^2$ ſive dividendo per dy^2 & ad communem denominatorem revocando utrumque æquationis membrum fit $-acy^2+abcc=by^2z-cy^2z+bccz$ ergo eſt $z=\frac{-acy^2+abcc}{\overline{b-c}\times y^2+bcc}$ & factâ diviſione $z=$

$$\frac{-ac}{b-c}+\frac{ab^2c^2}{(b-c)\times)\overline{b-c}\times y^2+bcc)}$$ unde

erit $zydy=\frac{-acydy}{b-c}+\frac{ab^2c^2ydy}{(b-c)\times(\overline{b-c}\times y^2+bcc)}$ ſumptiſque fluentibus eſt S. $zydy=$

$$\frac{-acy^2}{2(b-c)}+\frac{ab^2c2}{2(b-c)^2}\text{L.}\overline{\overline{b-c}\times y^2+bcc}$$

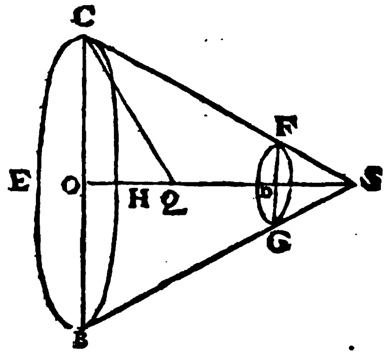
$+Q$ *conſt.* (ut patebit ſi hujus quantitatis fluxio ſumatur): Facta autem $y=0$ erit $0=\frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2}\text{L. }bcc+Q$ *conſt.* ideoque Q *conſt.* $=-\frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2}\text{L.}bcc$, unde tandem habetur $S.\,zydy=-\frac{acy^2}{2(b-c)}+\frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2}$ $(\text{L.}\overline{\overline{b-c}\times y^2+bcc}-\text{L.}bcc)$ ſive S. $zydy$

$$=-\frac{acy^2}{2(b-c)}+\frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2}\text{L.}\frac{\overline{b-c}\times y^2+bcc}{bcc},$$

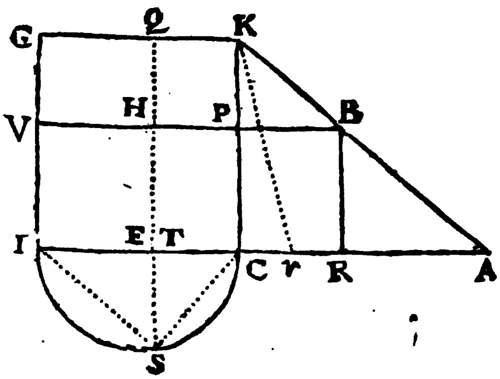
Eſt ergo reſiſtentia conoidis Elliptici A B R ad reſiſtentiam ſuæ baſeos, ſeu circuli radio B R deſcripti ut $-\frac{cy^2}{2(b-c)}+\frac{b^2c^2}{2(b-c)2}$ $\text{L.}\frac{\overline{b-c}\times y^2+bcc}{bcc}$ ad yy. Pro conoide

Hy-

(r) biſeca altitudinem $O\,D$ in Q & produc $O\,Q$ ad S ut ſit $Q\,S$ æqualis $Q\,C$, & erit S vertex coni cujus fruſtum quæritur.



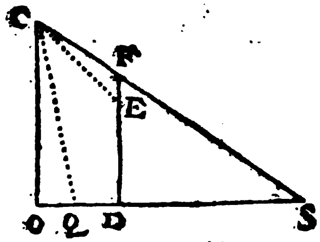
Hyperbolico, invenietur $a\,dy^2 = \frac{z b y^2 dy^2}{cy^2 + bcc} + z\,dy^2$ unde eodem iterato calculo prodibit ratio ejus reſiſtentiæ ad reſiſtentiam baſeos ut $+\frac{cy^2}{2(b+c)} + \frac{b^2c^2}{2(b+c)^2} \times$ L. $\frac{\overline{b+c} \times y^2 + bcc}{bcc}$ ad y^2. Pro conoide Parabolico, fiat in formulâ reſiſtentiæ Conoidis Elliptici axis b Infinitus, cæteriſque terminis in quibus b non occurrit deletis, erit. Conoidis Parabolici reſiſtentia ad reſiſtentiam ſuæ Baſeos ut $\frac{b^2c^2}{2b^2} \times$ L. $\frac{by^2 + bcc}{bcc}$ ad y^2, ſive ut c^2 L. $\frac{y^2 + cc}{cc}$



197. Sit KBA linea recta, & quia chorda IS parallela eſt rectæ KA, (192) punctum H eſt ſemper in lineâ rectâ THQ, ideóque reſiſtentia coni revolutione trianguli KAC circà AC geniti erit ad reſiſtentiam circuli radio CK deſcripti, ut cylindrus ex rotatione rectanguli CKQL ad cylindrum ex rotatione rectanguli CKGI circà CI, id eſt, ob communem utriuſque cylindri baſim, ut altitudo CT ad altitudinem CI; & eſt CT ad CI, in ratione duplicatâ CS ad CI vel KC ad KA, ſeu in ratione duplicatâ ſinûs anguli KAC ad ſinum totum. Simili modo reſiſtentia coni quem recta BA rotata deſcribit eſt ad reſiſtentiam circuli radio BR deſcripti in eâdem ratione duplicatâ KC ad KA; & (dividendo) reſiſtentia annuli conici quem recta KB, circà CA rotata deſcribit eſt ad reſiſtentiam annuli circularis quem in eâdem convolutione deſcribit recta KP in eâdem duplicatâ ratione KC ad KA. Reſiſtentia verò coni truncati convolutione figuræ KBR circà CR, geniti, eſt ad reſiſtentiam baſeos ipſius ſive circuli radio CK, deſcripti ut ſolidum quod figura CKQHVI, circà CI rotando deſcribit, ad cylindrum ex rotatione rectanguli CKGI ortum. Eſt autem ſolidum prius ſumma duorum cylindrorum, revolutione rectangulorum CKQT & THVI circa CI productorum, hoc eſt, (ob areas circulorum radiorum quadratis proportionales) ut ſumma $CK^2 \times CT + CP^2 \times TI$.

(r) 198.* *Biſeca altitudinem &c.* Datis CK & CR invenienda ſit poſitio rectæ KB ut

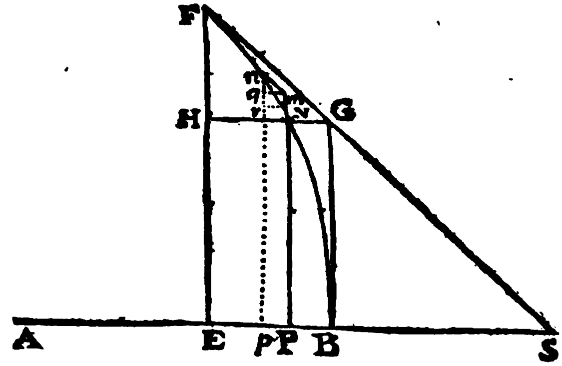
(f) Unde obiter, cùm angulus *CSB* ſemper ſit acutus, con-



ut reſiſtentia fruſti conici quod per revolutionem figuræ KBR circà CA producitur ſit omnium minima. Reſiſtentia illa eſt ut $CK^2 \times CT + CP^2 \times TI$; ſed $KA^2 : CK^2 = CI : CT = \frac{CK \times CI}{KA^2}$; & ſimiliter $KA^2 : CA^2 = CI : TI = \frac{CA^2 \times CI}{KA^2}$. Quarè ob datam CI, reſiſtentia coni truncati erit ut $\frac{CK^4 + CP^2 \times CA^2}{KA^2}$. Dicantur $KC = b$, $CR = 2c$, $CA = x$, ideóque $KA^2 = bb + xx$, & quia $CA\,(x) : KC\,(b) = RA\,(x - 2c) : BR$, ſeu CP, erit $CP = \frac{bx - 2cb}{x}$, & indè reſiſtentia coni truncati erit ut $\frac{b^4 + (bx - 2cb)^2}{bb + xx} = \frac{b^4 + b^2x^2 - 4b^2cx + 4c^2b^2}{bb + xx} = bb + \frac{4bbcc - 4bbcx}{bb + xx}$. Capiatur hujus quantitatis fluxio & (40) ponatur nihilo æqualis, fiet $-\frac{4bbcdx}{bb+xx} - 2xdx\frac{(4bbcc - 4bbcx)}{(bb+xx)^2} = 0$, ſive $\frac{1}{bb+xx} - \frac{2cx - 2xx}{(bb+xx)^2} = 0$, ideoque $-bb - xx - 2cx + 2xx = 0$, undè habetur $xx - 2cx = bb$, & indè eruitur $x = c + \sqrt{bb + cc}$. Biſeca igitur altitudinem CR in r, ut ſit $Cr = c$, & juncta $Kr = \sqrt{bb + cc}$, erit x, ſeu $CA = Cr + Kr$, ſicut NEWTONUS in conſtructione poſuit. 198.

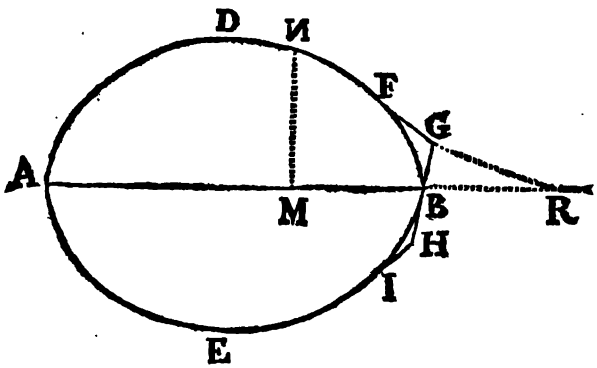
(f) 199. * *Undè obiter*. Angulus externus (*vid. fig. textûs*) æqualis eſt ſummæ angulorum æqualium QCS & QSC, id eſt, angulo CSB; & quia COQ rectus eſt, angulus CQO ideoque & æqualis CSB, eſt ſemper acutus. Altitudo OD quam minima evadat tandemque evaneſcat; & quoniam (*in hâc hypoth.*) rectæ OC, OS, QS, CQ æquales fiunt, angulus CSO, & æqualis DFS fit ſemirectus, ejuſque complementum ad duos rectos DFC grad. 135. Ducatur ad FD recta quælibet CE & evaneſcente OD reſiſtentia coni truncati quem figura CFD circà OS rotata deſcribit, erit in ſuo genere minima (198), ideóque minor quam reſiſtentia coni truncati ex revolutione figuræ CED circà OS geniti; ſubducatur utrinquè reſiſtentia circuli quem recta DE rotando deſcribit; & reſiſtentia ſuperficiei ex rotatione figuræ CFE circà OS, minor erit quam reſiſtentia annuli conici quem in eâdem revolutione deſcribit recta CE.

(t) conſequens eſt, quod ſi ſolidum *ADBE*, convolutione figuræ ellipticæ vel ovalis *ADBE* circa axem *AB* factâ generetur, & tangatur figura generans à rectis tribus *FG*, *GH*, *HI* in punctis *F*, *B* & *I*, eâ lege ut *GH* ſit perpendicularis ad axem in puncto contactus *B*, & *FG*, *HI* cum eâdem *GH* contineant angulos *FGB*, *BHI* graduum 135, ſolidum, quod convolutione



(t) 200. *Conſequens eſt.* Ut hæc conſequentia pateat, demonſtrandum eſt reſiſtentiam ſuperficiei quæ per rotationem figuræ F G B circà axem A B gignitur, minorem eſſe reſiſtentiâ ſuperficiei quam in eâdem revolutione arcus F B, deſcribit. Ductis itaquè ad curvam ordinatis verticalibus & infinitè propinquis P N, p n, & ex puncto n ad P N productam rectâ n m, parallelâ F G, atquè ex m & N in p n perpendicularibus m q, N r; dicantur F E ad axem A B normalis $= b$, G B $= c$, B P $= x$, P N $= y$, & quia productâ F G ut axi occurrat in s, eſt ob angulos E F S, B G S ſemirectos (*per hyp.*) E S $=$ F E $= b$, & B S $=$ G B $=$ c, erit E B $= b - c$. Eſt quoquè P p $=$ m q $=$ q n $= dx$, r n $= dy$, & hinc q r $= dy - dx$, ac proindè P m $= y + dy - dx$, & p n $= y + dy$. Vis particulæ fluidi in G B perpendiculariter incidentis ſit $= a$, & radius circuli ad peripheriam ut 1 ad p; his poſitis, reſiſtentia circuli radio P N deſcripti exponi poterit (195) per $\frac{1}{2}payy$; reſiſtentia circuli radio P m deſcripti per $\frac{1}{2}pa(y + dy - dx)^2 = \frac{1}{2}payy + paydy - paydx$, neglectis ſcilicet terminis qui reſpectu $paydy$ & $paydx$, evaneſcunt. Hinc reſiſtentia annuli circularis quem recta N m, rotando deſcribit, exponetur per differentiam $paydy - paydx$. Reſiſtentia circuli radio p n deſcripti erit ut $\frac{1}{2}pa(y + dy)^2 = \frac{1}{2}payy + paydy$, ex quâ ſi auferatur reſiſtentia circuli radio P m deſcripti, remanebit reſiſtentia annuli circularis ex rotatione rectæ q n geniti $= paydx$ & cum ſit (197), n m^2 ad n q^2, ſeu F S^2 ad F E^2, ſive 2 ad 1, ut illius annuli reſiſtentia ad reſiſtentiam ſuperficiei ex revolutione rectæ n m genitæ, hæc reſiſtentia erit ut $\frac{1}{2}paydx$. Quare reſiſtentia ſuperficiei quam figura n m N circà E B rotata deſcribit, exponatur per quantitatem $paydy - \frac{1}{2}paydx$, &, ſumptis fluentibus, harum reſiſtentiarum ſumma per totum arcum B N exponetur per $\frac{1}{2}payy - \frac{1}{2}pa \times$ B N P aream, cui nihil addendum eſt nec ſubducendum; cum factâ $y = 0$, hæc fluens evaneſcat, ut oportet. Si verò loco y ſcribatur b, ſeu F E, reſiſtentia om-

tione figuræ *ADFGHIE* circa axem eundem *AB* generatur, minus reſiſtitur quam ſolidum prius, ſi modo utrumque ſecundum plagam axis ſui *AB* progrediatur, & utriuſque termi-



nus *B* præcedat. Quam quidem propoſitionem in conſtruendis navibus non inutilem futuram eſſe cenſeo.

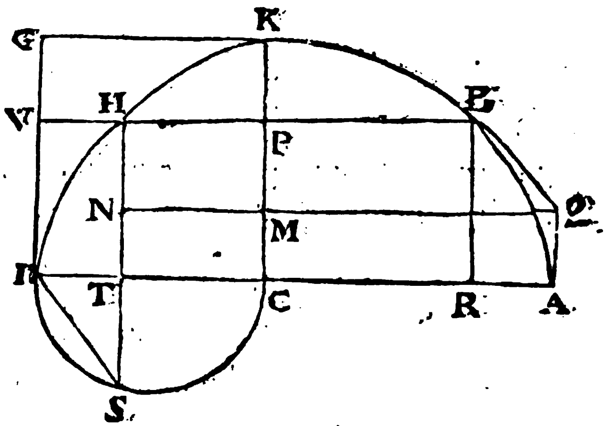
omnium ſuperficierum quæ ex rotatione figurarum n m N, per totum arcum F B, deſcriptarum generarentur, erit ut $\frac{1}{2}pabb - \frac{1}{2}pa \times$ B N F E aream.

Porrò reſiſtentia circuli radio G B deſcripti exponenda eſt per $\frac{1}{2}pacc$, & reſiſtentia circuli radio F E deſcripti per $\frac{1}{2}pabb$; ideóque ductâ G H ad F E normali, reſiſtentia annuli circularis ex rotatione rectæ F H, per $\frac{1}{2}pabb - \frac{1}{2}pacc$; undè cum ſit FS^2 ad FE^2, ſeu 2 ad 1 ut annuli illius reſiſtentia ad reſiſtentiam ſuperficiei ex rotatione rectæ F G, hæc reſiſtentia erit ut $\frac{1}{4}pabb - \frac{1}{4}pacc$, totaque proindè reſiſtentia coni truncati ex rotatione figuræ F G B geniti exponetur per $\frac{1}{4}pabb + \frac{1}{4}pacc$. Quarè reſiſtentia omnium ſuperficierum quas figuræ n m N, per totum arcum B N F diſtributæ rotando deſcribunt, eſt ad reſiſtentiam fruſti conici ex revolutione figuræ F G B orti ut $\frac{1}{2}pabb - \frac{1}{2}pa \times$ B N F E, ad $\frac{1}{4}pabb + \frac{1}{4}pacc$; ſive dividendo per $\frac{1}{4}pa$, ut $2bb - 2$ B N F E ad $bb + cc$. Si area B N F E æqualis eſſet trapezio B G F E, cùm hoc ſit $= \frac{1}{2}$ E B $\times \overline{\text{F E} + \text{B G}} = \frac{bb - cc}{2}$, foret $2bb - 2$ B N F E $= bb + cc$; 200. ideóque prædictæ reſiſtentiæ duæ æquales eſſent; ſed trapezium B G F E majus eſt areâ B N F E, quæ (per hyp.) tota in trapezio continetur; & propterea quantitas $2bb - 2$ B N F E, major eſt quantitate $bb + cc$; reſiſtentia igitur omnium ſuperficierum ex rotatione figurarum n m M, ſuperat reſiſtentiam coni truncati ex revolutione figuræ F G B producti. Verùm (199) reſiſtentia ſuperficiei quam figura n m N circà E B rotando deſcribit, minor eſt reſiſtentiâ ſuperficiei quam in eadem rotatione deſcribit n N; ideòque reſiſtentia omnium ſuperficierum quas figuræ n m N, per totum arcum B N F diſtributæ rotando deſcribunt, minor eſt reſiſtentiâ totius ſuperficiei ex rotatione arcûs B N F genitæ. Ergò reſiſtentia coni truncati per rotationem figuræ F G B deſcripti minor quoque eſt quam reſiſtentia ſuperficiei ex rotatione arcûs B N F productæ. Q. E. D.

201. Quæcumque igitur ſit figura (in textu) A N B, regularis vel irregularis,

modò arcus F B concavitatem axi A B obvertat, & totus intrà lineas F G, B G contineatur, per hanc NEWTONI propoſitionem inveniri ſemper poteſt alia figura majoris capacitatis & minoris reſiſtentiæ; Quod in conſtruendis navibus uſum habere poteſt. Reſiſtentia adhuc minuitur ſi loco circuli radio G B deſcripti adjungatur conus quem recta G R, ad axem productum utcumque ducta rotando deſcribit. In omnibus autem curvis, quæ æquatione inter abſciſſas x & ordinatas y definiuntur, faciliimè invenitur punctum B per quod ducta tangens angulum ſemirectum cum ordinatâ perpendiculari conſtituit. Quia in illo puncto B, ordinatæ fluxio dy æqualis eſt fluxioni abſciſſæ dx ut ſi æquatio ad curvam ſit $a^2x = y^3$, & ſumptis fluxionibus $a^2dx = 3y^2dy$, ponendo $dx = dy$, habetur $a^2 = 3y^2$, & hinc $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, undè per æquationem

$a^2x = y^3$, invenitur $x = \frac{1}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$.



PROBLEMA.

202. Datâ curvâ K B A quam recta Q A ad axem C A perpendicularis tangit in A, invenire punctum B per quod ſi ducatur tangens altera B Q priori Q A occurrens in Q, reſiſtentia ſolidi per convolutionem figuræ K B Q A, circà axem C A deſcripti ſit in ſuo genere minima.

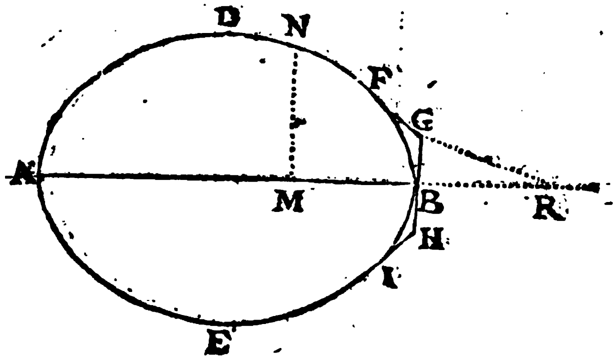
Eâdem conſtructione quâ ſuprà (192) factâ; ex puncto Q ducatur ad H T perpendicularis Q N ſecans K C in M dicanturque C I $= a$, A R $= x$, B R ſeu P C $= y$, P H ſeu T C $= z$, Q A $= v$, & peripheria circuli radio 1 deſcripti $= p$. His poſitis reſiſtentia ſolidi ex revolutione arcûs B A circà axem C A geniti exponi poteſt per $S.pzydy$, (195); reſiſtentia verò coni truncati ex rotatione figuræ B Q A circà C A, per $\frac{1}{2}pavv + \frac{1}{2}pyyz - \frac{1}{2}pvvz$ Sit R reſiſtentia datæ ſolidi ex rotatione arcûs totius K B A geniti, & reſiſtentia ſuperficiei quam in eâdem rotatione deſcribit arcus K B, erit $R - S.pzydy$; ideòque reſiſtentia ſolidi per rotationem figuræ K B Q A, erit $R - S.pzydy + \frac{1}{2}pavv + \frac{1}{2}pyyz - \frac{1}{2}pvvz$. Hujus quantitatis fluxio nihilo æqualis fiat (40) & ob datam R, habebitur $-pzydy + pavdv + pzydy + \frac{1}{2}pyydz - pzvdv - \frac{1}{2}pvvdz = 0$; undè invenitur $(z-a)2vdv = (yy-vv)dz$. Cùm igitur ſit etiam (194) $ady^2 = zdx^2 + zdy$, ex his æquationibus & ex æquatione ad curvam K B A, invenientur valores litterarum x, y, v, ſeu R A, R B, & A Q. Q. E. I.

Exempli causâ. Sit K B A parabola, cujus vertex A, axis A C, latus rectum $= 4c$, & ideò $4cx = yy$, erit A Q $= v = \frac{1}{2}y$, ex naturâ Tangentis Parabolæ, $\frac{1}{4}yy = cx = vv$, $cdx = 2vdv$, $yy - vv = 3cx$. $ydy = 2cdx$, $dy^2 = \frac{cdx^2}{x}$. Undè æqua-

tio

(u). Quòd ſi figura $DNFG$, ejuſmodi ſit curva, ut, ſi ab ejus puncto quovis N ad axem AB demittatur perpendiculum NM, & à puncto dato G ducatur recta GR quæ parallela ſit rectæ figuram tangenti in N, & axem productum ſecet in R, fuerit MN ad GR ut GR *cub.* ad $4\, BR \times GBq$; ſolidum quod figuræ hujus revolutione circa axem AB factâ deſcribitur, in medio raro prædicto ab A verſus B movendo, minus reſiſtetur quam aliud quodvis eâdem longitudine & latitudine deſcriptum ſolidum circulare.

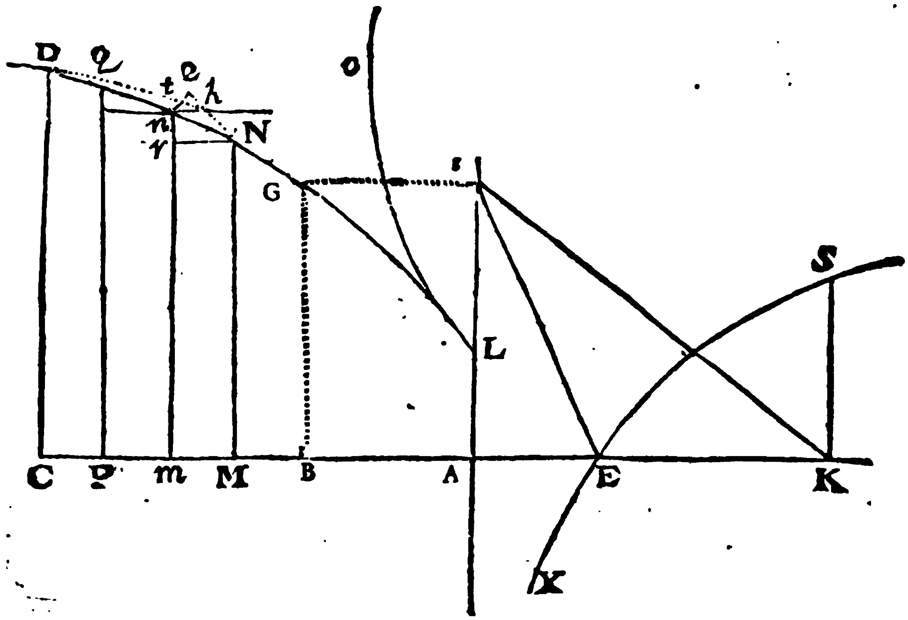
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXIV. THEOR. XXVIII.



tio $a\,dy^2 = z\,dx^2 + z\,dy^2$, in hanc mutatur $\frac{ac\,dx^2}{x} = z\,dx^2 + \frac{cz\,dx^2}{x}$, ex quâ habetur $z = \frac{ac}{c+x}$, & $dz = \frac{-ac\,dx}{(c+x)^2}$. Ex his verò omnibus æquatio $(z-a)\,2v\,dv = (yy - vv)\,dz$, in hanc migrat $-\frac{acx\,dx}{c+x} = -\frac{3acc\,x\,dx}{(c+x)^2}$, ſive $1 = \frac{3c}{c+x}$, ex quâ eruitur $x = 2c$; & hinc $y = 2c\sqrt{2}$; & $z = \frac{1}{3}a$. Quarè cùm ſit a ad z, in ratione duplicatâ ſinûs totius ad ſinum anguli B Q M; erit $\sqrt{3}$ ad 1 ut ſinus totus ad ſinum anguli B Q M; qui proindè eſt 35°. 16′, angulus Q B R, 54°. 44′ & angulus B Q A 125°. 46′. 2023

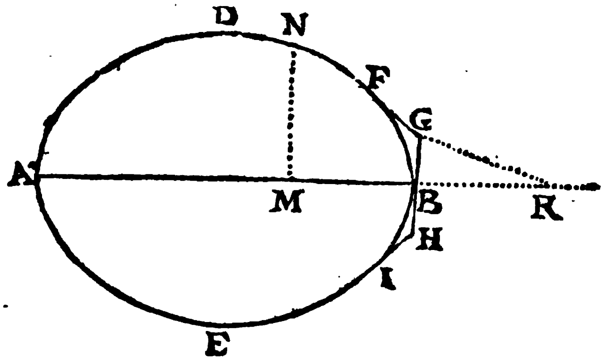
(u) 203. *Quòd ſi figura &c.* Invenienda

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXIV. THEOR. XXVIII.



ſit curva L D, quæ circà axem C B rotata deſcribat ſuperficiem ſolidi quod in fluido motum ſecundùm axis directionem à C verſus B, minorem patiatur reſiſtentiam quàm ſolidum quodvis aliud per puncta L & D pari ratione deſcriptum & ſimiliter motum. Ex punctis curvæ infinitè propinquis N, n, Q, demittantur ad axem C B ordinatæ N M, n m, P Q & ad n m, Q P, perpendicula N r, n s. Sit p peripheria circuli cujus radius eſt unitas, & data a vim exponat quâ ſingulæ fluidi particulæ in rectam N M perpendiculariter incurrunt. His poſitis reſiſtentia annuli circularis quem recta n r, circà axem C B rotata deſcribit, exponi poteſt, ut ſuprà, per $\frac{1}{2}pa(nm^2 - NM)^2$ ſeu per $pa\,NM \times nr$, ob $nm^2 - NM^2 = \overline{nm \times NM} \times \overline{nm - NM} = 2MN \times nr$. Et quia nN^2 eſt ad nr^2 ut reſiſtentia illa ad reſiſtentiam ſuperficiei quam linea n N circà C B rotata deſcribit (196) hæc reſiſtentia erit ut $\frac{pa \times MN \times nr^3}{nN^2}$; eodemque modo patet reſiſtentiam ſuperficiei ex rotatione lineæ Q n genitæ exponi poſſe per $\frac{pa \times mn \times QS^3}{Qn^2}$. Fingatur curvam hanc in aliam mutari Q h N inter puncta N, Q ductam & Q S, n r tanquam magnitudine datas aſſumi variantibus N r, & n s, dicanturque conſtantes $MN = b$, $mn = c$, $nr = f$, $Qs = g$ & variabiles $Nn = v$, $nQ = z$, $Nr = m$, $ns = n$, & reſiſtentia ſuperficiei quam arculus Q n N circà C B rotando deſcribit, exponetur per $\frac{pabf^3}{vv} + \frac{pacg^3}{zz}$, ſi curva Q n N ſit ea quæ minimam reſiſtentiam patitur, hujus quantitatis fluxio (40 & per hyp.) nihilo æquanda eſt, & indè habetur $-\frac{2pabf^3vdv}{v^4} - \frac{2pacg^3zdz}{z^4} = 0$. Productâ ergo lineâ s n, uſque ad novum punctum h, ad quod ducuntur lineæ N h, Q h, in has cadant perpendicula n e, n t, & evaneſcente n h, erit $th = dz$ & $eh = -dv$. Quia verò, evaneſcente n h triangula n e h, n r N, & n t h, Q s n, ſimilia ſunt; erit N n (v) : N r (m) = n h : e h ($-dv$),

&



& $sn(nv):Qn(z)=th(dz):nh$; ideòque ex æquo, $nv:mz=dz:-dv=\frac{mzdz}{nv}$. Loco $-dv$, ſcribatur hic ipſius valor in æquatione modò inventâ, & illa in hanc migrabit $\frac{2pabf^3mzvdz}{nv^3}=\frac{2pacg^3zdz}{z^4}$, & hinc fit $\frac{2pabf^3m}{v^4}=\frac{2pacg^3}{z^4}$ ſeu $\frac{2pa\times MN\times nr^3\times Nr}{Nn^4}=\frac{2pa\times mn\times Qs^3\times ns}{Qn^4}$. Undè maniſeſtum eſt quantitatem * $\frac{MN\times nr^3\times Nr}{Nn^4}$ pro quolibet curvæ puncto N, datam ſeu conſtantem eſſe.

* Quæ quidem curva D N F G (*vide figuram textus*) talis eſſe debet, ut angulus quem facit in G cum lineâ B G ſit ſemirecti complementum per notam 200. illic ergo linea B G data, eſt ipſa ordinata M N & Triangulum nRN eſt Rectangulum æquicrurum, ideoque $Nr=nr$ & $Np^2=2nr^2$ ergo quantitas conſtans $\frac{MN\times nr^3\times Nr}{Nn^4}$ in hanc abit $\frac{GB\times nr^4}{4nr^4}=\frac{GB}{4}$. Talis ergo eſt hujus curvæ natura ut quovis in puncto ducatur ordinata M N ſit ſemper $\frac{MN\times nr^3\times Nr}{Nn^4}=\frac{GB}{4}$, ſive ponendo pro MN, y; pro nr, dy; pro Nr, dx; pro Nn^2, dx^2+dy^2, erit $\frac{ydy^3dx}{dx^2+dy^2}=\frac{GB}{4}$: ſive adhibendo conſtructionem Newtoni, ſi ducatur G R Tangenti Parrallela, ob triangula G B R, n r N ubique ſimilia, erit $\frac{GB}{GR}=\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ & $\frac{BR}{GR}=\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ ideoque $\frac{GB^3\times BR}{GR^4}=\frac{dy^3dx}{dx^2+dy^2}$ & $\frac{MN\times GB^3\times BR}{GR^4}=\frac{GB}{4}$ ſive $MN\times GB^2\times 4BR=GR^4$ unde eſt $MN:GR=GR^3:GB^2\times 4BR$. Q. E. D. 203.

Dicatur $GB=a$, fiet $\frac{y^3dy^3dx}{(dx^2+dy)^2}=\frac{a}{4}$ ideoque $4ydxdy^3=a(dx^2+dy)^2$; ex quâ curvæ L N D per Logarithmicam conſtructio eruitur. Ponatur $dx=\frac{zdy}{a}$, & hoc valore loco dx in æquatione ad curvam ſubſtituto, habetur $\frac{4yzdy^4}{a}=\frac{a(zz+aa)^2dy^4}{a^4}$, undè invenitur $y=\frac{(zz+aa)^2}{4a^2z}=\frac{z^3}{4aa}+\frac{1}{2}z+\frac{aa}{4z}$, & (ſumptis fluxionibus) $dy=\frac{3z^2dz}{4aa}+\frac{1}{2}dz-\frac{aadz}{4zz}$; loco dy ſcribatur hic ipſius valor in æquatione aſſumptâ $dx=\frac{zdy}{a}$, &

fit

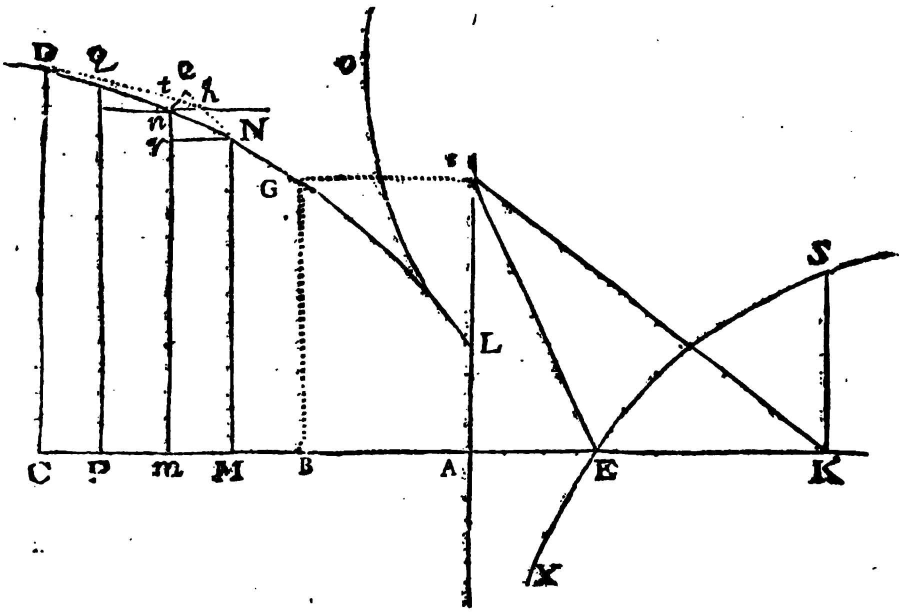
fit $dx = \frac{3z^3dz}{4a^3} + \frac{zdz}{2a} - \frac{adz}{4z}$, ſumptiſque fluentibus $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{1}{4}aL.z + Q$ *conſt.* Porrò ſi ſtatuatur abſciſſæ initium in loco B, ubi ordinata BL eſt omnium minima, id eſt (40) ubi $dy = 0$ quo ſuppoſito, fit $\frac{3z^2dz}{4aa} + \frac{1}{2}dz - \frac{aadz}{4zz} = 0$, ideoque $3z^2 + 2aa = \frac{a^4}{z^2}$ & $z^4 + \frac{2}{3}a^2z^2 = \frac{1}{3}a^4$ unde habetur $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ (& $y = \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$), ſubſtituto hoc valore loco z, in æquatione quæ dat abſciſſæ x valorem, habebitur ex Hypotheſi initium axeos eritque $x = 0 = \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}aL.a\sqrt{\frac{1}{3}} + Q$ *conſt.* & ideo $Q = -\frac{5a}{48} + \frac{1}{4}aL.a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

* Erit igitur abſciſſa $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}a \times \overline{L.z - L.a\sqrt{\frac{1}{3}}}$ & ut habeatur origo abſciſſarum, notandum quod ordinata in B ſive GB æqualis ſit a, ex ſuprà demonſtratis; cùm itaque ſit ubique $y = \frac{(zz+aa)^2}{4a^2z}$ erit in eo puncto $a = \frac{(zz+aa)^2}{4a^2z}$ ex quâ æquatione ſi eruatur valor z invenietur $z = a$, ac per conſequens erit $x = \frac{3a^4}{16a^3} + \frac{aa}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}aL.\frac{a}{a\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{a}{3} - \frac{1}{4}aL.\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{a}{3} - \frac{1}{4}a \times L.\sqrt{3}$. Deſcribatur ergo Logarithmica XV, Aſymptoto YZ & ſubtangente æquali $\frac{1}{4}$GB, ſive $\frac{1}{4}a$, in quâ ſumatur ubivis ordinata pm, quæ producatur in r donec pr = 3 pm, ducatur ad Logarithmicam rt quæ ſit Aſymptoto parallela, erit $\frac{1}{2}$rt æqualis Logarithmo $\sqrt{3}$ in Logarithmica cujus ſubtangens $\frac{1}{4}a$, itaque $\frac{GB}{3} - \frac{1}{2}rt = x$, quo valore tranſlato ex B ad A in axe producto habetur A origo abſciſſarum: In eo puncto A erectâ perpendiculari ALg, deſcribatur Logarithmica SX cujus ea ſit recta ALg Aſymptotos, & $\frac{1}{4}$GB ſive $\frac{1}{4}a$ ſubtangens, & quæ producto axe in E ut ſit $AE = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ tranſeat per punctum E & ſumptâ AR magnitudinis arbitrariæ pro z, ductâque RS parallelâ BL Logarithmicæ occurrente in S capiatur abſciſſa AM, ſeu $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} \mp RS$ nimirum $-RS$, cum eſt $AR > AE$, & $+RS$ ubi $AR < AE$; ac deinique erigatur ordinata MN, ſeu $y = \frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$; punctum N erit in curvâ quæſitâ LD. Quod ut pateat, demonſtrandum ſupereſt, eſſe $\mp RS = -\frac{1}{4}a\overline{L.z - L.a\sqrt{\frac{1}{3}}}$. Hoc autem manifeſtum eſt, nam RS, eſt differentia logarithmorum correſpondentium quantitatibus AR & AE, ſive z & $a\sqrt{\frac{1}{3}}$) ſumptorum in Logiſticâ cujus ſubtangens eſt $\frac{1}{4}a$, & hæc differentia poſitiva eſt, ubi AR (z) > AE ($a\sqrt{\frac{1}{3}}$) negativa ubi AR (z) < AE ($a\sqrt{\frac{1}{3}}$), & nulla, cùm ſit AR = AE, ſeu $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, ut oportet. Quarè cùm AR ſuperat AE, eſt $-RS = -\frac{1}{4}a \times \overline{L.z - L.a\sqrt{\frac{1}{3}}}$, & ubi AE ſuperat AR, fit $+RS = -\frac{1}{4}a\overline{L.z - L.a\sqrt{\frac{1}{3}}}$. Eſt igitur ſemper $\mp RS = -\frac{1}{4}a\overline{L.z - L.a\sqrt{\frac{1}{3}}}$.

204. Datâ minimâ ordinatâ AL, curva LND, deſcribi poteſt. Nam cùm ſit (*ex dem.*) $AL = \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}AE$, & GB ſive $Ag = a$, datâ AL dantur Ag, AE, & ſubtangens Logarithmicæ quæ proindè poterit deſcribi.

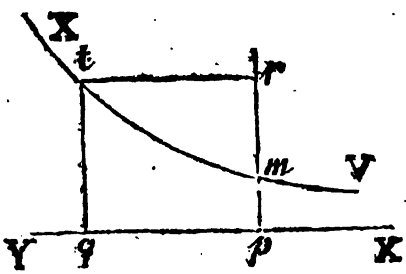
205. Datis duabus ordinatis MN & CD magnitudine, curva deſcribi poteſt. Si enim in æquatione $y = \frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$ loco y ſcribantur ſeorſim datæ MN, & CD dabuntur z & a undè dabitur minima ordinata $AL = \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

206. Datâ ordinatâ quâlibet CD cum abſciſſa correſpondente CA, curva deſcribi poteſt. Si enim in æquatione $y =$ (zz



$\frac{(zz + aa)^2}{4aaz}$, loco y ſcribatur data C D; habebitur z per a & datas quantitates; deindè ſi in æquatione alterâ $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}a\overline{L.z - La\sqrt{\frac{1}{3}}}$, loco x ſubſtituatur data C A & loco z, ejus valor per a & datas inventus, dabitur æquatio inter a & datas quantitates, & ex hâc æquatione invenietur linea a, quâ datâ, datur ordinata minima A L.

207. Recta g R, parallela eſt tangenti per punctum N ductæ. Eſt enim (per conſtr.) $dx = \frac{z\,dy}{a}$, ideoque n r (dy) : r N (dx) = g A (a) : A R (z) ex quâ proportione & propter angulum rectum in r, & in A, patet triangula n r N, g A R, ſimilia eſſe, & propterea g R parallelam in N, ſeu tangenti per N ductæ. Hinc cum A E ſit æqualis $a\sqrt{\frac{1}{3}} = z$ ubi $z = 0$ (103) erit g E tangenti per L ductæ parallela, ſitque A g = a eſt g E$^2 = \frac{a^2}{3} +$



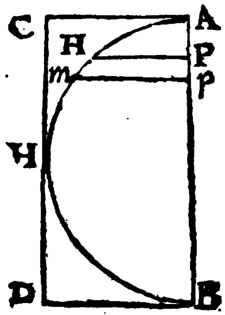
$a^2 = \frac{4a^2}{3}$; atquè adeo g E $= 2a\sqrt{\frac{1}{3}} = 2$ A E erit g E ad A E ut 2, ad 1, & itâ ſinus totus ad ſinum anguli A g E, ſivè ad ſinum anguli quem curva conſtituit cum minimâ ordinatâ A L, qui proindè eſt 30°. 207.

208. Quoniam A R, in infinitum creſcere ac decreſcere poteſt ſi capiatur ſemper A R > B E, deſcribetur curvæ ramus L N D, qui concavitatem axi B C obvertit, & ab utroque axe A C, A g, in infinitum recedit; at ſi ſemper ſumatur B R < B E, deſcribetur alter curvæ ramus LO,

qui priori L D convexitatem offert, & ab utroque axe B C, B G, in infinitum abſcedit; curva igitur D L O punctum regreſſûs habet in L, & ſolidum minimæ reſiſtentiæ ex ejus circà axem A C revolutione genitum, convexum vel concavum, & partim convexum, partim concavum eſſe poteſt.

209. Quoniam $dx = \frac{z\,dy}{a}$, erit areæ curvæ elementum $y\,dx = \frac{zy\,dy}{a}$, elementum arcus curvæ $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy\sqrt{aa+zz}}{a}$, elementum ſuperficiei à curvâ circà axem A C rotatâ genitæ $= \frac{2py\,dy\sqrt{aa+zz}}{a}$ (ſi p ſit ſemiperipheria circuli cujus radius eſt unitas); elementum ſolidi in eâdem revolutione deſcripti $= \frac{pzy^2\,dy}{a}$; & reſiſtentia ſuperficiei $\frac{2py\,dy\sqrt{aa+zz}}{a}$, erit $\frac{a\,dy^2}{dx^2+dy^2}y\,dy = \frac{a\,dy^2}{dy^2 \times \overline{aa+zz}}y\,dy$ ſive ut $\frac{y\,dy}{aa+zz}$. Porrò ſi in his fluxionibus loco y, & dy, ſubſtituantur ipſarum valores qui ex æquationibus $y = \frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$, & $dy = \frac{3z^2\,dz}{4aa} + \frac{1}{2}dz - \frac{aa\,dz}{4zz}$ habentur, fluens $S.\, y\,dx$, ſeu area curvæ inveniri poterit algebraicè, aliæ verò fluentes ab hyperbolæ quadraturâ pendent.

Schol. Quæ ad ſolidum minimæ reſiſtentiæ ſpectant, ea ferè omnia mutuati ſumus ex Illmo. Marchione *Hoſpitalio*, tum in Act. Lipſienſ. an. 1699, tum in Monum. Pariſ. ejuſdem anni. De eodem ſolido plurima etiam dederunt celeb. viri *Joh. Bernoull.* in Act. Lipſ. an. 1699. 1700. *Hermannus* in Phoronomiâ, & *Facio* ad calcem libri de murorum inclinatione &c. Sed qui totam hanc NEWTONI propoſitionem maximâ univerſalitate pertractatam habere volunt, legant tractatum à Clariſſ. *Bouguero* editum, & ab Academiâ Regiâ Pariſienſi an. 1727. præmio condecoratum, cui titulus; *De la mâture des Vaiſſeaux*, nec non *Monum. Pariſ.* an. 1733. in quibus elegantiſſima & univerſaliſſima legitur ultimæ Scholii *Newtoniani* partis ſolutio. Rem à clariſſ. Autore demonſtratam hic obſervatu digniſſimam judicamus, videlicet, ſolidum rotundum cujus conſtructionem modò dedimus, in quâlibet hujus ſolidi directione & juxtà quamlibet fluidi impulſionem, minimam omnium pati reſiſtentiam, exceptis quibuſdam caſibus qui in navigationis praxi vix unquam occurrunt, cum ſcilicet directio ſolidi majores angulos cum axe conſtituit; & quod mirum eſt, in his caſibus, ſolidum illud quod erat minimæ reſiſtentiæ & navigationi aptiſſimum, ſolidum maximæ reſiſtentiæ & ad uſum navigationis omnium minime idoneum evadit. Quæ verò ad univerſalem ſolidorum in fluidis reſiſtentiam pertinent, peti poſſunt ex aureo *Joh. Bernoullii* libello qui inſcribitur: *Eſſai d'une Nouvelle Theorie de la manœuvre des Vaiſſeaux*, & ex *Hermanni* Phoronomiâ.



210. Lemma. *Sphæra eſt ad cylindrum circumſcriptum ut duo ad tria.* Sphæra generatur per revolutionem ſemicirculi A H B circà diametrum A B, & cylindrus ſphæræ circumſcriptus per revolutionem rectanguli A C B D, cujus latera A C, B D circuli radio ſunt æqualia. Ductis ordinatis infinitè propinquis P M, p m, dicantur A C $= r$, ſemiperipheria A H B $= p$, A P $= x$, P p $= dx$, & quia circulorum areæ ſunt in ratione duplicatâ radiorum, erit quadratum radii C A, ſeu rr, ad aream circuli A H B, nempè rp, ut M P², ſeu $2rx - xx$ ad aream circuli radio P M deſcripti, quæ ideò erit $2px - \frac{pxx}{r}$; & hinc

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA VII.

Si medium rarum ex particulis quam minimis quieſcentibus æqualibus & ad æquales ab invicem diſtantias liberè diſpoſitis conſtet: invenire reſiſtentiam globi in hoc medio uniformiter progredientis.

Caſ. 1. Cylindrus eâdem diametro & altitudine deſcriptus progredi intelligatur eâdem velocitate ſecundum longitudinem axis ſui in eodem medio. Et ponamus quòd particulæ medii, in quas globus vel cylindrus incidit, vi reflexionis quam maximâ reſiliant. Et cùm reſiſtentia globi (per propoſitionem noviſſimam) ſit duplo minor quam reſiſtentia cylindri, & globus ſit ad cylindrum ut duo ad tria, & cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas, ipſaſque quàm maximè reflectendo, (x) duplam ſui ipſius velocitatem ipſis communicet: cylindrus, quo tempore dimidiam longitudinem axis ſui uniformiter progrediendo deſcribit, communicabit motum particulis, (y) qui ſit ad totum cylindri motum ut denſitas medii ad denſitatem cylindri; & globus, quo tempore totam longitudinem diametri ſuæ uniformi-

ſolidum ex rotatione elementi P M m p; circà A B genitum, erit $2px\,dx - \frac{pxx\,dx}{r}$, ſumptiſque fluentibus, ſolidum ex rotatione ſegmenti circularis A M P ortum, erit $pxx - \frac{px^3}{3r}$, & factâ A P = A B, ſeu $x = 2r$, ſphæra tota habetur $= 4prr - \frac{8}{3}prr = \frac{4}{3}prr$. Sed cylindrus ſphæræ circumſcriptus eſt factum ex areâ circuli radio A C deſcripti in cylindri altitudinem A B, ſeu eſt $2prr$. Quarè ſphæra eſt ad cylindrum circumſcriptum ut $\frac{4}{3}prr$ ad $2prr$, id eſt, ut 4 ad 6, ſivè ut 2 ad 3. Q. E. D.

(x) * *Duplam ſui ipſius velocitatem* &c. Cùm ſingulæ particulæ, cylindri reſpectu, minimæ ſint, ſi nulla eſſet particularum medii reflexio, eâdem cum cylindro velocitate moverentur; ac accedente vi reflexionis perfectâ, velocitas illa duplicatur (53. lib. 1.). 210.

(y) * *Qui ſit ad totum cylindri motum* &c. Quantitates motûs ſunt ut velocitates & maſſæ conjunctim; maſſæ verò ſunt ut volumina & denſitates; ideòque quantitates motûs ut velocitates & volumina & denſitates conjunctim. Cùm igitur cylindrus quo tempore dimidiam longitudinem axis ſui uniformiter progrediendo deſcribit, medii volumen dimidio volumini cylindri æquale duplâ cum velocitate moveat, ſitque proindè factum ex volumine cylindri in ipſius velocitatem æquale facto ex volumine medii moto in ejus velocitatem, motus particulis medii communicatus, erit ad totum cylindri motum ut denſitas medii ad denſitatem cylindri.

miter progrediendo deſcribit, (z) communicabit motum eundem particulis; (a) & quo tempore duas tertias partes diametri ſuæ deſcribit, communicabit motum particulis, qui ſit ad totum globi motum ut denſitas medii ad denſitatem globi. Et propterea globus reſiſtentiam patitur, quæ ſit ad vim quâ totus ejus motus vel auferri poſſit vel generari quo tempore duas tertias partes diametri ſuæ uniformiter progrediendo deſcribit, ut denſitas medii ad denſitatem globi.

Caſ. 2. Ponamus quòd particulæ medii in globum vel cylindrum incidentes non reflectantur; & cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas ſimplicem ſuam velocitatem ipſis communicabit, ideoque reſiſtentiam patitur duplo minorem quàm in priore caſu, & reſiſtentia globi erit etiam duplo minor quàm prius.

Caſ. 3. Ponamus quòd particulæ medii vi reflexionis neque maximâ neque nullà, ſed mediocri aliquâ reſiliant à globo; & reſiſtentia globi erit in eâdem ratione mediocri inter reſiſtentiam in primo caſu & reſiſtentiam in ſecundo. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc ſi globus & particulæ ſint infinitè dura, & vi omni elaſticâ, & propterea etiam vi omni reflexionis deſtituta: reſiſtentia globi erit ad vim quâ totus ejus motus vel auferri poſſit vel generari, quo tempore globus quatuor tertias partes diametri ſuæ deſcribit, ut denſitas medii ad denſitatem globi.

Cor.

(z) * *Communicabit motum eundem particulis*, ob reſiſtentiam globi reſiſtentiâ cylindri duplo minorem (prop. 34. lib. 2.)

(a) *Et quo tempore duas tertias partes &c.* * Huc redit compoſitio rationum à NEWTONO indicata: Totus Globi motus eſt ad Cylindri motum, ut 2 ad 3, hæc enim eſt utriuſque maſſæ ratio; Totus Cylindri motus eſt ad motum à cylindro communicatum quo tempore dimidiam ſuam longitudinem deſcribit, ut denſitas Cylindri (ſive Globi) ad denſitatem medii, motus ille à cylindro communicatus idem eſt cum motu à Globo communicato dum totam ſuam Diametrum percurrit; Denique motus ille a Globo communicatus dum totam ſuam Diametrum percurrit eſt ad motum ab eo Globo communicatum dum percurrit duas Diametri ſuæ tertias partes ut 3 ad 2, Ideoque totus Globi motus eſt ad motum ab eo communicatum dum percurrit duas Diametri ſuæ partes conjunctim ut 2 ad 3; ut denſitas Globi ad denſitatem medii, & ut 3 ad 2, ſive primâ ratione & hâc ultimâ ſeſe compenſantibus ut denſitas Globi ad denſitatem medii. Q. E. D.

Corol. 2. (b) Reſiſtentia globi, cæteris paribus, eſt in duplicatâ ratione velocitatis.

Corol. 3. (†) Reſiſtentia globi, cæteris paribus, eſt in duplicatâ ratione diametri.

Corol. 4. Reſiſtentia globi, cæteris paribus, eſt ut denſitas medii.

Corol. 5. Reſiſtentia globi eſt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatis & duplicatâ ratione diametri & ratione denſitatis medii.

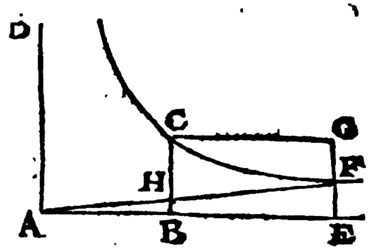
Corol. 6. Et motus globi cum ejus reſiſtentia ſic exponi poteſt. Sit AB tempus quo globus per reſiſtentiam ſuam uniformiter continuatam totum ſuum motum amittere poteſt. Ad

AB

(b) * *Reſiſtentia globi cæteris paribus eſt in duplicata ratione velocitatis.* * Sint globi æquales in eodem medio moti diversâ cum velocitate; motus totus uniuſcujuſque eſt ad motum ab ipſo communicatum tempore quo duas tertias ſuæ Diametri percurrit, ut Denſitates globorum ad denſitates mediorum, ideoque ex hypotheſi in eâdem ratione, ergo etiam velocitas unius eſt ad velocitatem alterius ut motus ab illis communicati temporibus quibus duas tertias ſuarum Diametrorum (æquales quippe longitudines) percurrunt. Dividantur illa tempora in partes minimas utrinque æquales, & quia Reſiſtentia ſingulis momentis, ejuſdem Globi reſpectu, uniformis cenſetur, Reſiſtentiæ momentaneæ erunt directè ut motus amiſſi & inversè ut tempora quibus amittuntur, ſed motus amiſſi ſunt ut velocitates directè & tempora ſunt inversè ut velocitates, quia æquales longitudines percurruntur motibus qui uniformes; ſaltem quam proximè, cenſentur, ergo reſiſtentiæ momentaneæ ſunt bis ut velocitates, hoc eſt in ratione duplicatâ velocitatis. 210

(†) * *Reſiſtentia globi cæteris paribus eſt in duplicatâ ratione Diametri.* * Sint globi æquiveloces, æque denſi, in eodem medio moti, ſed diverſæ ſint earum Diametri, fingantur duo Cylindri ejuſdem cum iis Diametri, & etiam æquiveloces & æque denſi, reſiſtentiæ quas patientur Cylindri ſingulis momentis erunt ut numerus partium in quas incurrunt, illi verò numeri partium ſunt ut Quadrata Diametrorum: Sed facile liquet reſiſtentias Cylindrorum & globorum æquivelocium, ejuſdem Diametri, in eodem medio eſſe in datâ ratione, ergo ut reſiſtentia unius Cylindri ad reſiſtentiam alterius, ita reſiſtentia unius Globi ad reſiſtentiam alterius, ſunt ergo Globorum reſiſtentiæ ut Quadrata Diametrorum.

AB erigantur perpendicula *AD*, *BC*. Sitque *BC* motus ille totus, & per punctum *C* aſymptotis *AD*, *AB* deſcribatur hyperbola *CF*. Producatur *AB* ad punctum quodvis *E*. Erigatur perpendiculum *EF* hyperbolæ occurrens in *F*. Compleatur parallelogrammum *CBEG*, & agatur *AF* ipſi *BC* occurrens in *H*. Et ſi globus tempore quovis *BE*, motu ſuo primo *BC* uniformiter continuato, in medio non reſiſtente deſcribat ſpatium *CBEG* per aream parallelogrammi expoſitum, idem in medio reſiſtente deſcribet ſpatium *CBEF* per aream hyperbolæ expoſitum, & motus ejus in fine temporis illius exponetur per hyperbolæ ordinatam *EF*, amiſsâ motus ejus parte *FG*. (c) Et reſiſtentia ejus in fine temporis ejuſdem exponetur per longitudinem *BH*, amiſsâ reſiſtentiæ parte *CH*. Patent hæc omnia *per corol.* 1. *&* 3. *prop.* v. *lib. II.*



Corol. 7. Hinc ſi globus tempore T per reſiſtentiam R uniformiter continuatam amittat motum ſuum totum M: idem globus tempore *t* in medio reſiſtente per reſiſtentiam R in duplicatâ velocitatis ratione decreſcentem, (d) amittet motus ſui M partem $\frac{tM}{T+t}$, manente parte $\frac{TM}{T+t}$; & deſcribet ſpatium quod ſit ad ſpatium motu uniformi M eodem tempore *t* deſcrip-

(c) *Et reſiſtentia ejus in fine &c.* Reſiſtentia ſub initio ubi velocitas eſt BC, exponatur per eandem lineam BC, & quia reſiſtentiæ ſunt ut velocitatum quadrata, atque BC ad FE, ut velocitas ſub initio ad velocitatem in fine temporis BE ad FE^2 ut BC ad lineam quæ reſiſtentiam exponit in fine temporis BE, ideòque linea hæc $= \frac{FE^2}{BC}$. Sed (*per theor.* 4. *de hyp.*) & ob ſimilitudinem triangulorum ABH, AEF, eſt BC : FE = AE : AB = FE : HB, & hinc $HB = \frac{FE^2}{BC}$. Quare recta HB exponet reſiſtentiam in fine temporis BE, & proindè recta CH partem amiſſam reſiſtentiæ illius quæ ſub initio exponebatur per lineam BC.

(d) * *Amittet motûs ſui partem &c.* Pars motûs M in fine temporis *t* reſidua dicatur *m*, & quia (ex dem.) T : t = AB : BE, & hinc T × t : T = AE : AB, & prætereà M : *m* = CB : FE = AE : AB; erit T × t : T = M : *m*, unde habetur $m = \frac{MT}{T+t}$, & inde motûs *M* pars amiſſa eſt $M - \frac{MT}{T+t} = \frac{tM}{T+t}$.

ſcriptum, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2, 302585092994 eſt ad numerum $\frac{t}{T}$, (e) propterea quod area hyperbolica *BCFE* eſt ad rectangulum *BCGE* in hâc proportione.

Scholium.

In hâc propoſitione expoſui reſiſtentiam & retardationem projectilium ſphæricorum in mediis non continuis, & oſtendi quod hæc reſiſtentia ſit ad vim quâ totus globi motus vel tolli poſſit vel generari quo tempore globus duas tertias diametri ſuæ partes velocitate uniformiter continuata deſcribat, ut denſitas medii

(e) * *Propterea quod area hyperbolica.* Dicantur A B $= a$, B C $= b$, B E $= x$, A E $= a + x$; & quia (*theor.* 4. *de hyp.*) F E $= \frac{ab}{a+x}$, elementum areæ C F E B, erit $\frac{a b d x}{a+x}$, & area ipſa C F E B $= a b$ S. $\frac{dx}{a+x}$, quæ fluens ità ſumenda eſt ut evaneſcat ubi fit $x = 0$, ſed fluens S. $\frac{dx}{a+x}$ ità ſumpta eſt logarithmus numeri $\frac{a+x}{a}$, deſumptus ex logiſticâ cujus ſubtangens eſt unitas, aut quod idem eſt, ex hyperbolâ cujus dignitas unitati æqualis eſt (382. *lib.* 1. & 40. *lib.* 2.); Si enim ponatur $x = 0$, numerus $\frac{a+x}{a}$, evadit $=1$, & ideò L. $\frac{a+x}{a} = 0$. Quarè area B C F E $= a b$ L. $\frac{a+x}{a}$; rectangulum verò B C G E $= b x$. Eſt ergò area hyperbolica B C F E ad rectangulum B C G E, ut $a b$ L. $\frac{a+x}{a}$ ad $b x$, hoc eſt, dividendo per $a b$, ut L. $\frac{a+x}{a}$ ad $\frac{x}{a}$. Verum (ex dem. & hyp.) $\frac{a+x}{a} = \frac{T+t}{T}$, & $\frac{x}{a} = \frac{t}{T}$; Quare area Hyperbolica B C F E, eſt ad rectangulum B C G E, ut L. $\frac{T+t}{T}$ ad $\frac{t}{T}$. Supereſt igitur inveniendus logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$, per logarithmicam cujus ſubtangens eſt unitas. Porrò ejuſdem numeri logarithmi diverſæ ſpeciei ſunt inter ſe in datâ ratione (38) & numerus 2, 302585092994 eſt logarithmus numeri denarii ſumptus in logarithmicâ cujus ſubtangens eſt unitas, & ejuſdem numeri denarii logarithmus in tabulis ſumptus eſt 1, 0000000 $= 1$; Quarè ut 1, ad 2, 302585092994, ità logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ in tabulis ſumptus ad logarithmum ejuſdem numeri ſumptum in logarithmicâ cujus ſubtangens eſt unitas, vel in Hyperbolâ cujus dignitas eſt 1; habetur ergò logarithmus quæſitus, ſi logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ ex tabulis ſumptus multiplicetur per numerum 2, 302585092994.

210

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXV. PROBL. VII.

medii ad denſitatem globi, ſi modo globus & particulæ medii ſint ſummè elaſtica & vi maximâ reflectendi polleant: quodque hæc vis ſit duplo minor ubi globus & particulæ medii ſunt infinitè dura & vi reflectendi prorſus deſtituta. In mediis autem continuis qualia ſunt aqua, oleum calidum, & argentum vivum, in quibus globus non incidit immediatè in omnes fluidi particulas reſiſtentiam generantes, ſed premit tantum proximas particulas & hæ premunt alias & hæ alias, reſiſtentia eſt adhuc duplò minor. Globus utique in hujuſmodi mediis fluidiſſimis reſiſtentiam patitur quæ eſt ad vim quâ totus ejus motus vel tolli poſſit vel generari quo tempore, motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri ſuæ deſcribat, ut denſitas medii ad denſitatem globi. Id quod in ſequentibus conabimur oſtendere.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA VIII.

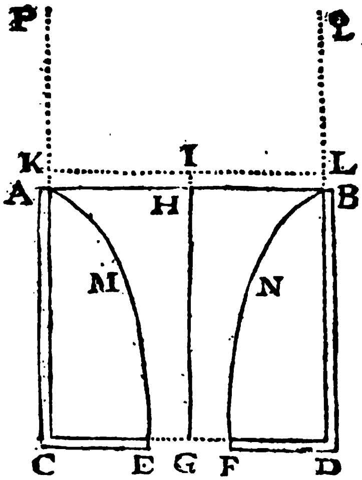
Aquæ de vaſe cylindrico per foramen in fundo factum effluentis definire motum.

Sit *ACDB* vas cylindricum, *AB* ejus orificium ſuperius, *CD* fundum horizonti parallelum, *EF* foramen circulare in medio fundi, *G* centrum foraminis, & *GH* axis cylindri horizonti perpendicularis. Et finge cylindrum glaciei *APQB* ejuſdem eſſe latitudinis cum cavitate vaſis, & axem eumdem habere, & uniformi cum motu perpetuo deſcendere, & partes ejus quam primum attingunt ſuperficiem *AB* liqueſcere, & in aquam converſas gravitate ſuâ defluere in vas; & cataractam vel columnam aquæ *ABNFEM* cadendo formare, & per foramen *EF* tranſire, idemque adæquatè implere. Ea verò ſit uniformis velocitas glaciei deſcendentis ut & aquæ contiguæ in circulo *AB*, quam aqua cadendo (f) & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IH* acqui-

(f) * *Et caſu ſuo deſcribendo altitudinem* IH. Hâc igitur Hypotheſi idem præſtatur ac ſi in loco A B nova ſuperficies aquæ continuò crearetur, cum motu initiali qualem cadendo ex altitudine I H ſingula ejus ſuperficiei particula acquirere potuiſſet, & deinde particulæ aquæ è loco A B vi propriæ gravitatis cadendo ſeſe mutuò attrahe-

DE MOTU CORPORUM, LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVI. PROBL. VIII.

quirere poteſt; & jaceant IH & HG in directum, & per punctum I ducatur recta KL horizonti parallela & lateribus glaciei occurrens in K & L. Et velocitas aquæ effluentis per foramen EF (g) ea erit quam aqua cadendo ab I & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG acquirere poteſt. (h) Ideoque per theoremata *Galilæi* erit IG ad IH in duplicatâ ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo AB, hoc eſt,



in duplicatâ ratione circuli AB ad circulum EF; (i) nam hi circuli ſunt reciprocè ut velocitates aquarum quæ per ipſos eodem tempore & æquali quantitate, adæquatè tranſeunt. De velocitate aquæ horizontem verſùs hîc agitur. Et motus horizonti parallelus, quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cùm non oriatur à gravitate, nec motum horizonti perpendicularem à gravitate oriundum mutet, hic non conſideratur. Supponimus quidem quod partes aquæ aliquantulum cohærent, & per cohæſionem ſuam inter cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos, ut unicam tantum efforment cataractam & non in plures cataractas dividantur; ſed motum horizon-

horent horizontaliter ad cataractam vel columnam A B N F E M formandam.

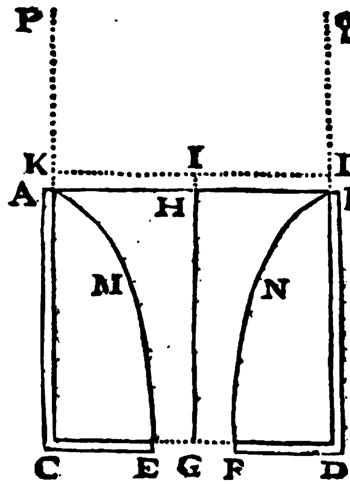
(g) * *Ea erit quam aqua* (per hyp).

(h) * *Ideoque per theoremata Galilæi.* 28. lib. 1.

(i) 271. *Nam hi circuli* &c. Quoniam aqua per totam cataractam A B N F E M, eodem ſemper tenore fluere ſupponitur, neceſſe eſt ut eadem aquæ quantitas per ſingulas cataractæ ſectiones axi I G perpendiculares, ſeu per ſingulos circulos A B, M N, E F horizonti parallelos eodem tempore tranſeat. Nam ſi dato tempore major vel minor aquæ copia per circulum A B quàm per circulum M N tranſiret; 271
aqua inter illos circulos vel intumeſceret vel decreſceret, & cataractæ figuram mutaret (contrà Hyp.). Quantitas aquæ per circulum quemlibet M N, dato tempore fluentis æquatur cylindro aqueo, cujus baſis eſt circulus M N, & altitudo eſt æqualis longitudini quam ſuperficies aquæ M N, cum velocitate acquiſitâ uniformiter progrediendo eodem tempore dato deſcriberet; & longitudo illa eſt ut aquæ per circulum M N fluentis velocitas (5, *lib.* 1.) & ideo quantitas aquæ

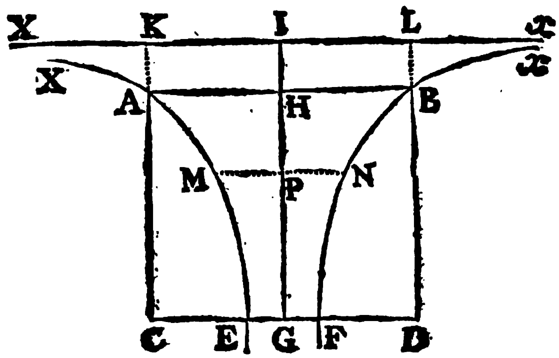
rizonti parallelum, à cohæſione illâ oriundum, hic non conſideramus.

Caſ. 1. Concipe jam cavitatem totam in vaſe, in circuitu aquæ cadentis *ABNFEM*, glacie plenam eſſe, ut aqua per glaciem tanquam per infundibulum tranſeat. Et ſi aqua glaciem tantùm non tangat, vel, quod perinde eſt, ſi tangat & per glaciem propter ſummam ejus polituram quam liberrimè & ſine omni reſiſtentiâ labatur; hæc defluet per foramen *EF* eâdem velocitate



ac

per circulum M N dato tempore fluentis; eſt ut circulus M N & velocitas conjunctim. Quarè cùm data ſit quantitas aquæ per ſingulos circulos dato tempore tranſeuntis; circulus M N eſt reciprocè ut velocitas aquæ quæ per ipſum tranſit. Q. E. D.



272. His ità conſtitutis; facile eſt cataractæ figuram geometricè definire. Secet M N axem I G in P; & quia altitudo I P eſt in duplicatâ ratione velocitatis aquæ in P, hæc vero velocitas eſt inverſe ut circulus M N, & denique circulus M N eſt in ratione duplicatâ radii M P, & ideo I P ſeu abſciſſa in ratione quadruplicatâ inverſa radii ſeu ordinatæ M P; ſive I P ut $\frac{1}{MP^4}$, & ideo $MP^4 \times IP$, quantitas data. Eſt igitur curva E M A, Hyperbola quarti gradûs, aſymptotos habens I G, I K, quibus convexitatem obvertit. Producantur arcus E M A, & aſymptotus I K

ad

ac prius, (k) & pondus totum columnæ aquæ *ABNFEM* impendetur in defluxum ejus generandum uti prius, & fundum vaſis ſuſtinebit pondus glaciei columnam ambientis.

Liqueſcat jam glacies in vaſe; & effluxus aquæ, quoad velocitatem, idem manebit ac prius. (l) Non minor erit, quia glacies in aquam reſoluta conabitur deſcendere: non major, quia glacies in aquam reſoluta non poteſt deſcendere niſi impediendo deſcenſum aquæ alterius deſcenſui ſuo æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

Sed foramen in fundo vaſis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus eſſe debet quàm prius. Nam

ad partes X in infinitum, & figura EAXXIG circà aſymptotum ſeu axem I G, rotata cataractam deſcribet in infinitum ad partes X, x, productam; figura verò EMAHG, hanc cataractæ partem quæ intra vas ABDC, continetur, generabit.

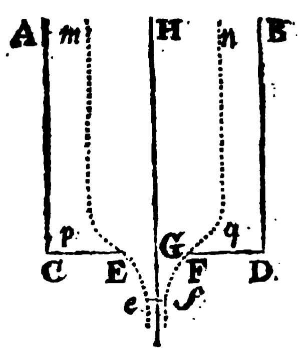
273. Tota cataracta E A X x B F, æquatur cylindro cujus baſis eſt circulus E F, & altitudo 2 I G. Sint enim altitudo I G $=x$, ordinata E G $=y$, a linea data, & (272) $x=\frac{a^5}{y^4}x$, ideoque $y^4=a^5$ æquatio ad Hyperbolam E M A X. Et ſi ſemiperipheria circuli cujus radius eſt unitas, dicatur p, erit circuli E F area $=pyy$, & cylindrus E G $\times$ 2 I G $=2pyyx=\frac{2pa^5}{yy}$. Cùm verò ſit $x=\frac{a^5}{y^4}$, ac proindè $dx=-\frac{4a^5dy}{y^5}$, cataractæ elementum $pyydx=-\frac{4pa^5dy}{y^3}=-4pa^5y^{-3}dy$, & ſumptis fluentibus, tota cataracta ad aſymptotum uſque X x producta, erit $=\frac{2pa^5}{yy}=2$ E F $\times$ I G. Q. E. D.

(k) 274. *Et pondus totum &c.* Pondus quidem totum columnæ aquæ A B N F E M in defluxum ejus generandum impenditur; attamen totum aquæ motum non generat, cùm motûs illius pars pendeat à motu ſuperficiei A B, quæ (per hyp.) eam habet velocitatem quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem I H acquirere poteſt. Sed totum aquæ defluxum mathematicè conſiderare poſſumus tanquam genitum pondere aquæ totius, quæ in cataractâ E A X x B F, uſque ad aſymptotum X x producta continetur, quæque æqualis eſt cylindro aqueo baſi E F & altitudine 2 I G, deſcripto (273). 274.

(l) * *Non minor erit quia glacies in aquam reſoluta conabitur deſcendere*, atquè ità aquæ deſcenſum accelerare; *non tamen major erit, quia glacies in aquam reſoluta*, ob reactionem actioni æqualem & contrariam, *non poteſt deſcendere, niſi impediendo deſcenſum aquæ alterius deſcenſui ſuo æqualem.* Idem igitur manet in aquâ totâ ad deſcendendum & per foramen E F effluendum conatus. At *eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.*

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVI. PROBL. VIII.

(m) Nam particulæ aquæ jam non tranſeunt omnes per foramen perpendiculariter; ſed à lateribus vaſis undique confluentes & in foramen convergentes, obliquis tranſeunt motibus; & curſum ſuum deorſum flectentes in venam aquæ exilientis conſpirant, quæ exilior eſt paulo infra foramen quàm in ipſo foramine, exiſtente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel $5\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$ quam proximè, ſi modò diametros rectè dimenſus ſum. Parabam utique laminam planam pertenuem in medio perforatam, exiſtente circularis foraminis diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exilientis, cadendo accelleraretur & acceleratione redderetur anguſtior, hanc laminam non fundo ſed lateri vaſis effixi ſic, ut vena illa egrederetur ſecundùm lineam horizonti parallelam. Dein ubi vas aquâ plenum eſſet, aperui foramen ut aqua efflueret; & venæ diameter, ad diſtantiam quaſi dimidii digiti à foramine quàm accuratiſſimè menſurata, prodiit partium viginti & unius quadrageſimarum digiti. (n) Erat igitur diameter foraminis hujus cir-



(m) * *Nam particulæ aquæ &c.* Clariſſ. *Daniel Bernoullius* paragr. 3. Sect. 4ª. *Hydrodynamicæ* obſervavit particulas ceræ hiſpanicæ aquis innatantes ità cum aquâ in vaſe moveri, ut quæ foraminis centro G imminent, per lineam verticalem H G, deſcendant, aliæ verò omnes utrinque poſitæ motu fere verticali deſcendant primùm per lineas m p, n q, fere ad fundum uſque C D, tumque curſum ſuum verſus foramen E F per lineas P E, q F ſenſim inflectant. Itaque vena aquæ exilientis E F f e duplici de causâ contrahitur uſque in e f paulo infra foramen E F. Prima contractionis illius cauſa eſt acceleratio motûs, quæ omnibus gravibus cadentibus communis eſt, & quâ fit ut major ſit volocitas aquæ in loco inferiori e f quàm in ſuperiore E F; quia enim aquam eſſe in ſtatu manente, eandemque proindè (271) illius quantitatem per ſectiones E F & e f, eodem tempore effluere ſupponimus, ſectio e f eſt ad ſectionem E F in ratione velocitatis aquæ in loco E F, ad ejus velocitatem in loco e f (271) & ideo ſectio e f, cæteris paribus, minor eſſe debet ſectione E F. Secunda contractionis venæ cauſa, quam ſolam hic conſiderat NEWTONUS, eſt obliquitas motûs particularum aquæ per lineas P E, q F, ad foramen E F tendentium; hinc enim fit, ut ſeclusâ etiam omni acceleratione motûs à gravitate ortâ, particulæ aquæ convergant, venamque contrahant, atque ideo motum ſuum accelerent.

(n) * *Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut* 25 ad

circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quàmproximè. Aqua igitur tranſeundo per foramen, convergit undique, & poſtquam effluxit ex vaſe, tenuior redditur convergendo, & per attenuationem acceleratur donec ad diſtantiam ſemiſſis digiti à foramine pervenerit, & ad diſtantiam illam tenuior (o) & celerior fit quàm in ipſo foramine in ratione 25×25 ad 21×21 ſeu 17 ad 12 quamproximè, id eſt in ſubduplicatâ ratione binarii ad unitatem circiter. (p) Per experimenta verò conſtat quòd quantitas aquæ, quæ per foramen circulare in fundo vaſis

ad 21 *quamproximè.* Hæc ratio in experimentis conſtans ferè manet, ſi aqua è vaſe ſatis amplo per exiguum foramen laminæ tenuiſſimæ inſculptum effluat, licet in vaſe mutetur aquæ foramini incumbentis altitudo. Experimenta illa iterarunt celeberrimi Mathematici, Marchio *Polenus* lib. de Caſtellis & *Daniel Bernoullius* ſect. 4ª. Hydrodynamicæ. Hæc ſunt Illuſtr. Marchionis verba pag. 38. 39. « Proclive autem erit intelligere, confirmari ex allatis experimentis rationem inter diametros «foraminum & aquæ contractæ diametros «à viro ſummo *Iſaaco* NEWTONO, ut antè «diximus, conſtitutam. Non tamen infi«cias iverim perexiguam aliquam diffe«rentiam intereſſe inter contractiones aquæ «effluentis ex minoribus foraminibus, & a«quæ contractiones ex majoribus effluen«tis. Anteà deſcripti foraminis in laminâ «ferreâ diameter ad diametrum aquæ con«tractæ fuit in eâ ratione quam habet nu«merus 52 ad 41; cùm *Newtoniana* ſit «ratio numeri 50 ad 42. ſic omninò eâ«dem lege, non ſemper contrahi aquæ ve«nas oſtendunt variæ contractiones in «aquæ à variis fruſtis conicis effluxu obſer«vatæ, quin etiam huc debebunt referri «illæ quas animadverti differentiæ inter «diametros ad perpendiculum ſumptas, & «diametros ſecundum lineam horizonti pa«rallelam menſas. At quanta ſit differentia «inter aquæ contractiones non auſim de«finire; neque verò illa *Newtoniana* ra«tio inter diametrum foraminis & contra«ctæ aquæ diametrum ſumi debet ceu præ«ciſa, cùm ipſe vir ſummus in citato opere «hæc habeat; exiſtente ejus (nempè aquæ «contractæ (diametro ad diametrum fora- 274.
«minis ut 5 ad 6, vel 5 & $\frac{1}{2}$ ad 6 & «$\frac{1}{2}$, quamproximè, ſi modò diametros re«ctè dimenſus ſum. » *Bernoullius* verò «Sect. 4. parag. 7°. hæc habet; Interim «aſſumptis laminâ tenui, vaſe ampliſſi«mo, foramine ad 4 vel 6 lineas in «diametro aſſurgente, ſolet ratio inter «foramen & Sectionem venæ contractæ «non multum recedere ab illâ quam NEW«TONUS ſtatuit. » Verùm utriuſque authoris experimenta demonſtrant, rationem illam diametri venæ contractæ ad diametrum foraminis multum variari, ſi per oblongos variæque figuræ canales, non verò ex ſimplici foramine in tenuiſſimâ laminâ inſculpto è vaſe effluat aqua.

(o) * *Et celerior fit quàm in ipſo foramine.* Nam velocitates ſunt reciprocè ut circuli per quos aqua eodem tempore tranſit (171), circuli verò ſunt in ratione duplicatâ diametrorum; & ideo velocitas aquæ per ſectionem circularem venæ contractæ tranſeuntis eſt ad velocitatem aquæ per foramen effluentis ut 25 × 25 ad 21 × 21 hoc eſt, 625 ad 441; quod utrumque diviſum per 37 dat rationem 17 ad 12, vel utrumque diviſum per 441, dat rationem 1.41 &c. ad 1, eſt verò Radix binarii numeri 1.41 &c., eſt ergo velocitas aquæ per venam contractam ad velocitatem per foramen in ratione radicis binarii numeri ad unitatem.

(p) *Per experimenta verò conſtat.* Datâ quantitate aquæ per datum foramen ſeu per datam venæ contractæ Sectionem dato tempore effluentis, ſic illius veloci-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVI. PROBL. VIII.

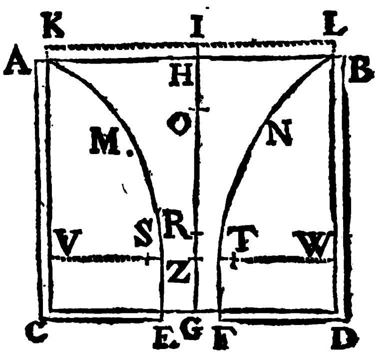
ſis factum, dato tempore effluit, ea ſit quæ cum velocitate prædictâ, non per foramen illud, ſed per foramen circulare, cujus diameter eſt ad diametrum foraminis illius ut 21 ad 25, eodem tempore effluere debet. Ideoque aqua illa effluens velocitatem habet deorſum in ipſo foramine quam grave cadendo & caſu ſuo (q) deſcribendo dimidiam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis acquirere poteſt quamproximè. Sed poſtquam exivit ex vaſe, acceleratur convergendo donec ad diſtantiam à forami-

tas inquiritur. Quoniam data aquæ quantitas æquatur cylindro vel priſmati cujus baſis eſt foramen datum aut venæ contractæ ſectio, & altitudo ſpatium quod aqua tempore dato cum illâ velocitate quam in foramine aut venæ Sectione habet, uniformiter progrediendo deſcriberet, dividitur quantitas aquæ data per foraminis aut Sectionis venæ aream, & quotiens erit ſpatium quod aqua dato tempore uniformiter progrediendo deſcriberet, atquè itâ nota fit aquæ velocitas cujus dimidium eſt altitudo ex quâ cadere debuit ut eam velocitatem acquireret. Sit jam a altitudo quam corpus grave tempore minuti unius ſecundi ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribit, v velocitas hoc caſu acquiſita, & ideò $2a$ ſpatium quod velocitate uniformi v tempore minuti unius ſecundi deſcribi poteſt (30. *lib.* 1.) ſit b altitudo aquæ in vaſe ſtagnantis, c celeritas quam grave per altitudinem b ſine reſiſtentiâ cadendo acquirit, & s ſpatium quod cum celeritate c uniformiter progrediendo tempore minuti unius ſecundi deſcriberet, erit $a:b = vv:cc$ (28. lib. 1.) & $2a:s = v:c$ (5. lib. 1.) ideóque $a:b = 4aa:ss$; undè habetur $ss = 4ab$, & $s = \sqrt{4ab}$. Si igitur aqua è vaſe per venæ contractæ Sectionem effluat cum velocitate c quam grave cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem b aquæ in vaſe ſtagnantis acquirit, ſpatium s quod ex quantitate aquæ tempore minuti unius ſecundi è vaſe effluentis, ut ſuprà dictum eſt, habetur, debet eſſe æquale $\sqrt{4ab}$. Hinc ſi altitudo a, ſit pedum Pariſ. 14, erit $ss = 56b$, quæ eſt ipſa regula quam D. *Pitot* in Monum. Acad. Pariſ. an. 1730. tradidit. At ſi altitudo a ponatur eſſe pedum Pariſ. $15\frac{1}{12}$ ſeu $\frac{181}{12}$ (471. lib. 1.) erit $ss = \frac{181}{3}b$. Verùm ut aquæ in vaſe ſtagnantis altitudo & velocitas per foramen effluentis quo tempore experimentum capitur, eadem ad ſenſum maneant, ut oportet, uſurpari poteſt vas ſatis amplum exiguo pertuſum foramine, vel ſi vas paulò anguſtius adhibeatur, tantum aquæ affundi supernè debet quantum per inferius lumen effluit, & cavendum eſt ne affuſa aqua cum aliquo impetu cadendi extimam aquæ in vaſe ſtagnantis ſuperficiem attingat. Quibus autem artibus id poſſit effici fusè exponunt locis ſuprà citatis Marchio *Polenus* & *Daniel Bernoullius* quos lector conſulere poteſt. Attamen his adhibitis cautelis, velocitas aquæ per venæ contractæ Sectionem effluentis paulò minor per experimenta quàm per theoriam invenitur, quod variis reſiſtentiis tribuendum eſſe videtur, & certè Illuſtr. Marchio *Polenus*, cùm in libro de Caſtellis pag. 64. opinatus fuiſſet velocitatem illam in experimentis valde eſſe minorem quàm in theoriâ, pluribus deinde experimentis ad calculos revocatis priorem ſententiam mutavit in Epiſtolâ ad *Marinonium*.

(q) *Deſcribendo dimidiam altitudinem.* Velocitas quam corpus quodlibet grave, ſine reſiſtentiâ cadendo & caſu ſuo deſcribendo dimidiam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis acquirit, eſt ad velocitatem ejus per totam altitudinem aquæ cadendò acquiſitam ut 1 ad $\sqrt{2}$ (28. lib. 1.)

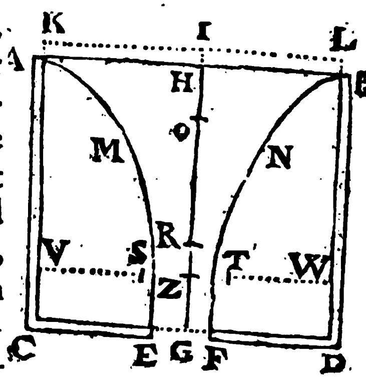
ramine diametro foraminis prope æqualem pervenerit, & velocitatem acquiſiverit majorem in ratione ſubduplicatâ binarii ad unitatem circiter; quam utique grave cadendo, & caſu ſuo deſcribendo totam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis, acquirere poteſt quàmproximè.

In ſequentibus igitur diameter venæ deſignetur per foramen illud minus quod vocavimus *E F*. Et plano foraminis *E F* parallelum duci intelligatur planum aliud ſuperius VW ad diſtantiam diametro foraminis æqualem circiter & foramine majore *ST* pertuſum; per quod utique vena cadat, quæ adæquatè impleat foramen inferius *E F*, atque ideo cujus diameter ſit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter tranſibit; & quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam ſolutio problematis poſtulat quamproximè. Spatium verò, quod planis duobus & venâ cadente clauditur, pro fundo vaſis haberi poteſt. Sed ut ſolutio problematis ſimplicior ſit & magis mathematica, præſtat adhibere planum ſolum inferius pro fundo vaſis, & fingere quod aqua quæ per glaciem ceu per infundibulum defluebat, & è vaſe per foramen *E F* in plano inferiore factum egrediebatur, motum ſuum perpetuo



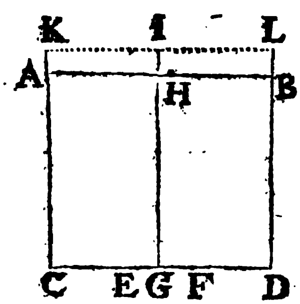
(1.) Sed, ex ſuprà oſtenſis, velocitas aquæ per vaſis foramen tranſeuntis eſt ad velocitatem per venæ contractæ Sectionem fluentis, id eſt, ad velocitatem quam grave cadendo per totam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis acquirit, in eâdem ratione 1, 2 ad $\sqrt{2}$; Quarè velocitas quam grave per dimidiam altitudinem aquæ ſtagnantis cadendo acquirit, æqualis eſt velocitati aquæ per foramen effluentis, modò tamen aqua per ſimplex foramen in tenuiſſimâ laminâ factum, ut ſuprà expoſitum eſt, effluat è vaſe.

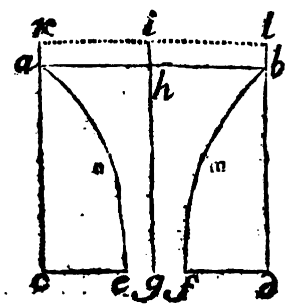
274.



petuo ſervet, & (r) glacies quietem ſuam. In ſequentibus igitur ſit *S T* diameter foraminis circularis centro *Z* deſcripti per quod cataracta effluit ex vaſe ubi aqua tota in vaſe fluida eſt. Et ſit *E F* diameter foraminis per quod cataracta cadendo adæquatè tranſit, ſive aqua exeat ex vaſe per foramen illud ſuperius *S T*, ſive cadat per medium glaciei in vaſe tanquam per infundibulum. Et ſit diameter foraminis ſuperioris *S T* ad diametrum inferioris *E F* ut 25 ad 21 circiter, & diſtantia perpendicularis inter plana foraminum æqualis ſit diametro foraminis minoris *E F*. Et velocitas aquæ è vaſe per foramen *S T* exeuntis ea erit in ipſo foramine deorſum quam corpus cadendo à dimidio altitudinis *I Z* acquirere poteſt: velocitas autem cataractæ utriuſque cadentis ea erit in foramine *E F*, quam corpus cadendo ab altitudine totâ *I G* (ſ) acquiret.

Caſ.





(r) * *Et glacies quietem ſuam.* Sunto vaſa duo æqualia A B D C, a b d c, in quorum primo glacies omnis in aquam reſoluta ſit, & in altero glacies quietem ſuam conſervet, ut aqua cataractam a b n f e m formando effluat per foramen e f Sectioni venæ contractæ è foramine E F exilientis æquale; & loco vaſis ABDC, in problematis ſolutione ſubſtitui poterit vas alterum a b d c, in quo aquæ per lumen e f effluentis eadem eſt velocitas quam aqua è vaſe A B D C exiliens habet in Sectione venæ contractæ, eademque proindè aquæ quantitas in defluxum impenditur, & propterea idem aquæ pondus fundo incumbit in utroque vaſe. Quoniam enim cataractæ a b n f e m figura & lex ſecundùm quam aqua cataractâ illâ movetur notæ ſunt, problematis ſolutio & facilior & magis mathematica fiet, ſi loco vaſis A B D C mente ſubſtituatur vas a b d c.

(ſ) * *Acquiret.* Hæc ex ſuprà demonſtratis patent.

Caſ. 2. Si foramen *E F* non ſit in medio fundi vaſis, ſed fundum alibi perforetur: aqua effluet eâdem cum velocitate ac priùs, ſi modò eadem ſit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore deſcendit ad eandem profunditatem (t) per lineam obliquam quàm per lineam perpendicularem, ſed deſcendendo eandem velocitatem acquirit in utroque caſu, (u) ut *Galilæus* demonſtravit.

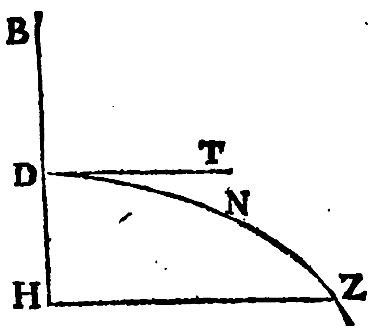
Caſ. 3. Eadem eſt aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vaſis. Nam ſi foramen parvum ſit, (x) ut intervallum inter ſuperficies *AB* & *KL* quoad ſenſum evaneſcat, & vena aquæ horizontaliter exilientis figuram parabolicam efformet: ex (y) latere recto hujus parabolæ colligetur, quod velocitas aquæ effluentis ea ſit quam corpus ab aquæ in vaſe ſtagnantis altitudine *HG* vel *IG* cadendo acquirere potuiſſet. Facto

(t) * *Per lineam obliquam.* In hoc ſecundo caſu pars aquæ per lineas ad foramen obliquas deſcendit.

(u) * *Ut Galilæus demonſtravit.* (81. & 85. lib. 1.).

(x) 275. * *Ut intervallum inter ſuperficies A B & K L.* I H eſt ad I G in ratione quadruplicatâ diametri E F ad diametrum A B (272), aut quod idem eſt, in ratione duplicatâ areæ circuli E F ad aream circuli A B, ideòque ſi ratio E F ad A B parva ſit, minor adhuc erit ratio I H ad I G, & H G, I G erunt ad ſenſum æquales.

(y) * *Ex latere recto hujus Parabolæ.* Aquæ gutta è loco D, ſecundùm directionem quamlibet D T exiliat cum eâ velocitate quam per altitudinem B D cadendo acquirere poteſt, & ſublatâ medii reſiſtentiâ, deſcribat parabolam D N Z, cujus vertex D, tangens D T, & diameter D H ſeu verticalis B D producta (40. lib. 1.); capiatur abſciſſa D H æqualis altitudini B D, ducaturque ordinata H Z, quæ tangenti D T parallela erit; & quo tempore gutta aquæ vi gravitatis cadendo altitudinem B D vel D H deſcribit uniformi illâ velocitate quam caſu per B D acquiſivit, deſcribit longitudinem H Z ipſius B D vel D H duplam, (30. *lib.* 1.). Latus rectum



Parabolæ D N Z, pertinens ad diametrum D H eſt $\frac{HZ^2}{DH}$ (*theor.* 1. *de parab.*) ideòque cùm ſit H Z = 2 D H = 2 B D, latus rectum eſt 4 B D. Igitur altitudo B D quam aqua cadendo deſcribere debet ut velocitatem acquirat cum quâ è loco D exilit, eſt quarta pars lateris recti ad diametrum D H parabolæ D N Z pertinentis. 275.

cto utique experimento inveni quod, ſi altitudo aquæ ſtagnantis ſupra foramen eſſet viginti digitorum & altitudo foraminis ſupra planum horizonti parallelum eſſet quoque viginti digitorum, vena aquæ proſilientis incideret in planum illud ad diſtantiam digitorum 37 circiter à perpendiculo quod in planum illud à foramine demittebatur captam. Nam ſine reſiſtentiâ, vena (z) incidere debuiſſet in planum illud ad diſtantiam digitorum 40, exiſtente venæ parabolicæ latere recto digitorum 80.

Caſ. 4. Quin etiam aqua effluens, ſi ſurſum feratur, eâdem egreditur cum velocitate. Aſcendit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ in vaſe ſtagnantis altitudinem *GH* vel *GI*, niſi quâtenus aſcenſus ejus ab aeris reſiſtentiâ aliquantulum impediatur; (a) ac proinde eâ effluit cum velocitate quam ab altitudine illâ cadendo acquirere potuiſſet. Aquæ ſtagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter (*per prop.* XIX. *lib.* 2.) & preſſioni cedendo æquali impetu in omnes partes fertur, ſive deſcendat per foramen in fundo vaſis, ſive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, ſive egrediatur in canalem & inde aſcendat per foramen parvum in ſuperiore canalis parte factum. Et velocitatem quâ aqua effluit eam eſſe, quam in hâc propoſitione aſſignavimus, non ſolùm ratione colligitur, ſed etiam per experimenta notiſſima jam deſcripta manifeſtum eſt.

Caſ. 5. Eadem eſt aquæ effluentis velocitas, ſive figura foraminis ſit circularis, ſive quadrata vel triangularis aut alia quæcunque circulari æqualis. Nam velocitas aquæ effluentis non pendet à figurâ foraminis, ſed oritur ab ejus altitudine infra planum K L.

Caſ. 6. Si vaſis *AB D C* pars inferior in aquam ſtagnantem im-

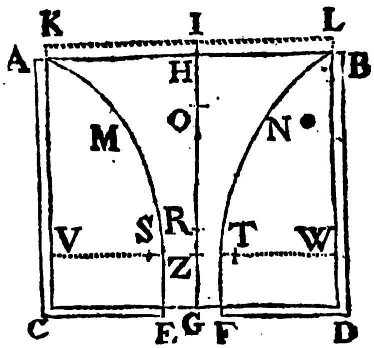
(z) * *Incidere debuiſſet in planum illud.* Sit enim (*in fig. notæ ſuperioris*) altitudo B D = D H digit. 20, & quia B D eſt pars quarta lateris recti parabolæ D N Z, quam aqua ſine reſiſtentiâ deſcriberet, latus illud rectum eſt digit. 80, & ordinata H Z æqualis 2 D H eſt digit. 40. differentia 3. digit. inter diſtantias 40. & 37. digit. reſiſtentiis tribuenda eſt.

(a) * *Ac proinè eâ effluit cum velocitate.* (25. 26. lib. 1.)

immergatur & altitudo aquæ ſtagnantis ſupra fundum vaſis ſit *G R*: velocitas quâcum aqua quæ in vaſe eſt, effluet per foramen *E F* in aquam ſtagnantem, ea erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IR* acquirere poteſt. Nam pondus aquæ omnis in vaſe quæ inferior eſt ſuperficie aquæ ſtagnantis, ſubſtinebitur in æquilibrio per pondus aquæ ſtagnantis, ideoque motum aquæ deſcendentis in vaſe minimè accelerabit. Patebit etiam & hic caſus per experimenta, (b) menſurando ſcilicet tempora quibus aqua effluit.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XXXVI. Probl. VIII.

(c) *Corol.* 1. Hinc ſi aquæ altitudo *CA* producatur ad *K*, ut ſit *AK* ad *CK* in duplicatâ ratione areæ foraminis in quâvis fundi parte facti, ad aream circuli *AB*: velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *K C* acquirere poteſt.



(d) *Corol.* 2. Et vis, quâ totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus baſis eſt foramen *E F*, & altitudo 2 *GI* vel 2 *CK*. Nam aqua exiliens, quo tempore hanc columnam æquat, pondere ſuo ab altitudine *G I* cadendo velocitatem ſuam, quâ exilit, acquirere poteſt.

Co-

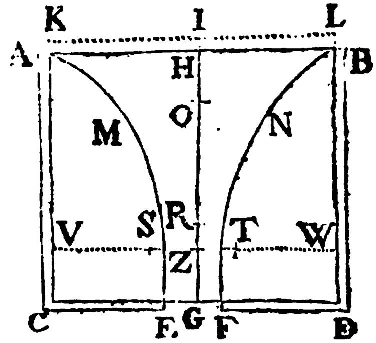
(b) * *Menſurando ſcilicet tempora quibus aqua effluit*, & quantitates aquæ iiſdem temporibus effluentis.

(c) * *Cor.* 1. Patet per not. 275. & caſ. 2um. ac 5um.

(d) * *Cor.* 2. De hujus corollarii veritate diù multumque diſputatum eſt inter Comitem *Riccatum*, Danielem *Bernoullium*, Petrum Antonium *Michelottum*, Jacobum *Jurinum*, alioſque eruditiſſimos viros. Cùm enim in primâ principiorum editione, NEWTONUS, nondum obſervatâ contractione venæ, ſtatuiſſet, vim quâ totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualem eſſe ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus baſis eſt foramen E F, & altitudo G I, & in ſecundâ editione, habitâ ratione venæ contractæ, vim illam duplam feciſſet, priorem vis illius menſuram adverſus Comitem *Riccatum* & *Jurinum* tuebatur cum *Michelotto* Daniel *Bernoullius*, quorum Diſſertationes videre eſt in Exercitationibus Mathematicis quæ an. 1724. *Venetiis* editæ ſunt. Verùm *Daniel Bernoullius* paragr. 9°. ſect. 13a. *Hydrodynamicæ* poſteriori ſententiæ NEWTONI ità ſuffragatur: «iſta ſententia a me olim «& ab aliis fuit impugnata, ab aliis rur- «ſus 275.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XXXVI. Probl. VIII.

Corol. 3. Pondus aquæ totius in vaſe *ABDC* eſt ad ponderis partem, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut ſumma circulorum *AB* & *EF* ad duplum circulum *EF*. Sit enim *IO* media proportionalis inter *IH* & *IG*; & aqua per foramen *EF* egrediens, quo tempore gutta cadendo ab *I* deſcribere poſſet altitudinem *IG*, æqualis erit cylindro cujus baſis eſt circulus *EF* & altitudo eſt 2 *IG*, id eſt, cylindro cujus baſis eſt circulus *AB* & altitudo eſt 2 *IO*, (e) nam circulus *EF* eſt ad circulum *AB* in ſubduplicatâ ratione altitudinis *IH* ad alti-



"ſus confirmata. Nunc autem poſtquam "hanc aquarum motarum theoriam meditatus ſum, lis ità dirimenda mihi videtur ut cum aquæ ad motum uniformem "pervenerint, quæ quidem Hypotheſis eſt "Newtoni, tunc rectè altitudine 2 G I, vis "illa definiatur, ſed ab initio fluxûs, ubi "velocitas adhuc nulla eſt, vis ſimplici altitudini G I reſpondeat, moxque creſcente velocitate, ſimul vis aquam ad effluxum animans creſcat, & tandem ad "eam magnitudinem exſurgat quam Newtonus aſſignavit..... Rectè etiam Ill. "*Riccatus*, cum quo mihi de hoc argumento res erat, interrogatus, undè vis illa "duplæ aquarum altitudini conveniens oriri poſſit, cum obturato orificio, gutta "eidem imminens vi ſimplicis altitudinis "urgeri manifeſtè appareat, reſpondit diſtinguendum eſſe ſtatum quietis à ſtatu motûs. » Jam verò hujus cor. 2. demonſtrationem dedimus (274.); aliam, quam Newtonus indicat, expoſuerunt Comes *Riccatus* in citatis Exercitationibus, & *Euſtachius Manfredius* in adnotationibus ad cap. 1. tractatûs *Guilelmini* de natura fluminum (quod præclarum opus poſt fata ſummi viri, Clariſſ. Fratres *Gabriel* & *Heraclitus Manfredi*. an. 1739. Bononiæ edi curarunt.) Demonſtratio ſic poteſt exponi. Quo tempore cylindrus aquæ, cujus baſis æqualis eſt foramini E F, & altitudo G I vi ponderis ſui cadendo deſcriberet altitudinem I G, & velocitatem aquæ exilientis acquireret; eodem tempore è foramine E F efflueret aquæ quantitas æqualis alteri cylindro aqueo, cujus baſis eſt foramen E F, & longitudo 2 G I (30. *lib.* 1.), id eſt, cylindro prioris duplo; & ideò ob velocitatem quam cylindrus per altitudinem I G, cadendo acquirit, æqualem velocitati aquæ exilientis, quantitas motûs in illo cylindro vi ponderis ejuſdem cylindri genita, eſt ad quantitatem motûs eodem tempore in aquâ exiliente productam ut 1 ad 2. Sed vires uniformes quibus cylindri cadentis & aquæ exilientis motus generantur, ſunt ut motûs quantitates eodem tempore à viribus illis genitæ (15. *lib.* 1). Quare pondus cylindri aquæ, cujus baſis eſt foramen E F, & altitudo G I, eſt ad vim quâ totus aquæ exilientis motus generari poteſt ut 1 ad 2, & proinde hæc vis æqualis eſt ponderi cylindricæ columnæ aquæ cujus baſis & foramen E F & altitudo 2 G I. Q. E. D.

(e) * *Nam circulus E F eſt ad circulum A B, in ſubduplicatâ ratione altitudinis I H, ad altitudinem I G* (per cor. 1.) *id eſt, in ſimplici ratione mediæ proportionalis I O, ad altitudinem I G*, ideoque factum ex circulo A B in altitudinem 2 I O æquale eſt facto

titudinem IG, hoc eſt, in ſimplici ratione mediæ proportionalis IO ad altitudinem IG: & quo tempore gutta cadendo ab I deſcribere poteſt altitudinem IH, aqua egrediens ([f]) æqualis erit cylindro cujus baſis eſt circulus AB & altitudo eſt $2\,IH$: & quo tempore gutta cadendo ab I per H ad G deſcribit altitudinum differentiam HG, aqua egrediens, ([g]) id eſt, aqua tota in ſolido $ABNFEM$ æqualis erit differentiæ cylindrorum, id eſt, cylindro cujus baſis eſt AB & altitudo $2\,HO$. Et propterea aqua tota in vaſe $ABDC$ eſt ad aquam totam cadentem in ſolido $ABNFEM$ ut ([h]) HG ad $2\,HO$, id eſt, ut $HO+OG$ ad HO, ſeu $IH+IO$ ad $2\,IH$. Sed pondus aquæ totius in ſolido $ABNFEM$ in aquæ defluxum ([i]) impenditur: ac proinde pondus aquæ totius in vaſe eſt ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut $IH+IO$ ad $2\,IH$, ([k]) atque ideo ut ſumma circulorum EF & AB ad duplum circulum EF.

([l]) *Corol.* 4. Et hinc pondus aquæ totius in vaſe $ABDC$ eſt

facto ex circulo EF in altitudinem 2 IG, aut, quod idem eſt, cylindrus cujus baſis eſt circulus EF & altitudo 2 IG, æquatur cylindro cujus baſis eſt circulus AB & altitudo 2 IO.

(f) * *Æqualis erit cylindro cujus baſis eſt circulus AB & altitudo* 2 IH. Eadem enim aquæ quantitas eodem tempore tranſit per circulos AB, & EF (271) & quantitas aquæ per circulum AB, tranſeuntis eo tempore quo gutta cadendo deſcribere poteſt altitudinem IH, æqualis erit cylindro aqueo cujus baſis eſt circulus AB & altitudo 2 IH. (30. lib. 1.).

(g) * *Id eſt aqua tota.* Nam ex iis quæ ante caſ. 1. dicta ſunt, manifeſtum eſt aquam totam prædicto ſolido contentam, per foramen EF eodem tempore effluere, quo aquæ gutta vi gravitatis ſuæ è loco I per H ad G cadendo deſcribit altitudinem HG.

(h) * *Ut HG ad 2 HO &c.* Volumen aquæ in vaſe ABDC contentæ æquatur capacitati vaſis ſeu cylindro cujus baſis eſt circulus AB, & altitudo HG; & propterea aqua tota in vaſe ABDC, eſt ad aquam totam cadentem in ſolido ABNFEM, ut HG ad 2 HO (ex dem.), id eſt, ut HO + OG ad 2 HO, & quia (per hyp.) $IH : IO = IO : IG = IO - IH : IG - IO = HO : OG$, erit $HO + OG : 2\,HO = IH + IO : 2\,IH$. 275.

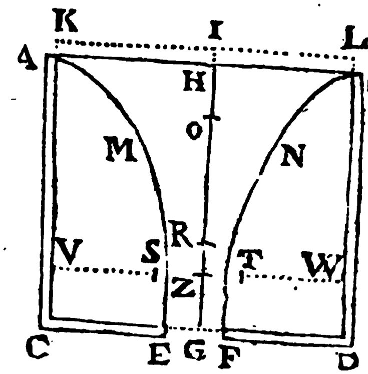
(i) *Impenditur*, ut probatum eſt initio caſ. 1.

(k) * *Atquè ideò ut ſumma circulorum.* Quoniam enim (*per hyp.*) eſt IH ad IO ut IO ad IG, erit etiam IH + IO ad 2 IH ut IG + IO ad 2 IO, ſed (ex modò dem.) circulus AB eſt ad circulum EF ut IG ad IO, ideóque ſumma circulorum AB & EF ad duplum circulum EF ut IG + IO ad 2 IO ſeu ut IH + IO ad 2 IH. Quarè patet propoſitum.

(l) * *Cor.* 4. Pondus aquæ totius in vaſe ABDC ſit P ponderis illius pars quæ in defluxum impenditur ſit p & hinc $P-p$, pars ponderis totius quæ fundo vaſis ſeu plano æquali differentiæ circulorum CD & EF ſuſtinetur & in defluxum non impenditur. Et (*per cor.* 3.) erit $P : p = AB + EF : 2\,EF$, ac proindè $P : P - p = AB + EF : AB - EF$.

eſt ad ponderis partem alteram quam fundum vaſis ſuſtinet, ut ſumma circulorum *AB* & *EF* ad differentiam eorundem circulorum.

(m) *Corol.* 5. Et ponderis pars, quam fundum vaſis ſuſtinet, eſt ad ponderis partem alteram, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut differentia circulorum *AB* & *EF* ad duplum circulum minorem *EF*, ſive ut area fundi ad duplum foramen.



(n) *Corol.* 6. Ponderis autem pars, quâ ſolâ fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *AB* ad ſumma circulorum *AB* & *EF*, ſive ut circulus *AB* ad exceſſum dupli circuli *AB* ſupra fundum. Nam ponderis pars, quâ ſolâ fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius in vaſe, ut differentia circulorum *AB* & *EF* ad ſummam eorundem circulorum, per cor. 4.: & pondus aquæ totius in vaſe eſt ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *AB* ad differentiam circulorum *AB* & *EF*. Itaque ex æquo perturbatè, ponderis pars, quâ ſolâ fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *AB* ad ſummam circulorum *AB* & *EF* (o) vel exceſſum dupli circuli *AB* ſupra fundum.

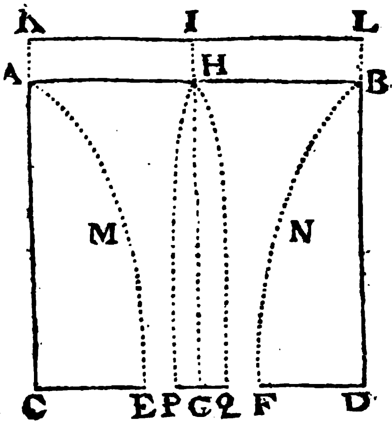
Corol. 7. Si in medio foraminis *EF* locetur circellus *PQ* cen-

(m) * *Cor.* 5. Cùm ſit $P : p = AB + EF : 2EF$, erit quoque $P - p : p = AB - EF : 2EF$. Eſt autem area fundi æqualis differentiæ circulorum AB & EF.

(n) * *Cor.* 6. *Ponderis autem pars quâ ſolâ fundum urgetur*, ſive pondus aquæ quæ in ſpatio ſolido CEMA DFNB continetur, *eſt ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit* & quæ æquatur ſolido aqueo cujus baſis eſt differentia circulorum AB & EF, & altitudo GH, *ut circulus &c.*

(o) * *Vel exceſſum dupli circuli AB ſuprà fundum.* Cùm fundum æquale ſit differentiæ circulorum AB & EF, exceſſus dupli circuli AB, ſuprà fundum eſt $2AB - AB + EF$, ſeu $AB + EF$.

centro *G* deſcriptus & horizonti parallelus: pondus aquæ quam circellus ille ſuſtinet, majus eſt pondere tertiæ partis cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt *G H*. Sit enim *A B N F E M* cataracta vel columna aquæ cadentis axem habens *G H* ut ſupra, & congelari intelligatur aqua omnis in vaſe, (p) tam in circuitu cataractæ quàm ſupra circellum, cujus fluiditas ad promptiſſimum & celerrimum aquæ deſcenſum non requiritur. Et ſit *P H Q* columna aquæ ſupra circellum congelata, verticem habens *H* & altitudinem *G H*. Et finge cataractam hancce pondere ſuo toto cadere & non incumbere in *P H Q*, nec eandem premere, ſed liberè & ſine frictione præterlabi, niſi forte in ipſo glaciei vertice quo cataracta ipſo cadendi initio incipiat eſſe cava. Et quemadmodum aqua in circuitu cataractæ congelata *A M E C*, *B N F D*

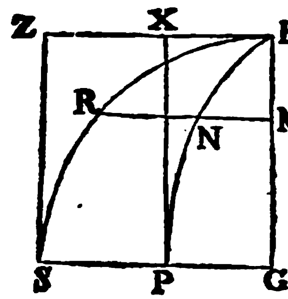


(p) * *Tam in circuitu cataractæ.* Quemadmodum enim ſuprà antè caſ. 1um., aqua omnis cujus fluiditas ad promptiſſimum & celerrimum aquæ deſcenſum illiuſque effluxum per foramen E F inutilis erat, in circuitu cataractæ congelata ſupponebatur, idque rectè factum experimentis poſteà oſtenſum eſt, ità hic loci congelata ſupponi poteſt aqua omnis in vaſe tam in circuitu cataractæ quàm ſuprà circellum, cujus fluiditas ad promptiſſimum & celerrimum aquæ effluxum per ſpatium annulare E P, Q F, non requiritur; Et quemadmodum glacies in circuitu cataractæ conſtituta, C E M A, D F N B pertingebat ad ſuperficiem A B ſeu terminum glaciei continuò liqueſcentis K A B L, ità aqua ſuprà circellum congelata producitur ad punctum H, in eâdem ſuperficie A B poſitum; & uti glacies *in circuitu cataractæ convexa eſt verſùs cataractam cadentem* (272.), *ſic etiam columna aquæ ſuprà circellum congelata PHQ convexa erit verſus cataractam cadentem AHPEM, BHQFN*; 275.
* Conſiderari enim poteſt axis H G ut paries vaſis cujus ſectio ſit H G C A, & foramen in fundo factum ſit E P, qualiſcumque autem ſit Lex quâ effluit aqua ex vaſe, eodem modo quo factum eſt à NEWTONO in hujus demonſtrationis caſu primo, concipi poteſt cataracta trans glaciem effluens, adhibitis cautionibus illic notatis, ut hæc Hypotheſis Mathematica congruat cum verâ effluxus aquæ Lege, quâtenus ad copiam aquæ effluentis dato tempore, quo poſito evidens eſt lineam H P convexam ſumi debere. Quâpropter ſi ex punctis P & Q ad punctum H ducantur lineæ rectæ, quæ cum diametro P Q triangulum conſtituant, conus ex revolutione hujus trianguli circà axem H G genitus, totus continebitur in ſolido quod per rotationem figuræ convexæ P H Q circâ eundem axem H G generatur. Hoc igitur ſolidum, ſeu columna P H Q ſuprà circellum congelata, magnitudine ſuperat conum

BNFD convexa eſt in ſuperficie internâ *AME*, *BNF* verſus cataractam cadentem, ſic etiam hæc columna *PHQ* convexa erit verſus cataractam, & propterea major cono cujus baſis eſt circellus ille *PQ* & altitudo *GH*, id eſt, major tertiâ parte cylindri eâdem baſe & altitudine deſcripti. Suſtinet autem circellus ille pondus hujus columnæ, id eſt, pondus quod pondere coni ſeu tertiæ partis cylindri illius majus eſt.

Corol. 8. Pondus aquæ quam circellus valde parvus *PQ* ſuſtinet, minus eſſe videtur pondere duarum tertiarum partium cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt *HG*. Nam ſtantibus jam poſitis, deſcribi intelligatur dimidium ſphæroidis cujus baſis eſt circellus ille & ſemiaxis ſive altitudo eſt *HG*. (q) Et hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus cylindri illius & comprehendet columnam aquæ congelatæ *PHQ* cujus pondus circellus ille ſuſtinet. Nam ut motus aquæ ſit maximè directus, columnæ illius ſuperficies externa concurret cum baſi *PQ* (r) in angulo nonnihil acuto, propterea quod aqua

illum cujus baſis eſt circellus PQ & altitudo HG. Quarè (*per prop. X. lib.* 12. *Elem.*) columna congelata PHQ, major eſt tertiâ parte cylindri aquæ, cujus baſis eſt circellus PQ & altitudo GH. Sed ſicut fundum EC, FD ſuſtinet pondus aquæ in ſpatio ſolido CEMA, DFNB contentæ, ità circellus PQ ſuſtinet pondus columnæ aquæ PHQ, id eſt, pondus quod majus eſt pondere tertiæ partis cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus PQ & altitudo GH.

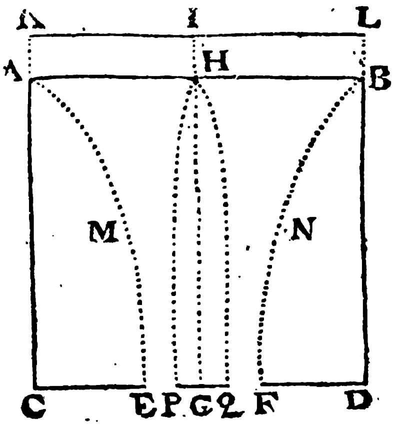


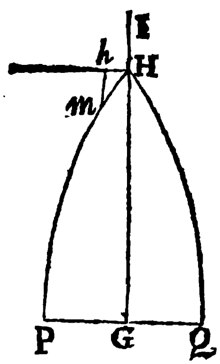
(q) * *Et hæc figura æqualis erit &c.* Centro G, & ſemiaxibus conjugatis GH & GP, deſcribatur ellipſeos quadrans HNP, & centro eodem G ac radio GH circuli quadrans HRS, compleanturque rectangula HGPX & HGSZ. Ducatur in circulo ordinata quævis RM, ellipſi occurrens in N, erit RM ad NM, in datâ ratione SG ad PG (247. *lib.* 1.) & propterea ſi figuræ illæ circà axem HG revolvantur, circulus quem radius MR in hâc revolutione deſcribet, erit ad circulum radio MN deſcriptum in datâ ratione SG^2 ad PG^2, ſeu in datâ ratione cylindri quem rectangulum HGSZ rotando deſcribit ad cylindrum ex rotatione rectanguli HGPX genitum; undè (*per cor. Lem. IV. lib.* 1.) hæmiſphærium ex revolutione quadrantis circuli HRSG genitum, eſt ad hemiſphæroidem ex rotatione quadrantis ellipſeos HNPG in eâdem ratione. Cum igitur hemiſphærium ſit ad cylindrum circumſcriptum ut 2 ad 3 (170. *lib.* 2.) erit etiam hemiſphærois ad cylindrum circumſcriptum qui per rotationem rectanguli HGPX generatur, in eâdem ratione 2 ad 3. Q.E.D.

(r) * *In angulo nonnihil acuto.* Nam quemadmodum angulus quem cataractæ

ABNFEM

aqua cadendo perpetuò acceleratur & propter accelerationem fit tenuior; & cùm angulus ille ſit recto minor, hæc columna ad inferiores ejus partes. ([f]) jacebit intra dimidium ſphæroidis. ([t]) Eadem verò ſurſum acuta erit ſeu cuſpidata, ne horizontalis motus aquæ ad verticem ſphæroidis ſit infinitè velocior quàm ejus motus horizontem verſus. ([u]) Et quò minor eſt circellus *PQ*, eò acutior erit vertex columnæ; & circello in





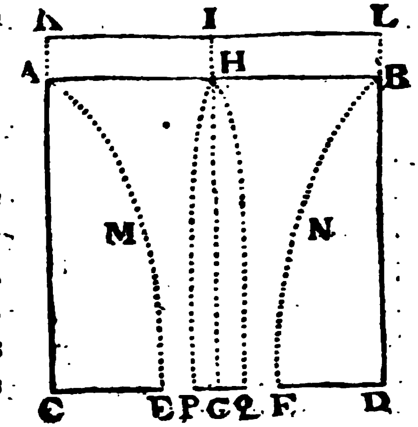
ABNFEM ſuperficies externa AME, BNF cum baſi CE, DF conſtituit, eſt ſemper acutus, quia aqua cadendo ſemper acceleratur (272.) Sic etiam, ob eandem rationem, columnæ PHQ ſuperficies externa concurret cum baſi PQ in angulo acuto HPQ, HQP. Quia verò circulo PQ evaneſcente, ſeu coincidente HP cum axe HG, angulus ille HPG rectus evadit; ſi circulus eſt valdè parvus; angulus HPG erit fere rectus ſeu nonnihil acutus.

(ſ) *Jacebit intrà dimidium ſphæroidis.* Quia (ex naturâ ellipſeos) in quâ tangentes per axium vertices ductæ angulos rectos cum axibus conſtituunt, ſphæroidis ſuperficies cum circello PQ, concurrit in angulo recto.

(t) * *Eadem verò ſurſum acuta erit.* Cùm enim partes aquæ duplici motu cieantur in H, alio verticali qui lapſu per altitudinem IH acquiritur, alio horizontali quo partes aquæ ad cataractam formandam ad ſe mutuò accedunt, uti ſuprà antè (caſ. 1um. dictum eſt, atquè ideò guttula aquæ in H, lineam curvam HP motu compoſito deſcribat, neceſſum eſt ut angulus PHG ſit acutus, & proindè columna PHQ cuſpidata in H. Deſcribat enim guttula aquæ lineam quam minimam Hh, motu horizontali, & eodem temporis momento lineam hm, motu verticali, atquè arcum Hm motu compoſito; & velocitas horizontalis erit ad velocitatem verticalem ut Hh ad hm, id eſt, ut ſinus hmH ſeu mHG ad ſinum anguli hHm. Sed evaneſcente angulo hHm, ſeu angulo mHG recto exiſtente, ſinus anguli mHG, infinitè major eſt ſinu anguli hHm. Quare ſi angulus mHG rectus ſit, horizontalis motus aquæ erit infinitè major quàm motus ejus verticalis. Quod abſurdum eſt; angulus igitur mHG acutus eſt. 276.

(u) * *Et quò minor eſt circellus* PQ. Nam ſi circellus PQ ità augeatur, ut adæquet foramen EF illudque occludat, columna PHQ evadet cylindrica, & rectâ mh coincidente cum Hh angulus mHG rectus erit; & contrà circello in infinitum diminuto, coincidet HmP, cum axe HG, angulusque mHG evaneſcet. Columna igitur tam ad ſuperiores partes versùs H, quàm ad inferiores partes versùs P & Q, jacebit intrà dimidium ſphæroidis.

in infinitum diminuto, angulus *PHQ* in infinitum diminuetur & propterea columna jacebit intra dimidium ſphæroidis. Eſt igitur columna illa minor dimidio ſphæroidis, ſeu duabus tertiis partibus cylindri cujus baſis eſt circellus ille & altitudo *GH*. Suſtinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cùm pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.



Corol. 9. Pondus aquæ quam circellus valde parvus *PQ* ſuſtinet, æquale eſt ponderi cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}$ *GH* quamproximè. (x) Nam pondus hocce eſt medium arithmeticum inter pondera coni & hemiſphæroidis prædictæ. At ſi circellus ille non ſit valde parvus, ſed augeatur donec æquet foramen *EF*; hic ſuſtinebit pondus aquæ totius ſibi perpendiculariter imminentis, id eſt, pondus cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt *GH*.

Corol. 10. Et (quantum ſentio) pondus quod circellus ſuſtinet, eſt ſemper ad pondus cylindri aquæ, cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}$ *GH*, (y) ut *EFq* ad $EFq - \frac{1}{2} PQq$, ſive ut circulus *EF* ad exceſſum circuli hujus ſupra ſemiſſem circelli *PQ* quamproximè.

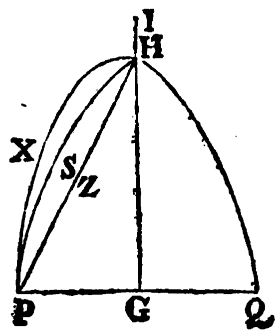
(x) * *Nam pondus hocce eſt medium arithmeticum.* Cùm enim columna illa aquæ, quam circellus valde parvus ſuſtinet, major ſit tertiâ parte cylindri cujus baſis eſt circellus ille & altitudo HG (*cor.* 7.), & minor duabus tertiis partibus ejuſdem cylindri (*cor.* 8.); erit ferè æqualis medio arithmetico inter cylindros $\frac{1}{3}$ PQ × HG; & $\frac{2}{3}$ PQ × HG. Eſt autem medium illud arithmeticum æquale dimidiæ ſummæ illorum cylindrorum, id eſt, cylindro $\frac{1}{2}$ PQ × HG; cujus baſis eſt circellus PQ, & altitudo $\frac{1}{2}$ HG.

(y) * *Ut* EFq *ad* $EFq - \frac{1}{2} PQq$. Hæc enim ſuppoſitio ſuperioribus determinationibus ſatisfacit. Nam ſit *p* pondus aquæ quam circellus ſuſtinet; P pondus cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo GH; & ſi (juxtà cor. hoc. 10.) ponatur $p : \frac{1}{2} P = EF^2 : EF^2 -$

$\frac{1}{2}$ P

$\frac{1}{2}PQ^2$, erit $p = \frac{\frac{1}{2}P \times EF^2}{EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2}$. Sed quantitas $\frac{\frac{1}{2}P \times EF^2}{EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2} = \frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2}$ ſemper major eſt quantitate $\frac{1}{2}P$, quod cor. 7. ſatisfacit. Et contrà quantitas illa $\frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2}$, minor eſt quàm $\frac{2}{3}P$, ubi circellus eſt, ſatis parvus ſeu quamdiu $2\overline{PQ}^2 < EF^2$ (cùm enim ſit $\overline{PQ}^2 = \frac{EF^2}{2}$, tunc illa quantitas p eſt $\frac{2P \times \overline{EF}^2}{3EF^2} = \frac{2}{3}P$, (quæ eſt determinatio cor. 8.). Tandem ubi circellus infinitè minor eſt quàm foramen EF, fit $\frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2} = \frac{1}{2}P$, & ubi circellus adæquat foramen EF, eſt $\frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2} = P$, quæ duo cum cor. 9. determinationibus congruunt.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVI. PROBL. VIII.



277. Si circellus PQ ſit valdè parvus; & vertice P axe PG deſcribatur per punctum H, parabolæ arcus PSH, & figura PSHG circà HG convolvatur, ſolidum inde genitum columnam aquæ quam circellus ſuſtinet exhibebit quam proximè. Nam angulus SPG quem parabola cum axe PG, continet, rectus eſt, & ideò quam proximè æqualis angulo quem prædictæ columnæ ſuperficies cum circello valdè parvo PQ efficit (*cor.* 8.); & evaneſcente PG, angulus SHG arcu parabolæ SH & rectâ HG comprehenſus fit infinitè parvus, ut oportet (*per idem cor.* 8.). Prætereà ſi jungatur recta PZH, & centro G, ac ſemiaxibus conjugatis GH, & GP deſcribatur ellipſeos quadrans PXH, & figuræ PZHG, PSHG, PXHG circà axem HG convolvantur, ſolidum quod per revolutionem figuræ parabolicæ PSHG generatur, majus erit cono ex rotatione trianguli PZHG genito, & minus hemiſphæroide quam figura PXHG rotata deſcribit, quod cor. 7°. & 8°. ſatisfacit. Tandem, calculo inito, facile patet ſolidum quod per convolutionem figuræ PSHG, gignitur, eſſe ad cylindrum cujus baſis eſt circellus PQ, & altitudo GH, ut 8 ad 15, quæ ratio non multùm aberrat à ratione 1 ad 2 quam NEWTONUS in cor. 9. invenit. 277.

LEMMA IV.

Cylindri, qui ſecundum longitudinem ſuam uniformiter progreditur, reſiſtentia ex auctâ vel diminutâ ejus longitudine non mutatur; ideoque eadem eſt cum reſiſtentia circuli eâdem diametro deſcripti & eâdem velocitate ſecundùm lineam rectam plano ipſius perpendicularem progredientis.

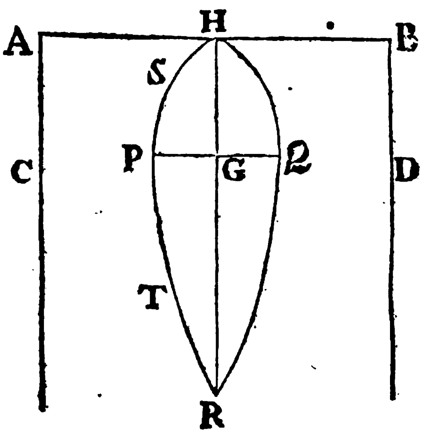
(z) Nam latera cylindri motui ejus minimè opponuntur: & cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminutâ, in circulum vertitur.

PRO-

278. Si circulus P Q valdè parvus maneat reſpectu foraminis E F, foramen verò E F quantumvis augeatur finitum ſit, & vas A B D C infinitum evadat, æquales erunt altitudines I G & H G, & velocitas aquæ in loco P Q, ea erit quàm aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem H G, acquirere poteſt (*per cor. 1. Prop. hujus 26.*). Iiſdem poſitis, ſi vas A B D C infrà circulum P Q continuetur, & aqua poſtquam pervenit ad locum P Q, ſolâ vi inſitâ pergat uniformiter moveri cum illâ velocitate quam habet in loco P Q, ſitque P Q R columna aquæ congelatæ, cujus fluiditas ad promptiſſimum alterius aquæ motum non requiritur; ut ſuprà de columnâ P H Q dictum eſt; erit G R = 2 G H & P T R ferè arcus parabolæ cujus vertex P axis P G, & ordinata G R. Nam * fingatur conſiderari lapſum ejus aquæ quæ per conoeidem HPQ moveretur ſeorſim à lapſu reliquæ aquæ Vaſis, liquet quod eo tempore quo aquæ gutta motu verticali uniformiter accelerato cadit ex H in G effluet bis ea aquæ copia quæ in conoeide H P Q continetur; ea ergo aquæ copia erit æqualis cylindro cujus altitudo erit H G, & Baſis circulus P Q, particula verò G celeritate ex lapſu per H acquiſita deſcribet 2 H G ſive G R, tota ergo aqua quæ per Conoidem H P Q movebitur occupabit figuram cujus Baſis eſt circulus P Q, cujus altitudo eſt 2 H G, & ſoliditas dimidium cylindri cujus P Q foret Baſis, & altitudo 2 H G, ſed per præcedentem Paraboloeides eſt ferè dimidium cylindri circumſcripti: ergo aqua quæ per Conoidem effluit cum Paraboloeidem occuparet: eſt ergo columna P Q R columna aquæ congelatæ quæ ad promptiſſimum aquæ reliquæ circumpoſitæ motum non requiritur. Hæc ad demonſtrationem Scholii proximi hic adnectenda viſa ſunt; utrum ſatis rectè NEWTONIANÆ demonſtrationis indolem ſimus aſſecuti, videat B. Lector,

Si quid noviſti rectiùs iſtis

Candidus imperti; ſi non, his utere mecum.



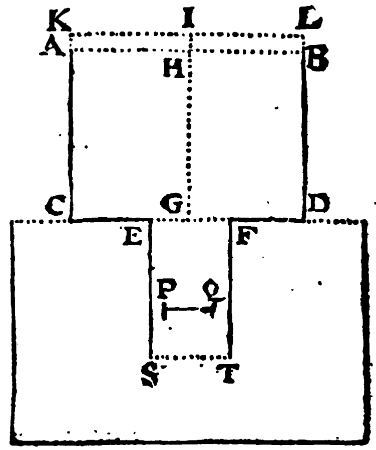
(z) * *Nam latera cylindri &c.* Hic enim latera cylindri eſſe politiſſima, & medii tenacitatem & frictionem eſſe nullam ſupponitur.

279. Lemma. *Vires uniformes ſunt directè ut quantitates motus quas generant, & inversè ut tempora quibus illas generant,* (13. & 15. lib. 1.); & quia motûs quantitates ſunt ut maſſæ & velocitates conjunctim, ſive ut volumina & denſitates & velocitates, *vires uniformes ſunt etiam in ratione compoſitâ ex rationibus directis voluminum, denſitatum & velocitatum & ratione inversâ temporum quibus velocitates illas generant*; cùmque tempora illa ſint

ut

PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA XXIX.

Cylindri, qui in fluido compreſſo infinito & non elaſtico ſecundum longitudinem ſuam uniformiter progreditur, reſiſtentia, quæ oritur à magnitudine ſectionis tranſverſæ, eſt ad vim quâ totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas medii ad denſitatem cylindri quamproximè.



Nam ſi vas *ABDC* fundo ſuo *CD* ſuperficiem aquæ ſtagnantis tangat, & aqua ex hoc vaſe per canalem cylindricum *EFTS* horizonti perpendicularem in aquam ſtagnantem effluat, locetur autem circellus *PQ* horizonti parallelus ubivis in medio canalis, & producatur *CA* ad *K*, ut ſit *AK* ad *CK* in duplicatâ ratione quam habet exceſſus orificii canalis *EF* ſupra circellum *PQ* ad circellum *AB*: manifeſtum eſt (*per caſ.* 5. *caſ.* 6. & *cor.* 1. *prop.* XXXVI.) quod velocitas aquæ tranſeuntis per ſpatium annulare inter circellum & latera vaſis, ea erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *KC* vel *IG* acquirere poteſt.

Et

ut ſpatia deſcripta directè & velocitates inversè (31. lib. 1.); *vires uniformes ſunt quoque in ratione compoſitâ ex rationibus directis voluminum, denſitatum & quadratorum velocitatis & ratione inversâ ſpatiorum deſcriptorum*; & quia velocitates ſunt ut ſpatia deſcripta directè & tempora inversè, *vires uniformes ſunt etiam in ratione compoſitâ ex ratione voluminum, denſitatum & ſpatiorum deſcriptorum, & ratione inversâ duplicatâ temporum, quibus ſpatia illa deſcribuntur.* 280.

280. *Cor.* Quoniam cylindrorum volumina ſunt ut eorum altitudines & diametrorum quadrata conjunctim; *vires uniformes quibus urgentur cylindri, ſunt in ratione quæ componitur ex rationibus directis altitudinum cylindrorum, quadratorum diametrorum, denſitatum & velocitatum à viribus illis genitarum, & ratione inversâ temporum quibus velocitates illas generant*; ſunt etiam in ratione quæ componitur ex *rationibus directis altitudinum, quadratorum diametrorum, denſitatum & quadratorum velocitatum, & ratione inversâ ſpatiorum deſcriptorum*; Sunt quoque vires illæ in ratione compoſitâ *ex rationibus directis altitudinum cylindrorum, quadratorum diametrorum, denſitatum & ſpatiorum deſcriptorum, & ratione inversâ duplicatâ temporum, quibus ſpatia illa deſcribuntur.* Ubi prædictarum quantitatum, ex quibus virium ratio compoſita eſt, aliquæ datæ ſunt, iis deletis habetur virium ratio.

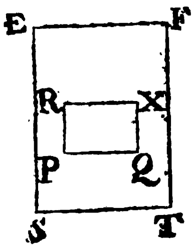
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVII. THEOR. XXIX.

Et (*per corol.* x. *prop.* XXXVI.) ſi vaſis latitudo ſit infinita; (a) ut lineola HI evaneſcat & altitudines IG, HG æquentur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus cylindri cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2} IG$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2} PQq$ quam proximè. Nam vis aquæ, (b) uniformi motu defluentis per totum canalem, eadem erit in circellum PQ in quâcunque canalis parte locatum.

Claudantur jam canalis orificia EF, ST, & aſcendat circellus in fluido undique compreſſo, & aſcenſu ſuo cogat aquam ſuperiorem deſcendere per ſpatium annulare inter circellum & latera canalis: & velocitas circelli aſcendentis erit ad velocitatem aquæ deſcendentis (c) ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum PQ, & velocitas circelli aſcendentis ad ſummam velocitatum, (d) hoc eſt, ad velocitatem relativam aquæ deſcendentis quâ præterfluit circellum aſcendentem, ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum EF, ſive ut $EFq - PQq$ ad EFq.

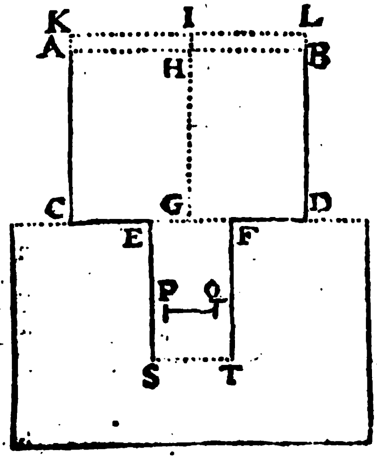
(a) * *Ut lineola HI evaneſcat.* Per cor. 1. prop. 37. aut (per not. 275.).

(b) * *Uniformi motu defluentis.* (Per caſ. 6. prop. 36.).



(c) * *Ut differentia circulorum.* Velocitates uniformes ſunt ut ſpatia eodem tempore deſcripta; ſed inter eadum circulus PQ ſpatium ſolidum, ſeu cylindrum PQXR deſcribit, deſcendit aquæ quantitas huic cylindro æqualis, & propterea altitudo verticalis per quam aqua deſcendit, æquatur longitudini quæ habetur dividendo valorem cylindri PQXR per valorem ſectionis annularis inter circulum PQ & vaſis latera ES, FT comprehenſam, ideóque ſi $\overline{EF}^2$ & $\overline{PQ}^2$, circulos, & RP, lineam rectam ſignificent, altitudo illa per quam aqua deſcendit eſt $\frac{\overline{PQ}^2 \times RP}{\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2}$. Quarè velocitas circuli aſcendentis eſt ad velocitatem aquæ deſcendentis ut altitudo RP, ad altitudinem $\frac{\overline{PQ}^2 \times RP}{\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2}$, id eſt, ut $\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2$ ad $\overline{PQ}^2$, ſivè ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum PQ.

(d) * *Hoc eſt ad velocitatem relativam.* Cùm circulus aſcendat & aqua deſcendat, velocitas relativa æqualis eſt ſummæ velocitatum oppoſitarum circuli & aquæ. Velocitas abſoluta circuli aſcendentis dicatur V, velocitas abſoluta aquæ deſcendentis v, & quia circuli ſunt ut diametrorum quadrata, ſi EF, & PQ, pro circulorum diametris ſumantur; erit (*ex dem.*) $V : v = EF^2 - PQ^2 : \overline{PQ}^2$, & ideo $V : V + v = EF^2 - PQ^2 : EF^2$.



EFq. Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati, quâ ſupra oſtenſum eſt aquam tranſire per idem ſpatium annulare dum circellus interea immotus manet, id eſt, velocitati quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG acquirere poteſt: & vis aquæ in circellum aſcendentem eadem erit ac prius (*per legum corol.* v.) id eſt, reſiſtentia circelli aſcendentis erit ad pondus cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2} IG$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2} PQq$ quamproximè. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem, quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG acquirit, ut $EFq - PQq$ ad EFq.

Augeatur amplitudo canalis in infinitum: & rationes illæ inter $EFq - PQq$ & EFq, interque EFq & $EFq - \frac{1}{2} PQq$ accedent ultimo ad rationes æqualitatis. Et propterea velocitas circelli ea nunc erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG acquirere poteſt, reſiſtentia verò ejus æqualis evadet ponderi cylindri cujus baſis eſt circellus ille & altitudo dimidium eſt altitudinis IG, à quâ cylindrus cadere debet ut velocitatem circelli aſcendentis acquirat; (e) & hâc velocitate cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis ſuæ deſcribet. Reſiſtentia autem cylindri, hâc velocitate ſecundum longitudinem ſuam progredientis, eadem eſt cum reſiſtentiâ circelli (*per lemma* IV.) ideoque æqualis eſt vi quâ motus ejus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, (f) generari poteſt quamproximè.

Si

(e) * *Et hâc velocitate*, cylindrus tempore cadendi duplum longitudinis I G, ſeu quadruplum longitudinis ſuæ $\frac{1}{2}$ I G, deſcribet (30. *lib.* 1.).

(f) * *Generari poteſt quamproximè.* Quo enim tempore cylindrus cum prædictâ velocitate uniformiter progrediendo, deſcribit ſpatium 2 I G; proprio pondere cadendo deſcriberet altitudinem I G; & velocitatem illam acquireret (30. *lib.* 1.). Cùm igitur reſiſtentia æqualis ſit ponderi cylindri, patet propoſitum.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVII. THEOR. XXIX.

Si longitudo cylindri augeatur vel minuatur, motus ejus ut & tempus, quo quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit (g), augebitur vel minuetur in eâdem ratione, ideoque vis illa, quâ motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli poſſit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis eſt reſiſtentiæ cylindri, nam & hæc quoque immutata manet per lemma IV.

(h) Si denſitas cylindri augeatur vel minuatur, motus ejus ut & vis quâ motus eodem tempore generari vel tolli poteſt, in eâdem ratione augebitur vel minuetur. Reſiſtentia itaque cylindri cujuſcunque erit ad vim quâ totus ejus motus, intereadum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, ut denſitas medii ad denſitatem cylindri quamproximè. *Q. E. D.*

Fluidum autem comprimi debet ut ſit continuum, (i) continuum verò eſſe debet & non elaſticum, ut preſſio omnis, quæ ab ejus compreſſione oritur, propagetur in inſtanti, & in omnes moti corporis partes æqualiter agendo reſiſtentiam non mutet. Preſſio utique, quæ à motu corporis oritur, impenditur in motum partium fluidi generandum & reſiſtentiam creat.

(g) * *Augebitur vel minuetur.* Quantitas motûs in cylindro cujus baſis, denſitas & velocitas datæ ſunt, augetur vel minuitur in ratione longitudinis cylindri ſeu voluminis, & tempus quo cylindrus datâ illâ velocitate uniformiter progrediendo quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, augetur vel minuitur in eâdem longitudinis auctæ vel diminutæ ratione (5. lib. I.) ideoque (179) vis *illa quâ motus auctus &c.*

(h) * *Si denſitas cylindri* cæteris manentibus, *augeatur vel minuatur, motus ejus ut & vis quâ motus eodem tempore generari vel tolli poteſt, in eâdem ratione augebitur vel minuetur* (279). Cùm igitur cylindri cujuſcunque reſiſtentia æqualis ſit vi quâ motus cylindri aquæ ejuſdem baſis, altitudinis & velocitatis, intereadum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, generari vel tolli poſſit, & vis hæc ſit ad vim quâ totus prioris cylindri motus eodem tempore generari poſſit vel tolli, ut denſitas aquæ ad denſitatem cylindri, conſequens eſt ut reſiſtentia cylindri cujuſcumque ſit ad vim quâ totus ejus motus, intereadum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, generari vel tolli poteſt, ut denſitas aquæ ad denſitatem cylindri quamproxime.

(i) * *Continuum verò eſſe debet & non elaſticum.* Nam ſi fluidum eſſet elaſticum, ipſius partes per compreſſionem condenſarentur, & deinde rareſierent, atque ità preſſio per motum progreſſivum, qui inſtantaneus eſſe non poteſt, propagaretur. At ſi fluidum continuum ſit & denſari compreſſione nequeat, preſſio propagabitur in inſtanti. Experimentis verò conſtat aquam in ſtatu naturali conſtitutam vix poſſe condenſari, ſeu in ſpatium minus compreſſione redigi; cùm è contrà aër maximæ condenſationis & rarefactionis ſit capax.

creat. Preſſio autem quæ oritur à compreſſione fluidi, utcunque fortis ſit, ſi propagetur in inſtanti, nullum generat motum in partibus fluidi continui, nullam omnino inducit motus mutationem; ideoque reſiſtentiam nec auget nec minuit. Certè actio fluidi, quæ ab ejus compreſſione oritur, fortior eſſe non poteſt in partes poſticas corporis moti quàm in ejus partes anticas, ideoque reſiſtentiam in hac propoſitione deſcriptam minuere non poteſt: & fortior non erit in partes anticas quàm in poſticas, ſi modo propagatio ejus infinitè velocior ſit quàm motus corporis preſſi. Infinitè autem velocior erit & propagabitur in inſtanti, ſi modo fluidum ſit continuum & non elaſticum.

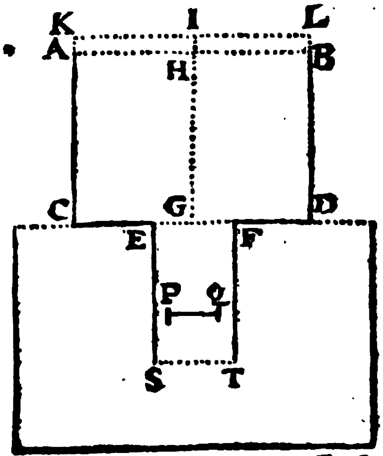
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVII. THEOR. XXIX.

(k) *Corol.* 1. Cylindrorum, qui ſecundum longitudines ſuas in mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, reſiſtentiæ ſunt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione denſitatis mediorum.

(l) *Corol.* 2. Si amplitudo canalis non augeatur in infinitum, ſed cylindrus in medio quieſcente incluſo ſecundum longitudinem ſuam progrediatur, & interea axis ejus cum axe canalis coincidat: reſiſtentia ejus erit ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel

(k) *Cor.* 1. Sic demonſtratur. Reſiſtentia cylindri cujuſque eſt directè ut denſitas medii & vis uniformis quâ totus cylindri motus, quo tempore quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit vel generari vel tolli poſſit, & inversè ut denſitas cylindri (ex dem.); Sed vis illa uniformis eſt in ratione compoſitâ ex rationibus directis longitudinis cylindri, quadrati diametri, denſitatis & quadrati velocitatis & ex ratione inverſâ ſpatii deſcripti, ſeu ex ratione inverſâ longitudinis cylindri (280.) Quare (per compoſitionem rationum & ex æquo), reſiſtentia cylindri cujuſcumque, ſi conferatur cum reſiſtentiâ alterius cylindri, eſt in ratione quæ componitur ex ratione denſitatis medii, & ratione duplicatâ diametri & duplicatâ ratione velocitatis. 280.

(l) * *Cor.* 2. Sic demonſtratur. * Si Canalis non ſit infinitus reſpectu baſeos cylindri incluſi, reſumantur ea quæ ſub initium Theor. iſtius 37. dicebantur; Primo nempe quod aſcendente circello in canali clauſo, velocitas relativa aquæ ſemper ſit ad ejus velocitatem ut baſis canalis



vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ ſemel, & ratione EFq ad $EFq - PQq$ bis, & ratione denſitatis medii ad denſitatem cylindri.

Corol. 3. Iiſdem poſitis, & quod longitudo L ſit ad quadruplum longitudinis cylindri in ratione quæ componitur ex ratione $EFq - \frac{1}{2}PQq$ ad EFq ſemel, & ratione EFq $- PQq$

lis E F ad annulum E P ſive ad differentiam circulorum E F & P Q ſive ut E F 2 ad $EF^2 - PQ^2$; Quæratur igitur altitudo I G talis ut velocitas lapſu per eam acquiſita ſit ad velocitatem circelli, ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$, & ſi fingatur circellus immotus in medio foraminis E F & aqua cadens ex altitudine I G ex vaſe ampliſſimo A B D B per illud foramen, cùm velocitas aquæ juxta circellum tranſiens eadem ſit ac velocitas reſpectiva aquæ juxta cylindrum in canali clauſo motum, actio aquæ in circellum utrinque æqualis cenſenda eſt, ſed actio aquæ ſive ejus pondus in circellum per Cor. 10. Prop. 36. eſt ad cylindrum cujus baſis eſt circellus altitudo $\frac{1}{2}$ I G ſicut EF^2 ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, hæc itaque erit ratio Reſiſtentiæ ad pondus cylindri aquei cujus baſis eſt circellus & altitudo $\frac{1}{2}$ I G; Sed gravitas eſt vis quæ tempore quo percurritur uniformiter quadruplum longitudinis $\frac{1}{2}$ I G ſive 2 I G velocitate lapſu per I G acquiſitâ, generare poteſt eam ipſam velocitatem, & pondus cylindri eſt ipſa gravitas per maſſam cylindri multiplicata, ergo pondus cylindri, eſt vis quæ dum percurritur quadruplum longitudinis cylindri velocitate lapſu per I G acquiſitâ, generare poteſt motum ejus cylindri eâ velocitate moti.

Cùm verò celeritas quæ lapſu per I G acquiritur ſit ad eam cum quâ cylindrus movetur ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$. Quadruplum longitudinis cylindri propriâ ſuâ celeritate alio tempore percurret quàm ſi moveatur celeritate lapſu per I G acquiſitâ. Gravitas ergo cylindri, erit ad eam vim quâ cylindri velocitas acquiritur tempore quo quadruplum longitudinis ſuæ propriâ ſuâ celeritate deſcribitur, directè ut celeritates quæ iis viribus acquiruntur & inversè ut tempora quibus acquiruntur, quæ tempora (cum agatur de deſcribendo uniformiter eodem ſpatio quadruplo nempe longitudinis cylindri) ſunt inversè ut velocitates, ideoque Pondus cylindri eſt ad vim quâ ejus cylindri motus acquiritur tempore quo quadruplum longitudinis ſuæ propriâ ſuâ celeritate deſcribitur bis directè ut celeritas lapſu per I G acquiſita, ad celeritatem Cylindri, ſive bis ut EF^2, ad $EF^2 - PQ^2$.

Ergo ex æquo Reſiſtentia eſt ad eam vim ſicut EF^2 ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ & *bis* ut EF^2 ad $EF^2 - PQ$. At, nec reſiſtentia nec ea vis mutantur longitudine cylindri mutata, ſed tantum denſitate mutatâ ut ex ipſa propoſitionis demonſtratione liquet, eſt autem vis quâ motus in Cylindro aqueo generatur, dato tempore quo quadruplum ſuæ longitudinis ſuâ cum velocitate percurrit, ad eam vim qua motus in æquali cylindro, ſed diverſæ denſitatis æquali cum velocitate moto, eodem tempore generatur, ut denſitas

—PQq ad EFq bis: (m) reſiſtentia cylindri erit ad vim quâ totus ejus motus, interera dum longitudinem L deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas medii ad denſitatem cylindri.

Scholium.

In hâc propoſitione reſiſtentiam inveſtigavimus quæ oritur à ſolâ magnitudine tranſverſæ ſectionis cylindri, neglectâ reſiſtentiæ parte quæ ab obliquitate motuum oriri poſſit. Nam quemadmodum in caſu primo propoſitionis XXXVI. obliquitas motuum, quibus partes aquæ in vaſe, undique convergebant in foramen *E F*, impedivit effluxum aquæ illius per foramen: ſic in hâc propoſitione, obliquitas motuum, quibus partes aquæ ab anteriore cylindri termino preſſæ, cedunt preſſioni & (n) undique divergunt, retardat eorum tranſitum per loca in circuitu termini illius antecedentis verſus poſteriores partes cylindri, efficitque ut fluidum ad majorem diſtantiam commoveatur & reſiſtentiam auget, (o) idque in eâ ferè ratione quâ effluxum aquæ è vaſe diminuit, id eſt in ratione duplicatâ 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in propoſitionis illius caſu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter & maximâ copiâ tranſirent per foramen *E F*, ponendo quod aqua omnis in vaſe

ſitas aquæ ſive medii, ad denſitatem Cylindri, ergo tandem Reſiſtentia eſt ad vim quâ motus in Cylindro generari vel tolli poteſt quo tempore quadruplum ſuæ longitudinis propriâ cum velocitate deſcribit, ut EF^2 ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ & bis ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$ & ut denſitas medii ad denſitatem Cylindri. Q. E. D.

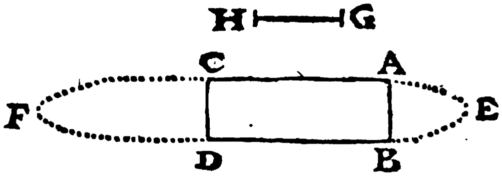
(m) * *Reſiſtentia cylindri erit ad vim* Nam (per cor. 2. & hyp.) reſiſtentia cylindri eſt ad vim quâ totus eius motus, quo tempore quadruplum longitudinis ſuæ uniformiter deſcribit vel generari poſſit vel tolli, in ratione compoſitâ ex ratione quadruplæ longitudinis cylindri ad longitudinem L & ratione denſitatis medii ad denſitatem cylindri, & (279) vis quâ totus cylindri motus, intereadum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, generari vel tolli poſſit, eſt ad vim quâ idem ejuſdem
cylindri motus quo tempore longitudinem 280.
L uniformiter deſcribit vel tolli poſſit vel generari, in ratione inverſâ temporum, ſive ob eamdem utrinque celeritatem in ratione inverſâ ſpatiorum, hoc eſt, in ratione longitudinis *L* ad quadruplum longitudinis cylindri. Quare (ex æquo) reſiſtentia cylindri eſt ad vim quâ totus ejus motus, intereadum longitudinem L uniformiter deſcribit tolli poſſit vel generati, ut denſitas medii ad denſitatem cylindri.

(n) * *Et undiquè divergunt.* Vid. Prop. 41. & 42. lib. hujus.

(o) * *Idque in eâ ferè ratione.* Eodem enim ferè modo motus obliqui in aquæ partibus excitantur, ſive aqua in planum circuli immotum impingat, ſive circulus eâdem cum velocitate in aquâ quieſcente feratur.

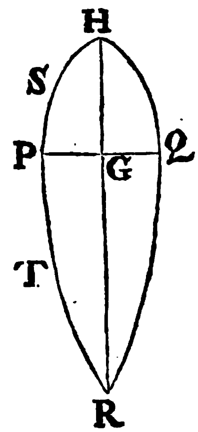
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVII. THEOR. XXIX.

ſe quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, & cujus motus obliquus erat & inutilis, maneret ſine motu: ſic in hâc propoſitione, ut obliquitas motuum tollatur & partes aquæ motu maximè directo & breviſſimo cedentes facillimum præbeant tranſitum cylindro, & ſola maneat reſiſtentia, quæ oritur à magnitudine ſectionis tranſverſæ, quæque diminui non poteſt niſi diminuendo diametrum cylindri, concipiendum eſt quod partes fluidi, quarum motus ſunt obliqui & inutiles & reſiſtentiam creant, quieſcant inter ſe ad utrumque cylindri terminum, & cohæreant & (p) cylindro jungantur. Sit *ABCD* rectangulum, & ſint *AE* & *BE* arcus duo parabolici axe *AB* deſcripti, latere autem recto quod



ſit ad ſpatium *HG*, deſcribendum à cylindro cadente dum veloci-

(p) * *Et Cylindro jungantur.* Ut num. 277. 278. factum eſt, ubi circulo P Q in quem aqua influebat cum eâ velocitate quam cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem HG acquirit & deinde movebatur uniformiter junctæ ſunt glaciei columnæ duæ parabolicæ P H Q & P R Q, quæ aquas exhibent, quarum fluiditas ac motus ſunt inutiles, & parabolarum PSH, PTS erat vertex principalis P, axis PG, & ordinatæ GH, ac GR, ideòque parabolæ PSH, latus rectum $\frac{GH^2}{PG}$, & parabolæ PTR latus rectum $\frac{GR^2}{PG}$ ſeu $\frac{4\,GH^2}{PG}$ prioris $\frac{GH^2}{PG}$, quadruplum (per theor. 1. de parab.). Hinc ſi aqua quieſcat & circulus P Q in aquâ moveatur cum eâdem velocitate quam grave cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem HG acquirit, columnæ illæ PHQ & PRQ aquas fere exponent quarum fluiditas ac motus inutiles ſunt ut partes aquæ motu maximè directo & breviſſimo cedentes facillimum præbeant tranſitum circulo. Sed (per Lem. IV.) loco circuli PQ ſubſtitui poteſt cylindrus ABDC



eâdem velocitate motus, & cujus baſes A B, CD circulo PQ æquales ſint, quibus proinde baſibus adjungendæ ſunt columnæ duæ A E B, C F D columnis PHQ, P R Q æquales reſpectivè, atque idipſum eſt quod NEWTONUS in hoc ſcholio fecit. Siquidem junctâ E F, mediis baſibus A B, CD, occurrente in L & K, & poſitâ

A B

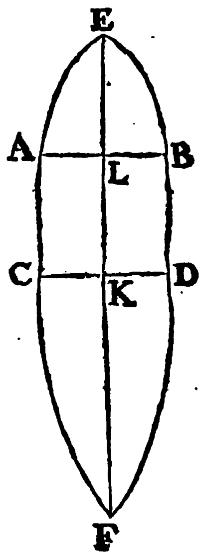
locitatem ſuam acquirit, ut *HG* ad $\frac{1}{2}$ *AB*. Sint etiam *CF* & *DF* arcus alii duo parabolici, axe *CD* & latere recto quod ſit prioris lateris recti quadruplum deſcripti; & convolutione figuræ circum axem *EF* generetur ſolidum cujus media pars *ABDC* ſit cylindrus de quo agimus, & partes extremæ *ABE* & *CDF* contineant partes fluidi inter ſe quieſcentes & in corpora duo rigida concretas, quæ cylindro utrinque tanquam caput & cauda adhæreant. Et ſolidi *EACFDB*, ſecundum longitudinem axis ſui *FE* in partes verſus *E* progredientis, reſiſtentia ea erit quamproxime quam in hâc propoſitione deſcripſimus, id eſt, quæ rationem illam habet ad vim quâ totus cylindri motus, interea dum longitudo 4 *AC* motu illo uniformiter continuato deſcribatur vel tolli poſſit vel generari, quam denſitas fluidi habet ad denſitatem cylindri quamproximè. (q) Et hâc vi reſiſtentia minor eſſe non poteſt quàm in ratione 2 ad 3. *per corol.* 7, *prop.* XXXVI.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXVIII. THEOR. XXIX.

LEM-

AB & CD ipſi PQ æqualibus; eſt (*per Newt. conſtr.*) Parabolæ AE latus rectum $\frac{HG^2}{AL} = \frac{HG^2}{PG} = \frac{EL^2}{AL}$, & ideò EL = HG. Et ſimili modo parabolæ CF, *Newtonianâ* conſtructione deſcriptæ, latus rectum eſt $\frac{4HG^2}{PG} = \frac{KF^2}{CK} = \frac{KF^2}{PG}$, ac proindè KF = 2HG = GR. Columnæ igitur AEB & CFD, non differunt à columnis PHQ & PRQ.

(q) * *Et hâc vi reſiſtentia minor eſſe non poteſt* &c. Reſiſtentia (per cor. 7. prop. 36.) minor eſſe non poteſt pondere cylindri aquæ, cujus baſis eſt circellus PQ (ſive AB) & altitudo $\frac{1}{3}$ EL ſeu $\frac{1}{3}$ HG. (vid. figuras ſuperiores.) Velocitas quam hic cylindrus aquæ, vi ponderis ſui cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem EL acquirit, æqualis eſt velocitati cum quâ cylindrus ACDB, in aquâ movetur (ex dem.) & ideò cùm baſis AB ſit etiam utrique cylindro communis, pondus cylindri aquæ erit ad vim quâ totus cylindri ABDC motus, quo tempore longitudinem 4 AC uniformiter deſcribit, generari poſſit vel tolli, in ratione compoſitâ ex ratione denſitatis aquæ ad denſitatem cylindri ABDC, & ratione altitudinis $\frac{1}{3}$ EL ad altitudinem AC, & ratione ſpatii 4 AC ad ſpatium 2 EL (280), id eſt, in ratione compoſitâ ex ratione denſitatis aquæ ad denſitatem cylindri ABDC & ratione 2 ad 3. Si itaque vis quâ totus cylindri ABDC motus, intereadum longitudinem 4 AC, uniformiter deſcribit, generari vel tolli poſſit, ſit ad vim aliquam P, ut denſitas cylindri ABDC ad denſitatem aquæ, erit (ex æquo) pondus prædicti cylindri aquæ ad vim P ut 2 ad 3, atquè ideò pondus cylindri aquæ, quo reſiſtentia minor eſſe non poteſt; quam in ratione 2 ad 3. 280.



LEMMA V.

Si cylindrus, ſphæra & ſphærois, quorum latitudines ſunt æquales, in medio canalis cylindrici ita locentur ſucceſſivè ut eorum axes cum axe canalis coincidant: hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impedient.

(r) Nam ſpatia inter canalem & cylindrum, ſphæram, & ſphæroidem per quæ aqua tranſit, ſunt æqualia: & aqua per æqualia ſpatia æqualiter tranſit.

Hæc ita ſe habent ex hypotheſi, quòd aqua omnis ſupra cylindrum ſphæram vel ſphæroidem congelatur, cujus fluiditas ad celerrimum aquæ tranſitum non requiritur, ut in *corol.* VII. *prop.* XXXVI. explicui.

LEMMA VI.

Iiſdem poſitis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab aquâ per canalem fluente.

Patet per lemma V. & motus legem tertiam. Aqua utique & corpora in ſe mutuo æqualiter agunt.

LEMMA VII.

Si aqua quieſcat in canali, & hæc corpora in partes contrarias æquali velocitate per canalem ferantur: æquales erunt eorum reſiſtentiæ inter ſe.

Conſtat ex lemmate ſuperiore, nam motus relativi iidem inter ſe manent.

Scho-

(r) * *Nam ſpatia inter canalem & tranſverſas ſectiones, ſeu latitudines maximas cylindri, ſphæræ & ſphæroidis per qua aqua ranſit, ſunt æqualia.* Vid. Schol. ſequens.

Scholium.

Eadem eſt ratio corporum omnium convexorum & rotundorum, quorum axes cum axe canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri poteſt; ſed in his lemmatis corpora eſſe politiſſima ſupponimus, & medii tenacitatem & frictionem eſſe nullam, & quod partes fluidi, quæ motibus ſuis obliquis & ſuperfluis fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, & retardare poſſunt, quieſcant inter ſe tanquam gelu conſtrictæ, & corporibus ad ipſorum partes anticas & poſticas adhæreant, perinde ut in ſcholio propoſitionis præcedentis expoſui. Agitur enim in ſequentibus de reſiſtentiâ omnium minimâ quam corpora rotunda, datis maximis ſectionibus tranſverſis deſcripta, habere poſſunt.

Corpora fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut fluidum ad partem anticam aſcendat, ad poſticam ſubſidat, præſertim ſi figura ſint obtuſa; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt quàm ſi capite & caudâ ſint acutis. Et corpora in fluidis elaſticis mota, ſi ante & poſt obtuſa ſint, fluidum paulo magis condenſant ad anticam partem & paulo magis relaxant ad poſticam; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt quam ſi capite & caudâ ſint acutis. Sed nos in his lemmatis & propoſitionibus non agimus de fluidis elaſticis, ſed de non elaſticis; non de inſidentibus fluido, ſed de altè immerſis. Et ubi reſiſtentia corporum in fluidis non elaſticis innoteſcit, augenda erit hæc reſiſtentia aliquantulum tam in fluidis elaſticis; qualis eſt aer, quàm in ſuperficiebus fluidorum ſtagnantium, qualia ſunt maria & paludes.

PRO-

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XXXVIII. Theor. XXX.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XXX.

Globi, in fluido compreſſo infinito & non elaſtico uniformiter progredientis, reſiſtentia eſt ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri ſuæ deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas fluidi ad denſitatem globi quamproximè.

(ſ) Nam globus eſt ad cylindrum circumſcriptum ut duo ad tria; & propterea vis illa, quæ tollere poſſit motum omnem cylindri interea dum cylindrus deſcribat longitudinem quatuor diametrorum, globi motum omnem tollet interea dum globus deſcribat duas tertias partes hujus longitudinis, id eſt, octo tertias partes diametri propriæ. Reſiſtentia autem cylindri eſt ad hanc vim quamproximè ut denſitas fluidi ad denſitatem cylindri vel globi per prop. XXXVII. & reſiſtentia globi æqualis eſt reſiſtentiæ cylindri per lem. V, VI, VII. *Q. E. D.*

(t) *Corol.* 1. Globorum, in mediis compreſſis infinitis, reſiſtentiæ ſunt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatis, & duplicatâ ratione diametri, & ratione denſitatis mediorum.

Corol. 2. Velocitas maxima quâcum globus, vi ponderis ſui comparativi, in fluido reſiſtente poteſt deſcendere, ea eſt quam acquirere poteſt globus idem, eodem pondere, ſine reſiſtentiâ cadendo & caſu ſuo deſcribendo ſpatium quod ſit ad quatuor tertias partes diametri ſuæ ut denſitas globi ad denſitatem;

(ſ) * *Nam globus eſt ad cylindrum circumſcriptum ut duo ad tria* (170. lib. 1.) & propterea, cum eadem ſit globi & cylindri denſitas eademque velocitas (ex hyp.) quantitas motûs globi eſt ad quantitatem motûs cylindri ut duo ad tria, & tempus quo globus octo tertias partes diametri propriæ uniformiter deſcribit, eſt ad tempus quo cylindrus eâdem uniformi velocitate quadruplum longitudinis ſuæ, ſeu duodecim tertias diametrorum globi deſcribit, etiam ut duo ad tria. Quare (178) vis uniformis quâ totus globi motus interea dum octo tertias partes diametri propriæ deſcribit tolli poſſit vel generari, eſt ad vim uniformem quâ totus cylindri motus, quo tempore longitudinem quatuor diametrorum globi deſcribit vel tolli vel generari poſſit ut duo ad tria directè & duo ad tria inversè, id eſt, in ratione æqualitatis. *Reſiſtentia autem cylindri &c.*

(t) * *Cor.* 1. Patet per cor. 1. prop. 37., quiâ reſiſtentia globi æqualis eſt reſiſtentiæ cylindri circumſcripti.

ſitatem fluidi. Nam globus tempore caſus ſui, cum velocitate cadendo acquiſitâ, (u) deſcribet ſpatium quod erit ad octo tertias diametri ſuæ, ut denſitas globi ad denſitatem fluidi; & vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare poſſit, quo tempore globus octo tertias diametri ſuæ eâdem velocitate deſcribit, ut (x) denſitas fluidi ad denſitatem globi: ideoque per hanc propoſitionem, vis ponderis æqualis erit vi reſiſtentiæ, & propterea globum accelerare non poteſt.

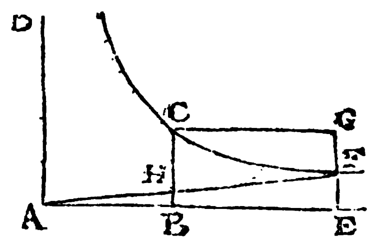
De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XXXVIII. Theor. XXX.

(y) *Corol.* 3. Datâ & denſitate globi & velocitate ejus ſub initio motus, ut & denſitate fluidi compreſſi quieſcentis in quo globus movetur; datur ad omne tempus & velocitas globi & ejus reſiſtentia & ſpatium ab eo deſcriptum, per *corol.* VII. *prop.* XXXV.

(u) * *Deſcribet ſpatium quod erit ad octo tertias partes diametri ſuæ &c.* Deſcribet enim ſpatium duplum illius quod vi ponderis ſui comparativi ſine reſiſtentia cadendo deſcripſit (30. lib. 2.), id eſt, *ſpatium quod erit ad octo tertias partes &c.*

(x) * *Ut denſitas fluidi ad denſitatem globi.* Sit *D* diameter globi, 2 *F* ſpatium quod ſit ad $\frac{8}{3}$ *D* ut denſitas globi ad denſitatem fluidi; & tempus quo globus uniformiter deſcribit ſpatium $\frac{8}{3}$ *D*, erit ad tempus quo eâdem uniformi velocitate deſcribit ſpatium 2 *F*, ut $\frac{8}{3}$ *D* ad 2 *F* (5. *lib.* 1.), id eſt, ut denſitas fluidi ad denſitatem globi. Cùm igitur vires uniformes ſint reciprocè ut tempora quibus motus æquales generant (279), patet propoſitum.

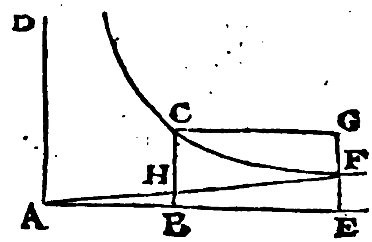
(y) 282. Cor. 3. *Datâ & denſitate globi & velocitate ejus ſub initio motus & denſitate fluidi datur ad omne tempus & velocitas globi, & ejus reſiſtentia & ſpatium ab eo deſcriptum.* * Primum, ex datâ denſitate globi, & denſitate fluidi, invenietur, per Cor. 2, vis æqualis reſiſtentiæ cùm velocitas ea eſt quam



acquirere poteſt is globus, cadendo in vacuo per vim ſui ponderis comparativi & deſcribendo ſpatium quod ſit ad quatuor tertias Diametri ſuæ ut denſitas globi ad denſitatem fluidi. 282.

Secundò, ex datâ hac reſiſtentiâ invenietur reſiſtentia quæ competit velocitati globi de quo agitur ſub initio ejus motus, quia reſiſtentiæ hic ſupponuntur eſſe ut quadrata velocitatum; iſtâ autem reſiſtentiâ cognitâ dabitur tempus quo ſi hæc reſiſtentia uniformiter ageret, totam velocitatem quam habet globus ſub initio motus deſtruere poſſet, ſicque ſi B C deſignet eam velocitatem initio motus ſimulque reſiſtentiam ipſi competentem, deſigneturque per A B illud tempus quo ea velocitas per reſiſtentiam uniformem deſtrui poteſt, & erecto perpendiculo A D, aſymptotis A D, A B per punctum C deſcribatur Hyperbolâ,

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVIII. THEOR. XXX.



la, ex ejus Hyperbolæ conſtructione dabitur ad quodlibet tempus (quod deſignabitur per BE) velocitas reſidua EF, reſiſtentia BH, & ſpatium deſcriptum CBEF; Quâ autem ratione hæc ſingula ad calculum revocentur, dicendum.

I. Vis illa quæ reſiſtentiæ æqualis eſſe debet cùm Corpus habet velocitatem maximam quam lapſu ſuo in fluido dato acquirere poteſt, eſt ipſum pondus comparativum corporis, ſit ergo A ejus pondus, Denſitas data corporis eſt ad denſitatem fluidi, ut A ad pondus æqualis voluminis fluidi, quo invento, detrahatur illud ex pondere A, relinquitur pondus comparativum globi in fluido quod dicatur B.

Ut præterea determinetur tempus quo eo pondere B corpus percurret cadendo ſpatium quod ſit ad quatuor tertias Diametri ſuæ ut ejus denſitas ad denſitatem fluidi, ſive, ſi dicatur *D* Diameter & dicatur *F* ſpatium quod ſit ad $\frac{4}{3}D$ ut denſitas globi ad denſitatem medii, ut determinetur tempus quo globus pondere *B* cadendo percurret ſpatium *F* poſito quod grave cadendo in vacuo pondere A tempore unius minuti ſecundi pedes Pariſienſes $15\frac{1}{12}$ percurrit, & cùm ſpatia diverſis viribus acceleratricibus deſcripta eodem tempore ſint ut illæ vires, ſpatium $15\frac{1}{12}$ pedum pondere A uno minuto ſecundo percurſum eſt ad ſpatium eodem tempore pondere *B* percurſum ut A ad B. Ut autem eſt illud ſpatium, ad ſpatium F, ita quadratum minuti unius ſecundi ad quadratum temporis quo eo pondere *B* ſpatium F percurretur, quod tempus dicatur *G*, cumque velocitate per lapſum acquiſitâ duplum ſpatii lapſu percurſi uniformiter deſcribatur ipſo lapſus tempore, ideo velocitate pondere *B* tempore *G* acquiſitâ, eodem tempore *G* deſcriberetur 2 *F*, cùmque velocitas omnis exprimatur per ſpatium diviſum per tempus, erit ea velocitas maxima $\frac{2F}{G}$ quæ in poſterum dicatur *H*.

II. Datâ autem quâvis aliâ ejuſdem globi velocitate in eodem fluido eaque dicatur M, reſiſtentia ipſi competens ita obtinetur, ut quadratum velocitatis H ad quadratum velocitatis hujuſce *M*, ita eſt reſiſtentia adverſus velocitatem H cui pondus B æquiponet, ad reſiſtentiam adverſus velocitatem *M*, quam vocabo *R*; cum ergo prius data ſit ratio *A* ad *B* dabitur etiam ratio *A* ad *R* ideoque dabitur ſpatium quod actione vi *R* uniformi ſuppoſitâ per unum minutum ſecundum deſcriberetur, ſiquidem ſpatia per diverſas vires uniformes acceleratrices deſcripta iiſdem temporibus ſunt ut illæ vires, ideoque *A* ad *R* ut $15\frac{1}{12}$ ped. ad ſpatium uno minuto ſecundo deſcriptum, cujus ſpatii duplum per unum minutum ſecundum diviſum exprimit velocitatem vi *R* per unum minutum ſecundum productam. Unde invenietur tempus quo per eam vim *R* uniformiter agentem velocitas *M* produci vel etiam deſtrui poſſet, velocitates enim per eamdem vim acquiſitæ ſunt ut tempora quibus acquiruntur; Ergo velocitas tempore unius minuti ſecundi acquiſita eſt ad velocitatem *M*, ut unum minutum ſecundum ad tempus quo vis R velocitatem *M* generare vel tollere poſſet. Unde tandem in Hyperbolæ conſtructione datur valor temporis per lineam A B deſignati.

Sumatur ergo B E quod ſit ad A B ut tempus quod aſſumere lubet ad tempus illud quo vis R velocitatem *M* quæ per BC exprimitur generare vel tollere poteſt uniformiter agendo, & ducatur ordinata EF, ea deſignabit velocitatem globi eo tempore ſuperſtitem quæ ex naturâ Hyperbolæ habebitur, eſt enim A E, ad A B, ſicut B C ſive *M* ad B E F, unde cum ſit A E = A B + B E; ſitque A B tempus mox inventum, B E

tempus

(z) *Corol.* 4. Globus in fluido compreſſo quieſcente ejuſdem ſecum denſitatis movendo, dimidiam motus ſui partem prius amittet quam longitudinem duarum ipſius diametrorum deſcripſerit, per idem *corol.* VII.

PRO-

tempus aſſumptum, B C ſive *M* velocitas data, datur etiam E F.

Datur pariter reſiſtentia B H, eſt enim BC^2 ad EF^2 ut R ad hancce novam reſiſtentiam, quæ, prioribus datis, etiam dabitur.

Denique datur ſpatium à corpore deſcriptum, datur enim ſpatium quod velocitate conſtanti *M* tempore B E percurritur; Eſt verò area B C G E ad ſpatium Hyperbolicum B C F E, ut ſpatium velocitate conſtanti *M* tempore B E percurſum, ad ſpatium percurſum cum velocitate per reſiſtentiam decreſcente, at ex naturâ Logarithmorum Hyperbolicorum ſpatium Hyperbolicum B C F E eſt Logarithmus quantitatis $\frac{AE}{AB}$, & quia Logarithmi earumdem quantitatum in diverſis Logarithmorum ſeriebus ſumpti ſunt proportionales, ſumatur Logarithmus illius quantitatis $\frac{AE}{AB}$ in Tabulis vulgaribus, fiatque ut Logarithmus denarii numeri in Tabulis (ſive unitas) ad 2.30258509 qui eſt Logarithmus Hyperbolicus ejuſdem denarii numeri, ita Logarith. quantitatis $\frac{AE}{AB}$ ex Tabulis deſumptus ad Logarithmum Hyperbolicum ejus quantitatis, habebitur area B C F E, ſit ergo dignitas Hyperbolæ $=1$, erit $BC = \frac{1}{AB}$ & area $BCGE = \frac{1}{AB} \times BE$, ideoque ut $\frac{BE}{AB}$, ad Logarithmum quantitatis $\frac{AE}{AB}$ è Tabulis deſumptum & multiplicatum per 2.30258509. Ita ſpatium velocitate conſtanti B C tempore B E percurſum, ad ſpatium percurſum cum velocitate per reſiſtentiam decreſcente. Q. E. I.

(z) * *Cor.* 4. * Cum globus & fluidum ejuſdem denſitatis ſupponantur, reſiſtentia iſto in caſu erit æqualis vi quâ totus motus globi generari vel tolli poſſet quo tempore octo tertias Diametri ſuæ uniformiter deſcriberet; itaque ſit B C motus globi, erit A B tempus quo uniformiter percurreret octo tertias ſuæ Diametri, ſit E F, dimidium B C, quoniam E F exprimit reſiduum motum, P E erit tempus quo dimidia pars motus amiſſa fuerit, ſed BC ad E F ut A E ad A B & eſt B C ad E F ut 2 ad 1, per conſt. ergo etiam $AE = 2\,AB$ & $BE = AB$, ideoque dimidium motum amittet quo tempore percurreret uniformiter octo tertias Diametri ſuæ; Sed illud ſpatium uniformiter percurſum eſt ad ſpatium percurſum velocitate per reſiſtentiam decreſcente ut $\frac{BE}{AB}$ (ſive $\frac{1}{1}$) ad Logarithmum è Tabulis deſumptum quantitatis $\frac{AE}{AB}$ (ſive $\frac{2}{1}$) multiplicatum per 2.30258509, & ille Logarithmus eſt .3010300, productum ergo erit .6931 &c. ideo 1. ad .6931 &c. ut $\frac{8}{3}$ *D*, ad 1.84832 *D*, quod quidem paulo minus eſt quam 2 D, ideo Globus in fluido ejuſdem denſitatis dimidiam ſui motus partem prius deſcribet *quam longitudinem duarum ipſius Diametrorum deſcripſerit.* Q. E. D.

282.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XXXIX. Theor. XXXI.

PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA XXXI.

Globi, per fluidum in canali cylindrico clauſum & compreſſum uniformiter progredientis, reſiſtentia eſt ad vim, quâ totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſupra dimidium circuli maximi globi, & ratione duplicatâ orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſupra circulum maximum globi, & ratione denſitatis fluidi ad denſitatem globi quamproximè.

Patet *per corol.* 2. *prop.* XXXVII. procedit verò demonſtratio (a) quemadmodum in propoſitione præcedente.

Scholium.

In propoſitionibus duabus noviſſimis (perinde ut in lem. V.) ſuppono quòd aqua omnis congelatur quæ globum præcedit, & cujus fluiditas auget reſiſtentiam globi. Si aqua illa omnis liqueſcat, augebitur reſiſtentia aliquantulùm. Sed augmentum illud in his propoſitionibus parvum erit & negligi poteſt, propterea quòd convexa ſuperficies globi totum ferè officium glaciei faciat.

PROPOSITIO XL. PROBLEMA IX.

Globi, in medio fluidiſſimo compreſſo progredientis, invenire reſiſtentiam per phænomena.

Sit A pondus globi in vacuo, B pondus ejus in medio reſiſten-

(a) * *Quemadmodum in propoſitione præcedente.* Demonſtratio eadem manet, quæ in nota 281. adjungenda tantum hæc ſunt: reſiſtentia autem cylindri eſt ad hanc vim quam proximè in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſupra dimidium circuli maximi globi, & ratione duplicata orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſupra circulum maximum globi, & ratione denſitatis fluidi ad denſitatem globi (*per cor.* 2. *prop.* XXXVII.); & reſiſtentia globi æqualis eſt reſiſtentiæ cylindri, per Lem. V., VI., VII. Q. E. D.

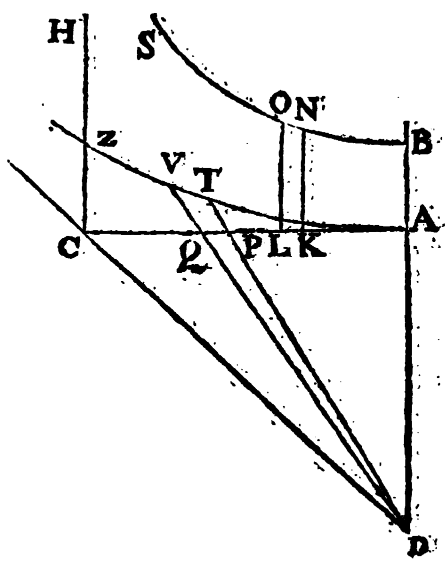
ſiſtente, D diameter globi, F ſpatium quod ſit ad $\frac{4}{3}$ D ut denſitas globi ad denſitatem medii, id eſt, (b) ut A ad A—B, G tempus quo globus pondere B ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribit ſpatium F, & H velocitas quam globus hocce caſu ſuo acquirit. Et erit H velocitas maxima quâcum globus, pondere ſuo B, in medio reſiſtente poteſt deſcendere, *per corol.* 2. *prop.* XXXVIII. & reſiſtentia, quam globus eâ cum velocitate deſcendens patitur, æqualis erit ejus ponderi B: reſiſtentia verò, quam patitur in aliâ quâcunque velocitate, erit ad pondus B in duplicatâ ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam H, *per corol.* 1. *prop.* XXXVIII.

Hæc eſt reſiſtentia quæ oritur ad inertiâ materiæ fluidi. Ea verò quæ oritur ab elaſticitate, tenacitate, & frictione partium ejus, (c) ſic inveſtigabitur.

De-

(b) 283. * *Id eſt, ut A ad A — B.* Denſitates corporum ejuſdem voluminis ſunt eorumdem pondera in vacuo (2. & 3. *lib.* 1.); Sed A eſt pondus globi in vacuo, & A — B pondus æqualis globi aquæ etiam in vacuo; nam globus A aquæ immerſum ponderis ſui partem amittit æqualem ponderi paris voluminis aquæ (*per cor.* 6. *prop.* XX.). Ergo &c.

(c) 284. * *Sic inveſtigabitur.* Ut eorum quæ hic Newtonus profert, demonſtratio facilius intelligatur, non nulla revocanda ſunt, quæ in propoſitionibus VIII. & IX. demonſtravit. Sunto C H & A B rectæ ad datam A C perpendiculares, C H quidem infinita, & B A æqualis $\frac{1}{4}$ A C. Centro C aſymptotis C H, C A deſcribatur per punctum B hyperbola B N S capiantur A C, A P, A K continuè proportionales, & per punctum K ducatur ad hyperbolam recta K N parallela A B. Et ſi corpus grave è quiete cadat in medio quod in duplicatâ velocitatis ratione reſiſtit, exponatque area A B N K ſpatium à corpore cadente deſcriptum; velocitas corporis hocce caſu acquiſita exponi poterit per lineam A P, & ipſius velocitas maxima per datam A C (*per cor.* 1. *&* 2 *prop.* VIII). Producatur jam B A ad D ut ſit A D æqualis A C, jungatur D C, &



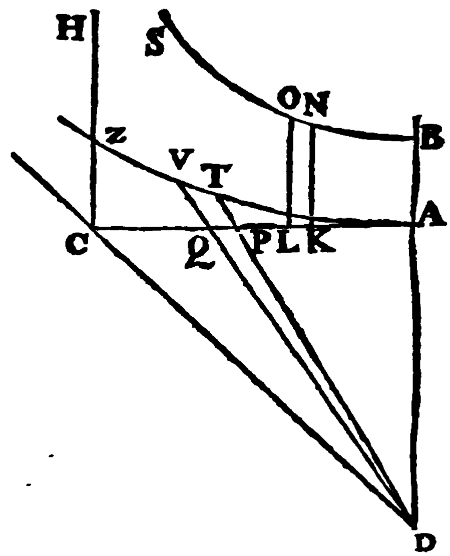
centro D, aſymptoto D C ac vertice princi- 284.
pali A deſcribatur altera hyperbola A T Z, quæ lineam D P productam ſecet in T, & lineam D Q ipſi D P infinitè propinquam in V; & ſector evaneſcens D T V erit æqua-

lis

De Motu Corporum Liber Secund. Sect. VII. Prop. XL. Probl. IX.

Demittatur globus ut pondere ſuo B in fluido deſcendat; & ſit P tempus cadendi, idque in minutis ſecundis ſi tempus G in minutis ſecundis habeatur. Inveniatur numerus abſolutus N qui congruit logarithmo 0,4342944819 $\frac{2P}{G}$, ſitque L logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: & velocitas cadendo acquiſita

ſis $\frac{PDQ \times AC}{CK}$, & ſector ATD tempus exponet quo corpus cadendo deſcribit ſpatium ABNK & quo velocitatem AP acquirit (per caſum 2. prop. IX.). Spatium verò quod corpus tempore quovis ATD cadendo deſcribit, erit ad ſpatium quod corpus velocitate maximâ AC, eodem tempore uniformiter progrediendo, deſcribere poteſt, ut area ABNK ad aream ATD (*per cor. 1. prop.* IX), & tempus quo corpus in medio reſiſtente cadendo velocitatem AP acquirit, erit ad tempus quo velocitatem maximam AC in medio non reſiſtente vi ponderis ſui comparativi cadendo acquirere poſſet, ut ſector ATD ad triangulum ADC (per cor. 5. prop. IX.).



285. His præſuppoſitis, dicantur $AC = AD = a$, $AB = \frac{1}{4}a$, $AP = x$, $PQ = dx$, & quia $AC : AP = AP : AK$, erit $AK = \frac{xx}{a}$, $CK = \frac{aa - xx}{a}$, triangulum $PDQ = \frac{1}{2}a\,dx$, & ſector $DTV = \frac{PDQ \times AC}{CK} = \frac{\frac{1}{2}a^3 dx}{aa - xx} = \frac{\frac{1}{4}aadx}{a+x} + \frac{\frac{1}{4}aadx}{a-x}$; undè, ſumtis fluentibus, habetur ſector $ATD = \frac{1}{4}aa\,L.\,\overline{a+x} - \frac{1}{4}aa\,L.\,\overline{a-x} = \frac{1}{4}aa\,L.\,\frac{a+x}{a-x}$, cui quantitati nihil addendum vel ſubducendum eſt, quia ubi fit $ATD = 0$, & $x = 0$, evaneſcit, ut oportet. Ducatur LO parallela KN ipſique infinitè propinqua; & cum ſit $AK = \frac{xx}{a}$ & (*per theor. 4. de hyp.*) $KN = \frac{CA \times AB}{CK} = \frac{\frac{1}{4}a^3}{aa - xx}$ ac $KL = \frac{2x\,dx}{a}$, erit areæ ABNK fluxio $KNOL = \frac{\frac{1}{2}a^2 x\,dx}{aa - xx}$, ſumptiſque fluentibus, area $ABKN = Q$ *conſt.* $- \frac{1}{4}aa\,L.\,\overline{aa - xx}$; quia verò area ABNK evaneſcit ubi fit $x = 0$, erit conſtans $Q = \frac{1}{4}aa\,L.\,aa$, & area accurata $ABNK = \frac{1}{4}aa\,L.\,aa - \frac{1}{4}aa\,L.\,\overline{aa - xx} = \frac{1}{4}aa\,L.\,\frac{aa}{aa-xx}$. Porro

ſita erit $\frac{N-1}{N+1}$ H, altitudo autem deſcripta erit $\frac{2PF}{G} -$ 1,38629436111

ro (284) tempus *P* quo corpus in medio reſiſtente cadendo velocitatem acquirit lineæ A P ſeu *x* proportionalem, eſt ad tempus *G* quo velocitatem maximam *H* vi ponderis ſui comparativi *B* ſine reſiſtentia cadendo acquirere poteſt, ut ſector A T D ad triangulum A D C, id eſt, $P : G = \frac{1}{4}aa\, L.\frac{a+x}{a-x} : \frac{1}{2}aa = L.\frac{a+x}{a+x} : 2$. Quare erit $\frac{2P}{G} = L.\frac{a+x}{a-x}$, hoc logarithmo ſumto in logiſtica cujus ſubtangens eſt unitas (38. *lib.* 11.). Quapropter ſi logarithmus numeri $\frac{a+x}{a-x}$ ſumatur in tabulis, multiplicandus erit per numerum 2,302585093, ut in *cor.* 7. *prop.* XXXV. factum eſt, & habebitur $\frac{2P}{G} = 2{,}302585093\ L.\frac{a+x}{a-x}$, ideoque dividendo 1. per 2. 3025 &c. numerus $0{,}434294481 9. \frac{2P}{G}$ eſt logarithmus tabularis numeri $\frac{a+x}{a-x}$. Itaque ſi per tabulas quæratur numerus abſolutus *N* qui congruat Logarithmo $0{,}4342944819.\frac{2P}{G}$, erit $N = \frac{a+x}{a-x}$, ideoque $x = \frac{a[N-1]}{N+1}$. Eſt autem (284) A C ad A P ſeu *a* ad *x*, ut velocitas maxima *H* ad velocitatem cadendo acquiſitam. Quare hæc velocitas erit $\frac{xH}{a} = \frac{N-1}{N+1} \times H$, ſicuti NEWTONUS invenit. Spatium quod globus velocitate maximâ *H* uniformiter progrediendo tempore *P* deſcribit, eſt ad ſpatium 2 F quod eadem velocitate *H* uniformiter percurrit tempore G, ut tempus *P* ad tempus G (5. *lib* 1.), & propterea ſpatium illud eſt $\frac{2PF}{G}$. Altitudo *S* quam globus tempore *P* cadendo in medio reſiſtente deſcribit, eſt ad ſpatium $\frac{2PF}{G}$, ut area ABNK ad ſectorem A T D (284), id eſt, ut $\frac{1}{4}aa\, L.\frac{aa}{aa-xx}$ ad $\frac{1}{4}aa\, L.\frac{a+x}{a-x}$, ſive ut $L.\frac{aa-xx}{aa}$ ad $L.\frac{a+x}{a-x}$; Sed (ex dem.) $\frac{a+x}{a-x} = N$, & $x = \frac{a[N-1]}{N+1}$, ac proinde $\frac{aa}{aa-xx} = \frac{[N+1]^2}{4N} = \frac{N \times [N+1]^2}{4NN}$, & ſi logarithmi ſumantur in logiſtica cujus ſubtangens eſt unitas, eſt $\frac{2P}{G} = L.\frac{a+x}{a-x} = L.N$, & $L.\frac{aa}{aa-xx} = L.\frac{N\times[N+1]^2}{4NN} = L.N + 2L.\frac{N+1}{N} - L.4$; ideoque $L.\frac{aa}{aa-xx} : L.\frac{a+x}{a-x} = L.N + 2L.\frac{N+1}{N} - L.4 : L.N$ 285.

$$= 1 + \frac{2L.\frac{N+1}{N} - L.4}{L.N} : 1 = 1 + \frac{G}{P}L.\frac{N+1}{N} - \frac{G}{2P}L.4 : 1 = S : \frac{2PF}{G}.$$

Quare altitudo $S = \frac{2PF}{G} - FL.4 + 2FL.\frac{N+1}{N}$.

At ſi velimus tabularum logarithmis uti, ii multiplicandi ſunt per numerum 2,302585092994, ſeu per 2,302585093. Hic numerus dicatur M, logarithmus numeri 4 in tabulis ſumptus *Q*, & logarithmus etiam tabularis numeri $\frac{N+1}{N}$ ſit *L*.; & erit $S = \frac{2PF}{G} - MQF + 2MLF$. Eſt autem $2M = 4{,}605170186$, & *Q* in tabulis vulgaribus eſt 0,60206; ſeu accuratius 0,602059991 2 2, ideoque $MQ = 1{,}386294361 1$ quamproximè. Quare altitudo *S*, quam globus in medio reſiſtente cadendo tempore *P* deſcribit, eſt $\frac{2PF}{G} - 1{,}3862943911\ F + 4{,}605170186\ LF$, uti NEWTONUS definivit.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XL. PROBL. IX.

$1,3862943611\ F + 4,605170186\ LF$. (d) Si fluidum ſatis profundum ſit negligi poteſt terminus $4,605170186\ LF$; & erit $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611\ F$ altitudo deſcripta quamproximè. Patent hæc per libri ſecundi propoſitionem nonam & ejus corollaria, ex hypotheſi quod globus nullam aliam patiatur reſiſtentiam niſi quæ oritur ab inertiâ materiæ. Si verò aliam inſuper reſiſtentiam patiatur, deſcenſus erit tardior, & ex retardatione innoteſcet quantitas hujus reſiſtentiæ.

Ut corporis in fluido cadentis velocitas & deſcenſus facilius innoteſcant, compoſui tabulam ſequentem, cujus columna prima denotat tempora deſcenſus, ſecunda exhibet velocitates cadendo acquiſitas exiſtente velocitate maximâ 100000000, tertia exhibet ſpatia temporibus illis cadendo deſcripta exiſtente 2 F ſpatio quod corpus tempore G cum velocitate maximâ deſcribit, & quarta exhibet ſpatia iiſdem temporibus cum velocitate maximâ deſcripta. Numeri in quartâ columnâ ſunt $\frac{2P}{G}$, & ſubducendo numerum $1,3862944 - 4,6051702\ L$, inveniuntur numeri in tertiâ columnâ, & multiplicandi ſunt hi numeri per ſpatium F ut habeantur ſpatia cadendo deſcripta. Quinta his inſuper adjecta eſt columna, quæ continet ſpatia deſcripta iiſdem temporibus à corpore, vi ponderis ſui comparativi B, in (e) vacuo cadente.

Tem-

(d) * *Si fluidum ſatis profundum ſit*; id eſt, ſi altitudo *S* quam globus tempore *P* cadendo deſcribit, ſatis magna fuerit, negligi poteſt terminus $4,605170186\ LF$. Cum enim ſit *L* logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$, ubi N eſt numerus ſatis magnus, ſeu ubi numerus $\frac{N+1}{N}$ eſt fere æqualis unitati, Logarithmus *L* evaneſcit quam proximè. Sed, ſi velocitas maxima dicatur *H*, & velocitas tempore *P* caſu globi acquiſita *V*, eſt $H : V = a : x$ (285), & ideo $\frac{H+V}{H-V} = \frac{a+x}{a+x} = N$, & quando ſpatium deſcriptum *S* ſatis magnum eſt, fit $V = H$ quam proximè, ac proinde $\frac{H+V}{H-V}$ ſeu *N* numerus ſatis magnus, ut ex ſequenti tabula manifeſtum eſt. Patet ergo propoſitum.

(e) * *In vacuo cadente.* Hujus tabulæ conſtructio paulo fuſius exponenda videtur. Numeri ſinguli columnæ primæ, quibus exprimitur ratio temporis P ad tempus G, aſſumuntur pro lubitu; numeri verò in columna quarta correſpondentes facillimè reperiuntur. Cum enim ſpatium tempore G velocitate maximâ H uniformiter deſcrip-

Tempora P	*Velocitates cadentis in fluido.*	*Spatia cadendo deſcripta in fluido.*	*Spatia motu maximo deſcripta.*	*Spatia cadendo deſcripta in vacuo.*
0,001G	$99999\frac{29}{30}$	0,000001F	0,002F	0,000001F
0,01G	999967	0,0001F	0,2F	0,0001F
0,1G	9966799	0,0099834F	0,2F	0,01F
0,2G	19737532	0,0397361F	0,4F	0,04F
0,3G	29131261	0,0886815F	0,6F	0,09F
0,4G	37994896	0,1559070F	0,8F	0,16F
0,5G	46211716	0,2402290F	1,0F	0,25F
0,6G	53704957	0,3402706F	1,2F	0,36F
0,7G	60436778	0,4545405F	1,4F	0,49F
0,8G	66403677	0,5815071F	1,6F	0,64F
0,9G	71629787	0,7196609F	1,8F	0,81F
1G	76159416	0,8675617F	2F	1F
2G	96402758	2,6500055F	4F	4F
3G	99505475	4,6186570F	6F	9F
4G	99932930	6,6143765F	8F	16F
5G	99990920	8,6137964F	10F	25F
6G	99998771	10,6137179F	12F	36F
7G	99999834	12,6137073F	14F	49F
8G	99999980	14,6137059F	16F	64F
9G	99999997	16 6137057F	18F	81F
10G	$99999999\frac{3}{5}$	18,6137056F	20F	100F

Scho-

ſcriptum ſit 2 F, & ſpatia eâdem uniformi velocitate deſcripta temporibus, quibus deſcribuntur, proportionalia ſint; numeri columnæ quartæ, duplicatis numeris columnæ primæ correſpondentibus, habentur. Quia verò ſpatia, à corpore vi ponderis ſui comparativi B ſine reſiſtentia cadente, deſcripta, ſunt in duplicatâ ratione temporum quibus deſcribuntur, & tempore G deſcribitur ſpatium F; numeri columnæ quintæ ſunt quadrata numerorum correſpondentium in columna prima. Numeri columnæ ſecundæ velocitatem acquiſitam cadendo in fluido tempore P indicant quæ eſt $\frac{N-1}{N+1} \times H$, ſicque inveniuntur: aſſumpto in columna prima 285
termino quovis, Exempli causâ, 2 G pro P, fit $\frac{2P}{G} = \frac{4G}{G} = 4$, & hinc $0,4342944819 \frac{2P}{G} = 1,7371779276$. Huic logarithmo in tabulis congruit numerus abſolutus $54,59815 = N$; unde fit $\frac{N-1}{N+1} = \frac{5359815}{5559815}$, & quia $H = 100000000$ (*per hyp.*), velocitas tempore P, ſive 2 G, acquiſita $\frac{N-1}{N+1}H$, eſt 96402758, uti NEWTONUS in tabula poſuit. Inventis hoc modo numeris columnæ ſecundæ, inveniuntur quoque numeri colum-

næ

Scholium.

Ut reſiſtentias fluidorum inveſtigarem per experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine & latitudine internâ digitorum novem (f) pedis *Londinenſis*, profunditate pedum novem cum ſemiſſe, idemque implevi aquâ pluviali; & globis ex cerâ & plumbo incluſo formatis, notavi tempora deſcenſus globorum, exiſtente deſcenſus altitudine 112 digitorum pedis. Pes ſolidus cubicus *Londinenſis* continet 76 libras *Romanas* aquæ pluvialis, & pedis hujus digitus ſolidus continet $\frac{19}{36}$ uncias libræ hujus ſeu (g) grana $253\frac{1}{3}$; & globus aqueus diametro digiti unius deſcriptus continet grana 132,645 in medio aeris, vel (h) grana 132,8 in vacuo; & globus quilibet

næ tertiæ, videlicet $\frac{2P}{G} - 1,3862943611 + 4,6051702\,L$. Quoniam enim datus eſt numerus $\frac{2P}{G}$, & jam inventus fuit numerus N, cognoſcetur numerus $\frac{N+1}{N}$ cum ipſius Logarithmo L; atque ita obtinebitur numerus columnæ tertiæ.

286. Ex hâc porro tabulâ patet verum eſſe poſſe, quod non nulli ſe obſervaſſe teſtantur, nimirum gravia in mediis reſiſtentibus cadentia brevi ſatis tempore ad maximam quam acquirere poſſint velocitatem pervenire & poſtea moveri uniformiter; licet per theoriam non niſi tempore infinito, ſeu nunquam, poſſint maximam illam velocitatem reverâ acquirere. Nam ſi tempus P quo globus in fluido quocumque cadit, ſit æquale tempori 5 G; globi velocitas acquiſita erit ad velocitatem maximam ut *9999092* ad 10000000, ſeu ut 1. ad 1,0000908, quamproximè, & ſpatium hoc tempore 5 G deſcriptum erit *8,6137964* F, & deinde ſpatia deſcripta creſcent fere in progreſſione arithmetica ad modum temporum. Elapſo igitur tempore 4G. vel 5 G globus uniformiter deſcendere videbitur, licet ejus velocitas reverâ perpetuò creſcat. Si verò aſſumatur tempus P æquale 10 G, tum velocitas acquiſita eſt ad velocitatem maximam ut *99999999* $\frac{2}{3}$ ad 100000000, & tantorum numerorum differentia $\frac{2}{3}$ prorſus inſenſibilis eſt oculis humanis.

(f) * *Pedis Londinenſis.* Pes Londinenſis eſt ad pedem Pariſienſem ut 15 ad 16; uterque in digitos 12, & digitus in 12 lineas dividitur.

(g) * *Seu grana.* Libra Romana uncias 12, uncia 480. grana continet.

(h) 287. * *Vel grana* 132, 8 *in vacuo.* Corpus quodlibet ponderis ſui partem amittit in aëre æqualem ponderi paris voluminis aëris; corporum vero pondera abſoluta ſub paribus voluminibus ſunt ut eorum denſitates, & denſitas aquæ, juxta NEWTONUM, eſt ad denſitatem aëris ut 860 ad 1. Quare, cum globi aquei pondus in aëre parum differat ab ejuſdem pondere in vacuo, dicendum eſt, ut 860 ad 1, ita pondus globi aquei granorum 132, 645 ad pondus æqualis globi aëris, quod proinde erit granorum 0,1543 quam proxime. Addatur pondus hoc ponderi granorum 132, 645, & ſumma gran. 132, 7993, ſeu gran. 132,8. erit pondus prædicti globi aquæ in vacuo quam proxime. Dato igitur pondere globi cujuſlibet aquei in aëre, invenitur ejus pondus in vacuo, ſi ponderi dato addatur id

libet ([i]) alius eſt ut exceſſus ponderis ejus in vacuo ſupra pondus ejus in aquâ.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XL. PROBL. IX.

Exper. 1. Globus, cujus pondus erat $156\frac{1}{4}$ granorum in aere & 77 granorum in aquâ, altitudinem totam digitorum 112 tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcripſit. Et experimento repetito, globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor ſecundorum.

([k]) Pondus globi in vacuo eſt $156\frac{13}{38}$ *gran.* & exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in aquâ eſt $79\frac{13}{38}$ *gran.* ([l]) Unde prodit globi diameter 0,84224 partium digiti. Eſt autem ut exceſſus ille ad pondus globi in vacuo, ita ([m]) denſitas aquæ ad denſitatem globi, ([n]) & ita partes octo tertiæ diametri globi (*viz.* 2,24597 *dig.*) ad ſpatium 2 F, ([o]) quod proinde erit 4,4256 *dig.* Globus tempore minuti unius ſecundi, toto ſuo pondere granorum $156\frac{13}{38}$, ([p]) cadendo in vacuo de-

id quod ex diviſione ejuſdem ponderis per numerum 860 habetur.

(i) 288. * *Et globus quilibet &c.* Globus quilibet *E* eſt ad globum aqueum *C* diametro digiti unius deſcriptum, ut exceſſus ponderis globi *E* in vacuo ſupra pondus ejus in aqua, ad pondus granorum 132,8. Nam exceſſus ponderis globi *E* in vacuo ſupra pondus ejus in aquâ eſt pondus globi aquæ ejuſdem cum globo *E* diametri; Sed globi aquæ homogenei ſunt ut eorumdem pondera; eſt igitur globus *E* ad globum *C* ut exceſſus ponderis globi *E* in vacuo ſupra pondus ejus in aqua, ad pondus 132,8 granorum.

(k) * *Pondus globi in vacuo eſt* $156\frac{13}{38}$ *gran.* Si enim ex pondere globi in aere gran. $156\frac{1}{4}$ ſubducatur pondus ejus in aqua, quod eſt gran. 77, reſiduum erit pondus globi aquæ ejuſdem voluminis gran. $79\frac{1}{4}$; & propterea (287) ut habeatur pondus globi in vacuo, ponderi gran. $156\frac{1}{4}$ addendum eſt pondus gran. $\frac{79\frac{1}{4}}{860}$, & prodit pondus globi in vacuo gran. $156\frac{13}{38}$ quam proximè.

(l) * *Unde prodit globi diameter &c.* Eſt 288. enim (288) pondus gran. 132,8 ad exceſſum $79\frac{13}{38}$, ut globus diametro digiti unius deſcriptus ad globum quæſitum; ideoque ut diametri 1 digiti cubus 1 ad diametri globi quæſiti cubum, qui proinde erit $\frac{79\frac{13}{38}}{132,8}$ partium digiti cubici. Hujus fractionis radix cubica, ſeu globi diameter, eſt 0,84224 partium digiti quam proximè.

(m) * *Ita denſitas aquæ ad &c.* (283).

(n) * *Et ita partes octo tertiæ diametri globi &c.* Per Prop. XL. lib. II.

(o) * *Quod proinde erit 4,4256 dig.* Nam $79\frac{13}{38} : 156\frac{13}{38} = 3015 : 5941 = 2,24597 : 4,4256$, quam proximè.

(p) 289. * *Cadendo in vacuo deſcribet digitos* $193\frac{1}{3}$. Quoniam corporis, præſertim gravioris, oſcillationes quæ in minoribus arcubus fiunt, iiſdem quam proximè temporibus peraguntur in aere & in vacuo (*per cor.* 2. *prop.* XXVII. *lib.* II.); ſpatium quod grave cadendo in vacuo tempore minuti unius ſecundi deſcribit, eſt pedum Pariſienſium $15\frac{1}{12}$, ſeu

deſcribet digitos $193\frac{1}{3}$, & pondere granorum 77, eodem tempore ſine reſiſtentiâ cadendo in aquâ (q) deſcribet digitos 95,219; (r) & tempore G, quod ſit ad minutum unum ſecundum in ſubduplicatâ ratione ſpatii F ſeu 2,2128 *dig.* ad 95,219 *dig.* deſcribet 2,2128 *dig.* & velocitatem maximam H acquiret quâcum poteſt in aquâ deſcendere. (ſ) Eſt igitur tempus G 0″, 15244. Et hoc tempore G, cum velocitate illâ maximâ H, globus deſcribet ſpatium 2 F digitorum 4,4256; (t) ideoque tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcribet ſpatium digitorum 116,1245. (u) Subducatur ſpatium 1,3862944 F ſeu 3,0676 *dig.* & manebit ſpatium 113,0569 digitorum quod globus cadendo in aquâ, in vaſe ampliſſimo, tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcribet. Hoc ſpatium, ob anguſtiam vaſis lignei prædicti, (x) minui debet in ratione quæ com-

accuratius digitorum $181\frac{1}{6}$ quam proximè (471. *lib.* 1.); & quia pes Londinenſis pede Pariſienſi minor eſt in ratione 15 ad 16, erit ſpatium illud digitorum Londinenſium $193\frac{11}{45}$, ſeu fere $193\frac{1}{4}$. Hoc ſpatium augeri paululum debet ob pondus in aëre oſcillantis diminutum, & ideo poni poteſt digit. Lond. $193\frac{1}{3}$ quam proximè.

(q) * *Deſcribet digitos* 95, 219. Nam vires uniformes ſunt ut ſpatia quæ corpus viribus illis agitatum dato tempore deſcribit (179); & propterea $156\frac{13}{38}$ eſt ad 77 ut $193\frac{1}{3}$ dig. ad ſpatium quod globus vi ponderis granorum 77 tempore minuti unius ſecundi ſine reſiſtentia cadendo deſcribit; unde ſpatium hoc prodet 95,219 digit. quam proximè.

(r) * *Et tempore G, quod ſit &c.* Spatia quæ corpus vi ponderis ſui comparativi 77 gran. ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribit, ſunt in duplicatâ ratione temporum quibus deſcribuntur (27. lib. 1.). Ergo tempus G, quo corpus vi ponderis ſui comparativi ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribit ſpatium F (*per prop.* XL.), eſt ad minutum unum ſecundum in ſubduplicatâ ratione ſpatii F ſeu 2,2128 dig. ad 95,219 digit.

(ſ) 290. * *Eſt igitur tempus G* 0″, 15244. Si juxta notam 286, multiplicetur hæc fractio per numerum 5, productum erit 0″,7622 ſeu 46‴ ferè. Quare globus, cujus diameter eſt 0,84224 partium digiti & pondus in aëre $156\frac{1}{4}$ gran., in aqua cadendo tempore 46‴ deſcribet ſpatium 19 dig. circiter & maximam ſuam velocitatem acquirere atque poſtea uniformi velocitate deſcendere videbitur (286).

(t) * *Ideoque tempore minutorum quatuor ſecundorum &c.* Sunt enim tempora ut ſpatia velocitate uniformi H deſcripta, & 0″,15244 eſt ad 4″ ut 4,4256 ad 116,1245 ferè.

(u) * *Subducatur ſpatium &c.* Tempus P eſt minutorum ſecundorum quatuor, & ut G ad P ita eſt 2 F ad digitos 116,1245 $= \frac{2\,PF}{G}$, Sed (*per prop.* XL) ſpatium quod globus in aqua cadendo tempore P deſcribit, eſt $\frac{2\,PF}{G} - 1,3862944$ F, neglecto, ſcilicet, termino 4,6051701 6 L F, qui ob parvitatem hic poteſt tutò contemni.

(x) 291. * *Minui debet in ratione &c.* Globi datâ velocitate moti reſiſtentia in vaſe ampliſſimo ſit r, in vaſe anguſtiore R', hujus vaſis orificium æquale ſit circulo π, cir-

componitur ex ſubduplicatâ ratione orificii vaſis ad exceſſum orificii hujus ſupra ſemicirculum maximum globi & ex ſimplici ratione orificii ejuſdem ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi, id eſt, in ratione 1 ad 0,9914. Quo facto, habebitur ſpatium 112,08 digitorum, quod globus cadendo in aquâ in hoc vaſe ligneo tempore minutorum quatuor ſecundorum per theoriam deſcribere debuit quamproximè. Deſcripſit verò digitos 112 per experimentum.

Exper. 2. Tres globi æquales, quorum pondera ſeorſim erant $76\frac{1}{3}$ granorum in aere & $5\frac{1}{16}$ granorum in aquâ, ſucceſſivè demittebantur, & unuſquiſque cecidit in aquâ tempore minutorum ſecundorum quindecim, caſu ſuo deſcribens altitudinem digitorum 112.

Com-

291. circulus globi maximus ſit m, denſitas globi δ, denſitas fluidi d; vis uniformis quâ totus globi motus, quo tempore octo tertias partes diametri ſuæ uniformiter deſcriberet tolli poſſit vel generari, ſit p. Et (*per prop.* XXXVIII.) erit $p : r = \delta : d$; & (*per prop.* XXXIX.) $R : p = dc^3 : \delta [c - \frac{1}{2}m] \times [c - m]^2$; & propterea, conjunctis his rationibus, $R : r = c^3 : [c - \frac{1}{2}m] \times [c - m]^2$. Datâ igitur velocitate globi, reſiſtentia in vaſe ampliſſimo eſt ad reſiſtentiam in vaſe anguſtiore in datâ ratione $[c - \frac{1}{2}m] \times [c - m]^2$ ad c^3. Brevitatis causâ ponatur r ad R ut 1 ad n. Quando velocitas in vaſe ampliſſimo maxima eſt, ſeu H, reſiſtentia æqualis eſt ponderi B globi in aqua, & F eſt ſpatium quod globus tempore G vi ponderis B ſine reſiſtentia cadendo deſcribit ut velocitatem illam H acquirat. Sit h velocitas maxima globi in vaſe anguſtiore, quam cum acquiſivit, reſiſtentia ejus æqualis eſt ponderi B; & cum reſiſtentia globi in vaſe anguſtiore æqualis ſit nB ubi velocitas ejus eſt H (ex demonſtratis), & reſiſtentiæ ſint ut quadrata velocitatum, erit $HH : hh = nB : B = n : 1$, ideoque $H : h = \sqrt{n} : 1$. Sit g tempus quo globus pondere B ſine reſiſtentiâ cadendo acquirit velocitatem h, & f ſpatium quod eodem tempore deſcribit; & erit $H : h = \frac{F}{G} : \frac{f}{g}$, ac proinde $\frac{F}{G} : \frac{f}{g} \sqrt{n} : 1$. Porro ſpatia in vaſe ampliſſimo tempore P, quod ſatis magnam habet rationem ad tempus G, cadendo deſcripta, ſunt quam proximè ut $\frac{2PF}{G}$, ſeu ut ſpatia eodem tempore motu maximo deſcripta, ut ex prop. XL. & ex tabulâ huic ſcholio præfixâ patet; & ſimiliter ſpatium eodem tempore P in vaſe anguſtiore deſcriptum erit etiam ut $\frac{2Pf}{g}$ ferè. Quare cum ſit $\frac{2PF}{G}$ ad $\frac{2Pf}{g}$ ut $\frac{F}{G}$ ad $\frac{f}{g}$, id eſt (ex demonſtr.) ut $\sqrt{n}$ ad 1; ſpatium tempore P in vaſe ampliſſimo deſcriptum erit ad ſpatium eodem tempore in vaſe anguſtiore deſcriptum, ut $\sqrt{n}$ ad 1, id eſt, ut $c^{\frac{3}{2}}$ ad $[c - m] \times [c - \frac{1}{2}m]^{\frac{1}{2}}$, aut quod idem eſt, in ratione quæ componitur ex ſubduplicatâ ratione orificii vaſis c ad exceſſum $c - \frac{1}{2}m$ orificii hujus ſupra ſemicirculum maximum globi, & ex ſimplici ratione orificii ejuſdem c ad exceſſum ejus $c - m$, ſupra circulum maximum globi.

Computum (y) ineundo prodeunt pondus globi in vacuo $76\frac{5}{12}$ *gran.* exceſſus hujus ponderis ſupra pondus in aquâ $71\frac{17}{48}$ *gran.* diameter globi 0,81296 *dig.* octo tertiæ partes hujus diametri 2,16789 *dig.* ſpatium 2 F 2,3217 *dig.* ſpatium quod globus pondere $5\frac{1}{16}$ *gran.* tempore 1″ ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribat 12,808 *dig.* & tempus G 0″,301056. Globus igitur, velocitate maximâ quâcum poteſt in aquâ vi ponderis $5\frac{1}{16}$ *gran.* deſcendere, tempore 0″,301056 deſcribet ſpatium 2,3217. *dig.* & tempore 15″ ſpatium 115,678 *dig.* Subducatur ſpatium 1,3862944 F ſeu 1,609 *dig.* & manebit ſpatium 114,069 *dig.* quod proinde globus eodem tempore in vaſe latiſſimo cadendo deſcribere debet. Propter anguſtiam vaſis noſtri detrahi debet ſpatium 0,895 *dig.* circiter. Et ſic manebit ſpatium 113,174 *dig.* quod globus cadendo in hoc vaſe, tempore 15″ deſcribere debuit per theoriam quamproximè. Deſcripſit veros digitos 112 per experimentum. Differentia eſt inſenſibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera ſeorſim erant 121 *gran.* in aere & 1 *gran.* in aquâ, ſucceſſive demittebantur; & cadebant in aqua temporibus 46″, 47″, & 50″, deſcribentes altitudinem digitorum 112.

Per theoriam (z) hi globi cadere debuerunt tempore 40″ cir-

Sed vaſis orificium c eſt 81 digitorum (ex dictis initio ſcholii hujus), & circuli m diameter inventa eſt 0,84224 partium digiti, ideoque ſi dicatur ut 7 ad 11 ita 0,84224 digit. ad ſemiperipheriam circuli m, hæc invenietur digit. 1,32352, & hinc circulus m prodit 0,5573 partium digiti quadrati circiter; ex quibus habetur

$$\frac{c}{c-m} = 1{,}0069, \ \& \ \frac{c^{\frac{1}{2}}}{[c-\frac{1}{2}m]^{\frac{1}{2}}} = 1{,}0017, \text{ac}$$

$$\text{proinde } \frac{c^{\frac{3}{2}}}{[c-m]\times[c-\frac{1}{2}m]^{\frac{1}{2}}} = 1{,}00861.$$

Quare ſpatium in vaſe ampliſſimo deſcriptum digit. 113,0569 eſt ad ſpatium in vaſe anguſtiore eodem tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcriptum, ut 1,00861 ad 1, ſeu ut 1 ad 0,9914 ferè; unde hoc ſpatium prodit 111,08 digit.

(y) * *Computum ineundo &c.* Calculo experimenti primi fuſè expoſito, nulla ſupereſt difficultas in computo ſimili experimenti hujus.

(z) * *Per theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40″ circiter.* Cum pondus globi ſit 121 granorum in aëre, & 1 grani in aqua, erit pondus æqualis globi aquæ granorum 120; & ideo pondus globi in vacuo gran. $121\frac{120}{860}$ ſeu $121\frac{6}{43}$ (287). Exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi

circiter. Quod tardius ceciderunt, utrum minori proportioni reſiſtentiæ quæ à vi inertiæ in tardis motibus oritur, ad reſiſtentiam quæ oritur ab aliis cauſis tribuendum ſit; an potius bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempeſtatis vel manus globum demittentis, vel etiam erroribus inſenſibilibus in ponderandis globis in aquâ, incertum eſſe puto. Ideoque pondus globi in aquâ debet eſſe plurium granorum, ut experimentum certum & fide dignum reddatur.

Exper. 4. Experimenta hactenus deſcripta cœpi, ut inveſtigarem reſiſtentias fluidorum, antequam theoria in propoſitionibus proximè præcedentibus expoſita mihi innoteſceret. Poſtea, ut theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine internâ digitorum $8\frac{2}{3}$, profunditate pedum quindecim cum triente. Deinde ex cerâ & plumbo incluſo globos quatuor formavi, ſingulos pondere $139\frac{1}{4}$ granorum in aere & $7\frac{1}{8}$ granorum in aquâ. Et hos demiſi ut tempora cadendi in aqua per pendulum, ad ſemi-minuta ſecunda oſcillans, menſurarem. Globi, ubi ponderabantur & poſtea cadebant, frigidi erant & aliquamdiu frigidi manſerant; quia calor ceram rarefacit, & per rarefactionem diminuit pondus globi in aqua. & cera rarefacta non ſtatim ad denſitatem priſtinam per frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam; ne pondere partis alicujus ex aquâ extantis deſcenſus eorum ſub initio acceleraretur. Et ubi penitus immerſi quieſcebant, demittebantur quam cautiſſimè, ne impulſum aliquem à manu demittente acci-

bi in aqua eſt gran. $120\frac{64}{43}$. Unde prodeunt globi diameter 0,9671 partium digiti, ſpatium 2 F 2,6004 digitorum, ſpatium quod globus pondere 1 grani ſine reſiſtentia cadendo tempore minuti unius ſecundi deſcribit digit. 1,5959, & tempus G 0″,9016. Hoc tempore globus cum velocitate maximâ *H* uniformiter progrediendo deſcribet ſpatium 2 *F* ſeu 2,6004 dig. & tempore 40″ deſcribet ſpatium 115,2404 dig. Subducatur ſpatium 1,3862944 F ſeu 1,8024 dig., & manebit ſpatium 113,438 dig. quod globus cadendo in aqua in vaſe ampliſſimo tempore 40″ deſcriberet; & hoc ſpatium, propter anguſtiam vaſis aliquantulum minui debet, nimirum in ratione 10049 ad 10025 circiter. Globi igitur per theoriam ſpatium 112 digitorum cadendo deſcribere debuerunt tempore 40″ circiter.

2912

acciperent. Ceciderunt autem ſucceſſivè temporibus oſcillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 & 51, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. Sed tempeſtas jam paulò frigidior erat quàm cum globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, & globi ceciderunt temporibus oſcillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53, ac tertio temporibus oſcillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53. Experimento ſæpius capto, globi ceciderunt maximâ ex parte temporibus oſcillationum $49\frac{1}{2}$ & 50. Ubi tardius cecidere, ſuſpicor eoſdem retardatos fuiſſe impingendo in latera vaſis.

Jam computum per theoriam ineundo, prodeunt pondus globi in vacuo $139\frac{2}{5}$ granorum. Exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in aquâ $132\frac{11}{40}$ *gran.* Diameter globi 0,99868 *dig.* Octo tertiæ partes diametri 2,66315 *dig.* Spatium 2 F 2,8066 *dig.* Spatium quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius ſecundi, ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribit 9,88164 *dig.* Et tempus G 0″,376843. Globus igitur, velocitate maximâ quâcum poteſt in aquâ vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum deſcendere, tempore 0″,376843 deſcribit ſpatium 2,8066 digitorum, & tempore 1″ ſpatium 7,44766 digitorum, & tempore 25″ ſeu oſcillationum 50 ſpatium 186,1915 *dig.* Subducatur ſpatium 1,386294 F, ſeu 1,9454 *dig.* & manebit ſpatium 184,2461 *dig.* quod globus eodem tempore in vaſe latiſſimo deſcribet. Ob anguſtiam vaſis noſtri, minuatur hoc ſpatium in ratione quæ componitur ex ſubduplicatâ ratione orificii vaſis ad exceſſum hujus orificii ſupra ſemicirculum maximum globi, & ſimplici ratione eiuſdem orificii ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi; & habebitur ſpatium 181,86 digitorum, quod globus in hoc vaſe tempore oſcillationum 50 deſcribere debuit per theoriam quamproximè. Deſcripſit verò ſpatium 182 digitorum tempore oſcillationum $49\frac{1}{2}$ vel 50 per experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor pondere $154\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $21\frac{1}{2}$ *gran.* in aquâ ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30, & nonnunquam 31, 32 &

33,

33, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 29 quamproximè.

Exper. 6. Globi quinque pondere $212\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $79\frac{1}{2}$ in aquâ ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 15 quamproximè.

Exper. 7. Globi quatuor pondere $293\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $35\frac{7}{8}$ *gran.* in aquâ ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum $29\frac{1}{2}$ 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digiti unius cum ſemiſſe.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 28 quamproximè.

Cauſam inveſtigando cur globorum, ejuſdem ponderis & magnitudinis, aliqui citius alii tardius caderent, in hanc incidi; quod globi ubi primum demittebantur & cadere incipiebant, oſcillarent circum centra, latere illo quod forte gravius eſſet primum deſcendente, & motum oſcillatorium generante. Nam per oſcillationes ſuas globus majorem motum communicat aquæ, quam ſi ſine oſcillationibus deſcenderet; & communicando, amittit partem motûs proprii quo deſcendere deberet: & pro majore vel minore oſcillatione, magis vel minus retardatur. Quinetiam globus recidit ſemper à latere ſuo quod per oſcillationem deſcendit, & recedendo appropinquat lateribus vaſis & in latera nonnunquam impingitur. Et hæc oſcillatio in globis gravioribus fortior eſt, in majoribus aquam magis agitat. Quâpropter, ut oſcillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cerâ & plumbo conſtruxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope ſuperficiem ejus; & globum ita demiſi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, eſſet infimum ab initio deſcenſus. Sic oſcillationes factæ ſunt multo mi-

nores quam prius, & globi temporibus minus inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis ſequentibus.

Exper. 8. Globi quatuor, pondere granorum 139 in aere & $6\frac{1}{2}$ in aquâ, ſæpe demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum non plurium quam 52, non pauciorum quam 50, & maximâ ex parte tempore oſcillationum 51 circiter, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 52 circiter.

Exper. 9. Globi quatuor, pondere granorum $273\frac{1}{4}$ in aere & $140\frac{3}{4}$ in aquâ, ſæpius demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum non pauciorum quam 12, non plurium quam 13, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam verò hi globi cadere debuerunt tempore oſcillationum $11\frac{1}{3}$ quamproximè.

Exper. 10. Globi quatuor, pondere granorum 384 in aere & $119\frac{1}{2}$ in aquâ, ſæpe demiſſi, cadebant temporibus oſcillationum $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ & 19, deſcribentes altitudinem digitorum $181\frac{3}{4}$ Et ubi ceciderunt tempore oſcillationum 19, nonnunquam audivi impulſum eorum in latera vaſis antequam ad fundum pervenerunt.

Per theoriam verò cadere debuerunt tempore oſcillationum $15\frac{1}{9}$ quamproximè.

Exper. 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in aere & $3\frac{29}{32}$ in aquâ ſæpe demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 & 46, & maximâ ex parte 44 & 45, deſcribentes altitudinem digitorum $182\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum $46\frac{5}{9}$ circiter.

Exper. 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in aere & $4\frac{3}{8}$ in aquâ, aliquoties demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum 61, 62, 63, 64, & 65, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Et per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum $64\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per

Per hæc experimenta manifeſtum eſt quod, ubi globi tardè ceciderunt, ut in experimentis ſecundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi rectè exhibentur per theoriam, at ubi globi velocius ceciderunt, ut in experimentis ſextis, nonis ac decimis, (a) reſiſtentia paulo major extitit quam in duplicatâ ratione velocitatis. Nam globi inter cadendum oſcillant aliquantulum: & hæc oſcillatio in globis levioribus & tardius cadentibus, ob motûs languorem citò ceſſat; in gravioribus autem & majoribus, ob motûs fortitudinem diutius durat, & non niſi poſt plures oſcillationes ab aquâ ambiente cohiberi poteſt. Quinetiam globi, quo velociores ſunt, eo minus premuntur à fluido ad poſticas ſuas partes; & ſi velocitas perpetuo augeatur, ſpatium vacuum tandem à tergo relinquent, (b) niſi compreſſio fluidi ſimul augeatur. Debet autem compreſſio fluidi (*per prop.* XXXII. & XXXIII.) (c) augeri in duplicatâ ratione velocitatis, ut reſiſtentia ſit in eâdem duplicatâ ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulò minus premuntur à tergo, & defectu preſſionis hujus, reſiſtentia eorum fit paulo major quàm in duplicatâ ratione velocitatis.

Congruit igitur theoria cum phænomenis corporum cadentium in aquâ, reliquum eſt ut examinemus phænomena cadentium in aere.

Exper. 13. A culmine eccleſiæ Sancti *Pauli*, in urbe *Londini*, menſe Junio 1710 globi duo vitrei ſimul demittebantur; unus

(a) * *Reſiſtentia paulo major extitit quam in duplicatâ ratione velocitatis.* Si enim reſiſtentia accuratè eſſet in duplicatâ velocitatis ratione, tempora cadendi tam per experimenta quam per theoriam definita, æquarentur; At ſi reſiſtentia major quam in duplicatâ ratione velocitatis, tempora quibus corpus cadendo datum ſpatium deſcribit, majora eſſe debent in experimentis quam in theoriâ, quæ minorem reſiſtentiam ſupponit.

(b) * *Niſi compreſſio fluidi ſimul augeatur.* Tanta enim eſſe poteſt globi velocitas; ut fluidum ad poſticas illius partes ſatis citò recurrere & locum à globo relictum ſtatim occupare nequeat, niſi fluidi compreſſio augeatur, ut per fluidum preſſio & motus celerius propagentur.

(c) * *Augeri in duplicatâ ratione velocitatis &c.* Nam partes fluidi per compreſſionem in ſe mutuo agunt & reagunt; & ſi vires quibus fluidi particulæ ſe mutuò agitant, augeantur in duplicatâ ratione velocitatis, reſiſtentia eſt in eâdem ratione duplicatâ, *per cor.* 2. *prop.* XXXIII.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XL. PROBL. IX.

unus argenti vivi plenus, alter aeris; & cadendo deſcribebant altitudinem pedum *Londinenſium* 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis ſuſpendebatur, ad alterum peſſulo ligneo incumbebat; & globi duo huic tabulæ impoſiti ſimul demittebantur, ſubtrahendo peſſulum ope fili ferrei ad terram uſque demiſſi ut tabula polis ferreis ſolummodo innixa ſuper iiſdem devolveretur, & eodem temporis momento pendulum ad minuta ſecunda oſcillans, per filum illud ferreum tractum demitteretur & oſcillare inciperet. Diametri & pondera globorum ac tempora cadendi exhibentur in (d) tabulâ ſequente.

Globorum mercurio plenorum			*Globorum aere plenorum.*		
Pondera	*Diametri*	*Tempora cadendi.*	*Pondera*	*Diametri*	*Tempora cadendi.*
908 *gran.*	0,8 *digit.*	4''	510 *gran.*	5,1 *digit.*	8'' ½
983	0,8	4—	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4+	515	5,0	8¼
808	0,75	4	483	5,0	8½
784	0,75	4+	641	5,2	8

Cæterum tempora obſervata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per theoriam *Galilæi*) minutis quatuor ſecundis (e) deſcribent pedes *Londinenſes* 257, & pedes 220 minutis tantum

3''

(d) * *In tabulâ ſequente* 4— ſignificat tempus cadendi minutis quatuor ſecundis paulo minus fuiſſe, & 4 + tempus minutis quatuor ſecundis paulo majus indicat,

(e) * *Deſcribent pedes Londinenſes &c.* Quoniam denſitas mercurii eſt ad denſitatem aëris ut 11890 ad 1 circiter, parùm admodum minuitur mercurii pondus in aere, & ideo globi mercurio pleni eâdem ferè celeritate in aëre & in vacuo per breve tempus deſcendunt; ſed gravia omnia in vacuo cadentia tempore minuti unius ſecundi deſcribunt pedis Londinenſis digitos 193 ⅓ (289), & ſpatia deſcripta ſunt in duplicatâ ratione temporum (27. *lib.* 1. Quare ut 1 ad 16 ita 193 ⅓ dig. ad ſpatium quod globus mercurio plenus tempore 4'' cadendo deſcribit, quod proinde erit 3093 dig. ſeu 257 pedum Londinenſium circiter. Simili modo, cum ſit

3''

$3''$ $42'''$. Tabula lignea utique, detracto peſſulo, tardius devolvebatur quam par erat, & tardâ ſuâ devolutione impediebat deſcenſum globorum ſub initio. Nam globi incumbebant tabulæ prope medium ejus, & paulò quidem propiores erant axi ejus quam peſſulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter, & jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præſertim in globis majoribus qui tabulæ devolventi paulo diutius incumbebant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto tempora, quibus globi ſex majores cecidêre, evadent $8''$ $12'''$, $7''$ $42'''$, $7''$ $42'''$, $7''$ $57'''$, $8''$ $12'''$, & $7''$ $42'''$.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XL. PROBL. IX.

Globorum igitur aere plenorum quintus, diametro digitorum quinque pondere granorum 483 conſtructus, cecidit tempore $8''$ $12'''$, deſcribendo altitudinem pedum 220. (f) Pondus aquæ huic globo æqualis eſt 16600 granorum; & pondus aeris eidem æqualis eſt $\frac{16600}{860}$ *gran.* ſeu $19\frac{3}{10}$ *gran.* ideoque pondus globi in vacuo eſt $502\frac{3}{10}$ *gran.* & hoc pondus eſt ad pondus aeris globo æqualis, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$, & ita ſunt 2 F ad octo tertias partes diametri globi, id eſt, ad $13\frac{1}{3}$ digitos. Unde 2 F prodeunt 28 *ped.* 11 *dig.* Globus cadendo in vacuo, toto ſuo pondere $502\frac{3}{10}$ granorum, tempore minuti unius ſecundi deſcribit digitos $193\frac{1}{3}$ ut ſupra, & pondere 483 *gran.* deſcribit digitos 185,905,

&

$8''$. $42'''$ — $3''.7$, erit 1 ad 13. 69 ut $19\frac{1}{3}$ dig. ad ſpatium tempore $3''.42'''$ deſcriptum quod prodit ped. Lond. 220 circiter. Sed globi mercurio pleni ſpatium hoc 220 ped. tempore $4''$ deſcribunt in experimentis, & differentia temporum $4''$ & $3''.42'''$. eſt $18'''$. Tempora igitur prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter.

(f) * *Pondus aquæ huic globo æqualis eſt 16600 granorum.* Globus aqueus, cujus diameter eſt unius digiti continet grana 132,8 (287), & globorum homogeneorum, pondera ſunt ut diametrorum cubi, & propterea ut 1 ad 125 ita ſunt 132,8 grana ad pondus globi aquei cujus diameter eſt digitorum 5, quod proinde pondus eſt gran. 16600. Globorum æqualium pondera ſunt ut illorum denſitates, & denſitas aquæ eſt ad denſitatem aeris ut 860 ad 1. Quare pondus globi aëris diametro digitorum 5 deſcripti eſt $\frac{16600}{860}$ ſeu $19\frac{3}{10}$ gran. quam proximè. Hinc pondus globi vitrei aëre pleni in vacuo eſt gran. $483 + 19\frac{3}{10}$ ſeu gran. $502\frac{3}{10}$, & hoc pondus eſt ad pondus aëris globo æqualis, id eſt, denſitas globi, ſi homogeneus fingatur, ad denſitatem aëris, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$ *& ita ſunt 2 F &c.*, cætera patent ut in ſuperioribus calculis. 291.

& eodem pondere 483 *gran.* etiam in vacuo deſcribit ſpatium F ſeu 14 *ped.* $5\frac{1}{2}$ *dig.* (g) tempore $57'''$ $58''''$, & velocitatem maximam acquirit quâcum poſſit in aere deſcendere. Hâc velocitate globus, tempore $8''$ $12'''$, deſcribet ſpatium pedum 245 & digitorum $5\frac{1}{3}$. Aufer 1,3863 F ſeu 20 *ped.* $0\frac{1}{2}$ *dig.* & manebunt 225 *ped.* 5 *dig.* Hoc ſpatium igitur globus tempore $8''$ $12'''$, cadendo deſcribere debuit per theoriam. Deſcripſit verò ſpatium 202 pedum per experimentum. Differentia inſenſibilis eſt.

Similibus computis ad reliquos etiam globos aere plenos applicatis, confeci tabulam ſequentem.

Globorum pondera.	*Diametri.*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum* 220.		*Spatia deſcribenda per theoriam.*		*Exceſſus.*	
510 *gran.*	5,1 *dig.*	$8''$	$12'''$	226 *ped.*	11 *dig.*	6 *ped.*	11 *dig.*
642	5,2	7	42	230	9	10	9
599	5,1	7	42	227	10	7	10
515	5	7	57	224	5	4	5
483	5	8	12	225	5	5	5
641	5,2	7	42	230	7	10	7

Exper. 14. Anno 1719. menſe Julio, D. *Deſaguliers* hujuſmodi experimenta iterum cepit, formando veſicas porcorum in orbem ſphæricum ope ſphæræ ligneæ concavæ ambientis, quam madefactæ implere cogebantur inflando aerem; & haſce arefactas & exemptas demittendo ab altiore loco in templi ejuſdem turri rotunda fornicata, nempe ab altitudine pedum 272; & eodem temporis momento demittendo etiam glo-

(g) 291. * *Tempore* $57'''$ $58''''$. Hoc tempus, quod ante dictum eſt G, ducatur in numerum 5, & productum erit fere $5''$; & propterea (186) globus cujus diameter eſt 5 digit. & pondus in aëre gran. 483, tempore minutorum ſecundorum quinque deſcribet ſpatium 124 pedum circiter, & deinde videbitur uniformiter deſcendere.

globum plumbeum cujus pondus erat duarum librarum Romanarum circiter. Et interea aliqui ſtantes in ſupremâ parte templi, ubi globi demittebantur, notabant tempora tota cadendi, & alii ſtantes in terrâ notabant differentiam temporum inter caſum globi plumbei & caſum veſicæ. Tempora autem menſurabantur pendulis ad dimidia minuta ſecunda oſcillantibus. Et eorum qui in terrâ ſtabant unus habebat horologium cum elatere ad ſingula minuta ſecunda quater vibrante; alius habebat machinam aliam affabrè conſtructam cum pendulo etiam ad ſingula minuta ſecunda quater vibrante. Et ſimilem machinam habebat unus eorum qui ſtabant in ſummitate templi. Et hæc inſtrumenta ita formabantur, ut motus eorum pro lubitu vel inciperent vel ſiſterentur. Globus autem plumbeus cadebat tempore minutorum ſecundorum quatuor cum quadrante circiter. Et addendo hoc tempus ad prædictam temporis differentiam, colligebatur tempus totum quo veſica cecidit. Tempora, quibus veſicæ quinque poſt caſum globi plumbei primâ vice ceciderunt, erant $14\frac{3}{4}''$, $12\frac{3}{4}''$, $14\frac{5}{8}'''$, $17\frac{3}{4}''$, & $16\frac{7}{8}''$, & ſecundâ vice $14\frac{1}{2}''$, $14\frac{1}{4}''$, $14''$, $19''$ & $16\frac{3}{4}''$. Addantur $4\frac{1}{4}''$, tempus utique quo globus plumbeus cecidit, & tempora tota quibus veſicæ quinque ceciderunt, erant primâ vice $19''$, $17''$, $18\frac{7}{8}''$, $22''$, & $21\frac{1}{8}''$; & ſecundâ vice, $18\frac{3}{4}''$, $18\frac{1}{2}''$, $18\frac{1}{4}''$, $23\frac{1}{4}''$, & $21''$. Tempora autem in ſummitate templi notata, erant primâ vice $19\frac{3}{8}''$, $17\frac{1}{4}''$, $18\frac{3}{4}''$, $22\frac{1}{8}''$, & $21\frac{5}{8}''$; & ſecundâ vice $19''$, $18\frac{5}{8}''$, $18\frac{3}{8}''$, $24''$, & $21\frac{1}{4}''$. Cæterum veſicæ non ſemper rectâ cadebant, ſed nonnunquam volitabant, & hinc inde oſcillabantur inter cadendum. Et his motibus tempora cadendi prorogata ſunt & aucta nonnunquam dimidio minuti unius ſecundi, nonnunquam minuto ſecundo toto. Cadebant autem rectius veſica ſecunda & quarta primâ vice; & prima ac tertia ſecundâ vice. Veſica quinta rugoſa erat & per rugas ſuas nonnihil retardabatur. Diametros veſicarum deducebam ex earum circumferentiis filo tenuiſſimo bis circundato menſuratis. Et theoriam contuli cum experimentis in tabulâ ſequente, aſſumendo denſitatem

tem aeris eſſe ad denſitatem aquæ pluvialis ut 1 ad 860, & computando ſpatia quæ globi per theoriam deſcribere (h) debuerunt cadendo.

Veſicarum pondera	*Diametri.*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum 272.*	*Spatia iiſdem temporibus deſcribenda per theoriam.*		*Differentia inter theor. & exper.*	
128 *gran.*	5,28 *dig.*	19″	271 *ped.*	11 *dig*	— 0 *ped.*	1 *dig.*
156	5,19	17	272	$0\frac{1}{2}$	+ 0	$0\frac{1}{2}$
$137\frac{1}{2}$	5,3	$18\frac{1}{2}$	272	7	+ 0	7
$97\frac{1}{2}$	5,26	22	277	4	+ 5	4
$99\frac{1}{8}$	5	$21\frac{1}{8}$	282	0	+ 10	0

Globorum igitur tam in aere quàm in aquâ motorum reſiſtentia prope omnis per theoriam noſtram recte exhibetur, ac denſitati fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus, proportionalis eſt.

In ſcholio, quod ſectioni ſextæ ſubjunctum eſt, oſtendimus per experimenta pendulorum quod globorum æqualium & æquivelocium in aere, aquâ, & argento vivo motorum reſiſtentiæ ſunt ut fluidorum denſitates. (i) Idem hic oſtendimus magis ac-

(h) * *Deſcribere debuerunt cadendo.* Exempli causâ calculum tentabimus experimenti cum tertia veſica facti. Hujus veſicæ diameter erat 5.3 digitorum & pondus in aëre granorum 137, 5. Globus aëris diametro digitorum 5.3 deſcriptus continet 23 grana quam proxime; unde veſicæ pondus in vacuo erat gran. 160,5, & ut 23 ad 160, 5 ita ſunt octo tertiæ partes diametri veſicæ ſeu digiti $14\frac{2}{15}$ ad ſpatium 2 *F*, quod ita prodit digit. 98,626. Veſica cadendo in vacuo toto ſuo pondere 160,5 gran. tempore minuti unius ſecundi deſcribit digitos $193\frac{1}{3}$, & pondere 137,5 gran. deſcribit digitos 165,628, & eodem pondere 137,5 gran. etiam in vacuo deſcribit ſpatium *F* digitorum 49,313 tempore 0″,5456 & velocitatem maximam acquirit cum quâ poſſit in aëre deſcendere. Hâc velocitate veſica tempore minutorum ſecundorum $18\frac{1}{2}$ deſcribet ſpatium 277 ped. & 8. digit. circiter. Subducatur ſpatium 1,3863 *F* ſeu 5. ped. & 8 digit., & manebunt 273 pedes; cùm in tabula accuratiore calculo confecta ſpatium per theoriam deſcribendum ſit 272 ped. & 7 digit., & in experimento ſit 272 ped.

(i) * *Idem hic oſtendimus &c.* Nam theoria experimentis confirmata, cui ſuperiore computationes nituntur, ſupponit reſiſtentiam, cæteris paribus, eſſe in ratione compoſitâ ex ratione duplicatâ velocitatis mobilis & ratione ſimplici denſitatis fluidi.

accuratè per experimenta corporum cadentium in aëre & aquâ. Nam pendula ſingulis oſcillationibus motum cient in fluido motui penduli redeuntis ſemper contrarium, & reſiſtentia ab hoc motu oriunda, ut & reſiſtentia fili quo pendulum ſuſpendebatur, totam penduli reſiſtentiam majorem reddiderunt quàm reſiſtentia quæ per experimenta corporum cadentium prodiit. Etenim per experimenta pendulorum in ſcholio illo expoſita, globus ejuſdem denſitatis cum aquâ, deſcribendo longitudinem ſemidiametri ſuæ in aëre, amittere deberet motûs ſui partem $\frac{1}{5342}$. At per theoriam in hac ſeptimâ ſectione expoſitam & experimentis cadentium confirmatam, globus idem deſcribendo longitudinem eandem, (k) amittere deberet motûs ſui partem tantum $\frac{1}{4586}$, poſito quod denſitas aquæ ſit ad denſitatem aëris ut 860 ad 1. Reſiſtentiæ igitur per experimenta pendulorum majores prodiere (ob cauſas jam deſcriptas) quàm per experimenta globorum cadentium, idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cûm pendulorum in aëre, aquâ & argento vivo oſcillantium reſiſtentiæ à cauſis ſimilibus ſimiliter augeantur, proportio reſiſtentiarum in his mediis, tam per experimenta pendulorum, quàm per experimenta corporum cadentium, ſatis rectè exhibebitur. Et inde concludi poteſt quod corporum in fluidis quibuſcunque fluidiſſimis motorum reſiſtentiæ, cæteris paribus, ſunt ut denſitates fluidorum.

His

(k) * *Amittere deberet motûs ſui partem tantùm* $\frac{1}{4586}$. Sit D diameter globi V ejus velocitas ſub initio motus in fluido, $2F$ ſpatium quod ſit ad $\frac{8}{3}D$ ut denſitas globi ad denſitatem aëris, hoc eſt, ut 860 ad 1, ideoque $2F = \frac{6880}{3}D$; ſit T tempus quo globus cum velocitate V uniformiter progrediendo deſcribit ſpatium $2F$, & t tempus quo eâdem uniformi velocitate deſcribit ſpatium $\frac{1}{2}D$; & erit $t : T = \frac{1}{2}D : \frac{6880}{3}D = 3 : 13760$, & inde $t : T + t = 3 : 13763$, ideoque $\frac{t}{T+t} =$ 292.
$\frac{3}{13763} = \frac{1}{4586}$ quam proximè. Eſt autem $\frac{tV}{T+t}$ velocitatis V pars amiſſa tempore t (*per cor.* 3 *prop.* 38). Globus igitur deſcribendo longitudinem ſemidiametri ſuæ in aëre, per theoriam in hac ſeptimâ ſectione expoſitam amittere debet motûs ſui partem $\frac{1}{4586}$.

(l) His ita ſtabilitis, dicere jam licet quamnam motûs ſui partem globus quilibet, in fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproximè. Sit D diameter globi, & V velocitas ejus ſub initio motus, & T tempus, quo globus velocitate V in vacuo deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium $\frac{8}{3}$ D ut denſitas globi ad denſitatem fluidi: & globus in fluido illo projectus, tempore quovis alio *t* amittet velocitatis ſuæ partem $\frac{tV}{T+t}$, manente parte $\frac{TV}{T+t}$, & deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium uniformi velocitate V eodem tempore deſcriptum in vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585093 eſt ad numerum $\frac{t}{T}$, *per corol.* VII. *prop.* XXXV. In motibus tardis reſiſtentia poteſt eſſe paulò minor, (m) propterea quod figura globi paulò aptior ſit ad motum quàm figura cylindri eâdem diametro deſcripti. In motibus velocibus reſiſtentia poteſt eſſe paulò major, propterea quod elaſticitas & compreſſio fluidi non (n) augeantur in duplicatâ ratione velocitatis. Sed hujuſmodi minutias hic non expendo.

Et quamvis aër, aqua, argentum vivum & ſimilia fluida, per diviſionem partium in infinitum, ſubtiliarentur & fierent media infinitè fluida; tamen globis projectis haud minus reſiſterent. Nam reſiſtentia, de quâ agitur in propoſitionibus præcedentibus, oritur ab inertiâ materiæ; & inertia materiæ cor-

(l) * *His ita ſtabilitis, dicere jam licet quamnam motûs ſui partem globus quilibet, in fluido quocumque projectus* & ſolâ vi inſitâ motus, *dato tempore amittet quam proximè*; theoriam enim cum experimentis conſentire vidimus tum in fluidis elaſticis, quale eſt aër, tum in fluidis non elaſticis, quale eſt aqua. Quæ ſequuntur, manifeſta ſunt per notam ad cor. 3. prop. XXXVIII. (282.).

(m) * *Propterea quod figura globi paulo aptior ſit ad motum &c.* Nam in Lemmate VII. lib. II. & in ſequentibus propoſitionibus ſuppoſitum eſt, globi & cylindri, quorum eadem eſt diameter, æqualem eſſe reſiſtentiam.

(n) * *Non augeantur in duplicatâ ratione velocitatis*, in quâ tamen augeri deberent, uti expoſitum eſt in experimento 12.

corporibus eſſentialis eſt & quantitati materiæ ſemper proportionalis. Per diviſionem partium fluidi, reſiſtentia quæ oritur à tenacitate & frictione partium diminui quidem poteſt: ſed quantitas materiæ per diviſionem partium ejus non diminuitur; & manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertiæ, cui reſiſtentia, de quâ hic agitur, ſemper proportionalis eſt. Ut hæc reſiſtentia diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in ſpatiis per quæ corpora moventur. Et propterea ſpatia cœleſtia, per quæ globi planetarum & cometarum in omnes partes liberrimè & ſine omni motus diminutione ſenſibili perpetuo moventur, fluido omni corporeo deſtituuntur, ſi forte vapores longe tenuiſſimos & trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in fluidis progrediendo, & hic motus oritur ab exceſſu preſſionis fluidi ad projectilis partes anticas ſupra preſſionem ad ejus partes poſticas, & non minor eſſe poteſt in mediis infinite fluidis quam in aere, aquâ & argento vivo pro denſitate materiæ in ſingulis. Hic autem preſſionis exceſſus, pro quantitate ſuâ, non tantum motum ciet in fluido, ſed (°) etiam agit in projectile ad motum ejus retardandum: & propterea reſiſtentia in omni fluido eſt ut motus in fluido à projectili excitatus, nec minor eſſe poteſt in æthere ſubtiliſſimo pro denſitate ætheris, quam in aëre, aquâ & argento vivo pro denſitatibus horum fluidorum.

(o) * *Sed etiam agit in projectile*, per motûs legem III. 292.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLI. Theor. XXXII.

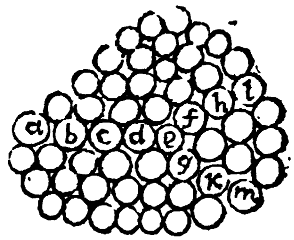
SECTIO VIII.

De motu per fluida propagato.

PROPOSITIO XLI. THEOREMA XXXII.

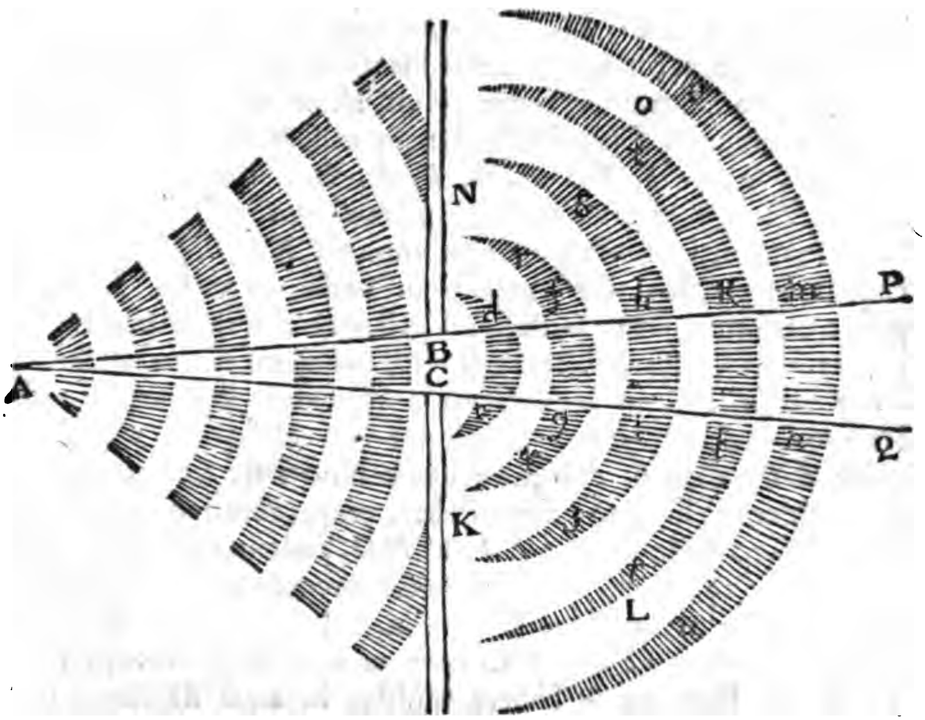
Preſſio non propagatur per fluidum ſecundum lineas rectas, niſi ubi particulæ fluidi in directum jacent.

Si jaceant particulæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in lineâ rectâ, poteſt quidem preſſio directè propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urgebit particulas obliquè poſitas *f* & *g* obliquè, & particulæ illæ *f* & *g* non ſuſtinebunt preſſionem illatam, niſi fulciantur à particulis ulterioribus *h* & *k*; quâtenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non ſuſtinebunt preſſionem niſi fulciantur ab ulterioribus *l* & *m* eaſque premant, & ſic deinceps in infinitum. Preſſio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet & obliquè propagabitur in infinitum; & poſtquam incipit obliquè propagari, ſi inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accuratè in directum jacentes inciderit. *Q. E. D.*



Corol. Si preſſionis, à dato puncto per fluidum propagatæ, pars aliqua obſtaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in ſpatia pone obſtaculum. Id quod ſic etiam demonſtrari poteſt. A puncto *A* propagetur preſſio quâquâverſum, idque ſi fieri poteſt ſecundum lineas rectas, & obſtaculo *NBCK* perforato in *BC*, intercipiatur ea omnis, præter partem coniformem *APQ*, quæ per foramen circulare *BC* tranſit. Planis tranſverſis *de*, *fg*, *hi* diſtinguatur conus *APQ* in fruſta; & interea dum conus *ABC*, preſſionem propagando, urget fruſtum conicum ulterius *degf* in ſuperficie *de*, & hoc fruſtum urget fruſtum proximum *fgih* in ſuperficie

cie *fg*, & fruſtum illud urget fruſtum tertium, & ſic deinceps in infinitum; manifeſtum eſt (per motus legem tertiam) quod fruſtum primum *defg*, reactione fruſti ſecundi *fghi*, tantum urgebitur & premetur in ſuperficie *fg*, quantum urget & premit fruſtum illud ſecundum. Fruſtum igitur *defg* inter conum *Ade* & fruſtum *fhig* comprimitur utrinque, & propterea (*per corol.* VI, *prop.* XIX.) figuram ſuam ſervare nequit, niſi vi eadem comprimatur undique. Eodem igitur impetu



quo premitur in ſuperficiebus *de*, *fg*, conabitur cedere ad latera *df*, *eg*; ubi que (cùm rigidum non ſit, ſed omnimodo fluidum) excurret ac dilatabitur, niſi fluidum ambiens adſit, quo conatus iſte cohibeatur. Proinde conatu excurrendi, premet tam fluidum ambiens ad latera *df*, *eg* quam fruſtum *fghi* eodem impetu; & propterea preſſio non minus propagabitur à lateribus *df*, *eg* in ſpatia *NO*, *KL* hinc inde, quam propagatur à ſuperficie *fg* verſus *PQ*. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XLII. THEOREMA XXXIII.

Motus omnis per fluidum propagatus divergit à recto tramite in ſpatia immota.

Caſ. 1. Propagetur motus à puncto *A* per foramen *BC*, pergatque, ſi fieri poteſt, in ſpatio conico *BCQP*, ſecundum lineas rectas divergentes à puncto *A*. Et ponamus primo quod [a] motus iſte ſit undarum in ſuperficie ſtagnantis aquæ. Sintque *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. undarum ſingularum partes altiſſimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem diſtinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior eſt quam in fluidi partibus immotis *LK*, *NO*, defluet eadem de jugorum terminis *e*, *g*, *i*, *l*, &c. *d*, *f*, *h*, *k*, &c. hinc inde verſus *KL* & *NO*: & quoniam [b] in undarum vallibus depreſſior eſt quam in fluidi partibus immotis *KL*, *NO*; defluet eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, poſteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur verſus *KL* & *NO*. Et quoniam motus undarum ab *A* verſus *PQ* fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, ideoque [c] celerior non eſt quàm pro celeritate deſcenſus; & deſcenſus aquæ hinc inde verſus *KL* & *NO* eâdem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum hinc inde verſus *KL* & *NO* eâdem velocitate quâ undæ ipſæ ab *A* verſus *PQ* rectâ progrediuntur. Proindeque ſpatium totum hinc inde verſus *KL* & *NO* ab undis dilatatis *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv*, &c. occupabitur. *Q. E. D.* Hæc ita ſe habere quilibet in aquâ ſtagnante experiri poteſt.

Caſ.

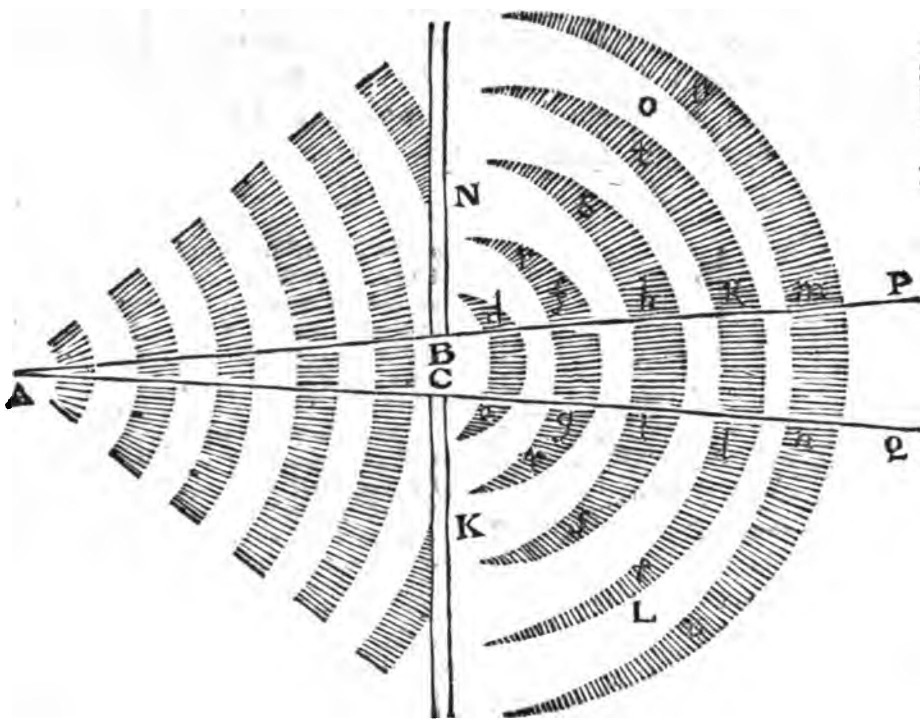
(a) *Motus iſte ſit undarum &c.* Vis quælibet deorſum directa in ſuperficiem ſtagnantis aquæ agat in A, & cavitate factâ, cogat aquam circumquaque aſcendere, aqua elevata vi propriæ gravitatis deſcendendo partim refluet in A, ad cavitatem replendam, partim in plagam oppoſitam feretur, & celeritate cadendo acquiſitâ novam cavitatem formabit, atque ità deinceps undæ motus per ſucceſſivum aſcenſum & deſcenſum propagabitur in orbem.

(b) * *In undarum vallibus depreſſior eſt &c.* Aqua enim ab altioribus undarum partibus cadendo celeritatem acquirit, quâ infrà quieſcentis aquæ ſuperficiem deſcendit.

(c) * *Celerior non eſt* quàm pro celeritate deſcenſûs ab eâdem undarum altitudine, undè aqua in plagas P Q, K L, N O æquè defluit.

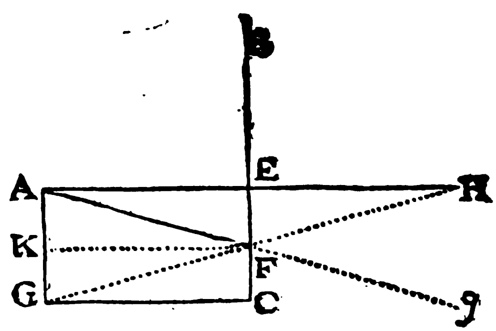
Caſ. 2. Ponamus jam quod *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn* deſignent pulſus à puncto *A* per medium elaſticum ſucceſſive

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLII. THEOR. XXXIII.



pro-

193. Ex demonſtratis in hoc caſu, motus undæ in obſtaculum planum incurrentis definiri poteſt. Undarum motus è loco A quaſi centro propagetur. Incurrat unda in obſtaculi immoti B C punctum F, cum velocitate & directione A F. Ductâ ex A in B C perpendiculari A E, completoque rectangulo A E F K, reſolvatur motus A F, in duos alios motus A E, A K, ſeu factâ F C æquali A K, in motus K F, F C; & quia particulæ aquæ motu F C in obſtaculum non agunt, poſt impactum pergent eâdem quâ antè impactum velocitate ac directione F C moveri. At motu K F, in obſtaculum directè incurrentes motum illum omnem, juxtà leges conflictûs corporum non elaſticorum, amittent. Cùm autem aqua in F ab aliâ inſequente urgeatur, & obſtaculum (per hyp.) cedere nequeat; elevabitur illa in F; & deindè vi ponderis ſui, id eſt, vi æquali illi quâ per obſtaculi longitudinem elevata fuit,

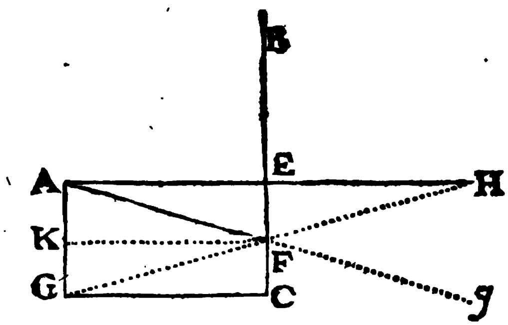


193.

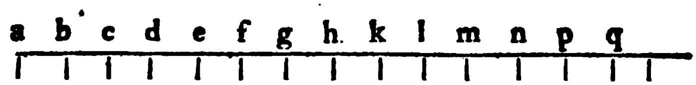
def-

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLII. Theor. XXXIII.

propagatos. (d) Pulſus propagari concipe per ſucceſſivas condenſationes & rarefactiones medii, ſic ut pulſus cujuſque pars denſiſſima ſphæricam occupet ſuperficiem circa centrum *A* deſcriptam, & inter pulſus ſucceſſivos æqualia intercedant intervalla. Deſignent autem lineæ *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. denſiſſimas pulſuum partes, per foramen *BC* propagatas. Et quoniam medium ibi denſius eſt quam in ſpatiis hinc inde verſus *KL* & *NO*,

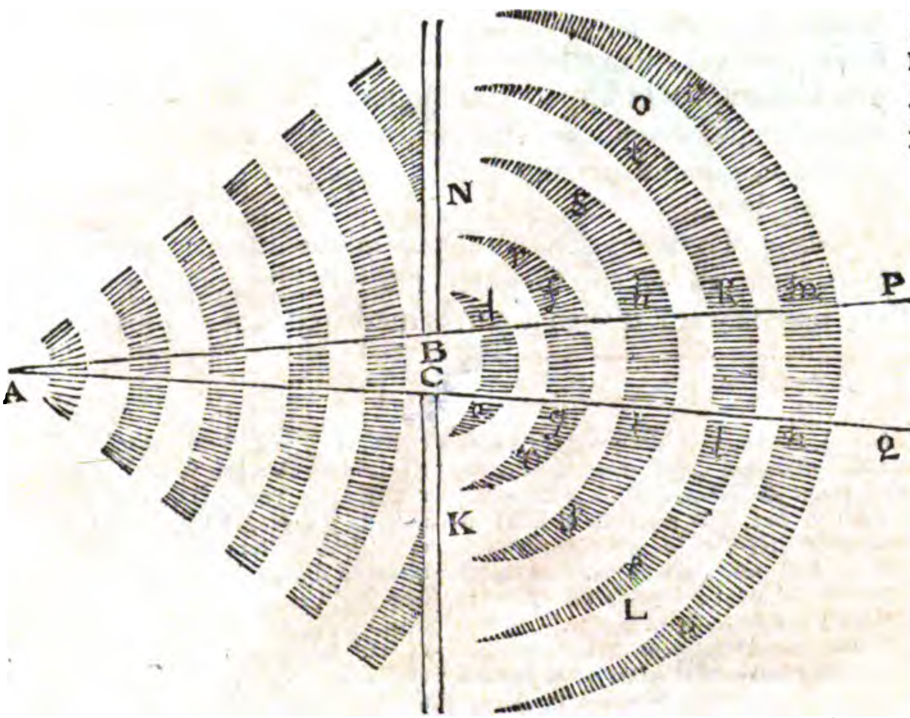


deſcendet in plagam F K, eâdemque proinde velocitate ac directione ab obſtaculo recedet quâ ad illud acceſſerat. Ex hoc motu F K, & ex alio F C in aquâ reſiduo componetur motus F G, per diagonalem parallelogrammi K F C G; unda igitur à puncto F reflectitur ſecundum directionem F G, & cum eâdem velocitate quâ per A F in obſtaculum incurrit, & quâ, ſublato obſtaculo, motum per F g, ſeu per A F productam continuaſſet, eſtque angulus reflexionis G F C æqualis angulo incidentiæ A F E. Producatur jam linea G F ut perpendiculo A E etiam producto occurrat in H; & quia angulus E F H = C F G = E F A, erit E H = A E & F H = A F = F G, & ideò aqua reflexa eodem modo movebitur per F G, ac ſi ex puncto H, quaſi ex centro undarum motus propagaretur; cùmque demonſtratio hæc omnibus obſtaculi plani B C punctis congruat, manifeſtum eſt undas reflexas eandem velocitatem eandemque figuram citrà obſtaculum obtinere, quas, ſublato obſtaculo, ultrà lineam B C habuiſſent.



(d) * 294. *Pulſus propagari concipe per ſucceſſivas condenſationes & rarefactiones medii*, ità ut primum partes medii ſè puncto A quaquaverſum propulſæ eant & condenſentur, & ubi ſunt denſiſſimæ ſphæricam ſuperficiem circà centrum A deſcriptam occupare intelligantur, tum vi elaſticâ rarefiant & dilatatione ſuâ partim verſus centrum A redeant, partim à centro illo quaquaverſum recedant & partes vicinas propulſent; ita ut condenſentur, atque ità ſucceſſivis condenſationibus & dilatationibus agitetur totum medium. Quæ ut clarius intelligantur, motum particularum aëris in uno prædictæ ſphæræ radio contemplemur. Sint a, b, c, d &c. puncta phyſica medii quieſcentis in rectâ a q, ad æquales ab invicem diſtantias ſita. Punctum a, vi quâlibet acceleratrice urgeatur, ſecundùm directionem a q, & deinde ceſſante vis illius actione, per celeritatem acquiſitam moveatur. Non poterit ità moveri particula a, quin ſucceſſive moveantur particulæ aliæ b, c, d, e, &c. & quia medium elaſticum in intervallis b c, c d. d e, &c. gradatim condenſatur & vim elaſticam majorem acquirit quâ celeritas particulæ a, ſibi relictæ continuò minuitur ac tandem prorſus extinguitur; tum verò medium condenſatum vi ſuâ elaſticâ utrinque tam verſus a, quam verſus q dilatatur, & particulas a, b, c, &c.

NO, (e) dilatabit ſeſe tam verſus ſpatia illa *KL*, *NO* utrinque ſita, quam verſus pulſuum rariora intervalla; eoque pacto rarius ſemper evadens è regione intervallorum ac den-



ſius è regione pulſuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulſuum progreſſivus motus oritur à perpetuâ relaxatione partium denſiorum verſus antecedentia intervalla rariora;

&c. in priſtina loca ſucceſſivè repellit, dum intereà aliæ particulæ ut g, h, &c. verſus q progrediuntur; quo motu medium rurſus condenſatur verſus q, & deinde utrinquè dilatatur, atquè ità deinceps pulſus per ſucceſſivas condenſationes & rarefactiones medii propagantur. * Hæc pulſuum in medio Elaſtico genitorum naturâ, ad Propoſ. XLVII. fuſius expendetur, ſed iſto in loco hæc ſufficere videntur.

(e) * *Dilatabit ſe tam verſus &c.* Per vim elaſticam, quæ vi comprimenti quâ partes medii condenſantur, æqualis eſt, 294.
& in omnem loci circumferentiam agit.

295. Motûs pulſuum in medio elaſtico ſpectari poteſt ut analogus cum motu undarum in ſuperficie aquæ ſtagnantis; nam condenſatio partium medii elaſtici locum tenet elevationis aquarum, vis elaſtica medii locum gravitatis aquæ, & pars pulſuum denſiſſima parti undarum altiſſimæ correſpondet. Undè in utroque motu, medii particulæ per brevia ſpatia eunt & redeunt, intereadum pulſus vel unda propagatur

ra; & pulſus eâdem ferè celeritate ſeſe in medii partes quieſcentes *KL*, *NO* hinc inde relaxare debent; pulſus illi eâdem ferè celeritate ſeſe dilatabunt undique in ſpatia immota *KL*, *NO*, quâ propagantur directè à centro *A*; ideoque ſpatium totum *KLNO* occupabunt. *Q. E. D.* Hoc experimur in ſonis, qui vel monte interpoſito audiuntur, vel in cubiculum per feneſtram admiſſi ſeſe in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi à parietibus oppoſitis, quam à feneſtrâ directè propagati, quantùm ex ſenſu judicare licet.

Caſ. 3. Ponamus denique quod motus cujuſcunque generis propagetur ab *A* per foramen *BC*: & quoniam propagatio iſta non fit, niſi quâtenus partes medii centro *A* propiores urgenr

(294) & eodem modo quo (293 undarum reflexionem expoſuimus, demonſtratur pulſus ab obſtaculo plano B C, (vid. fig. not. 293.) ità repercuti ut ſit angulus reflexionis æqualis angulo incidentiæ, idemque ſit medii motus poſt reflexionem qui produceretur, ſi pulſus ex centro H ſublato obſtaculo, propagaretur.

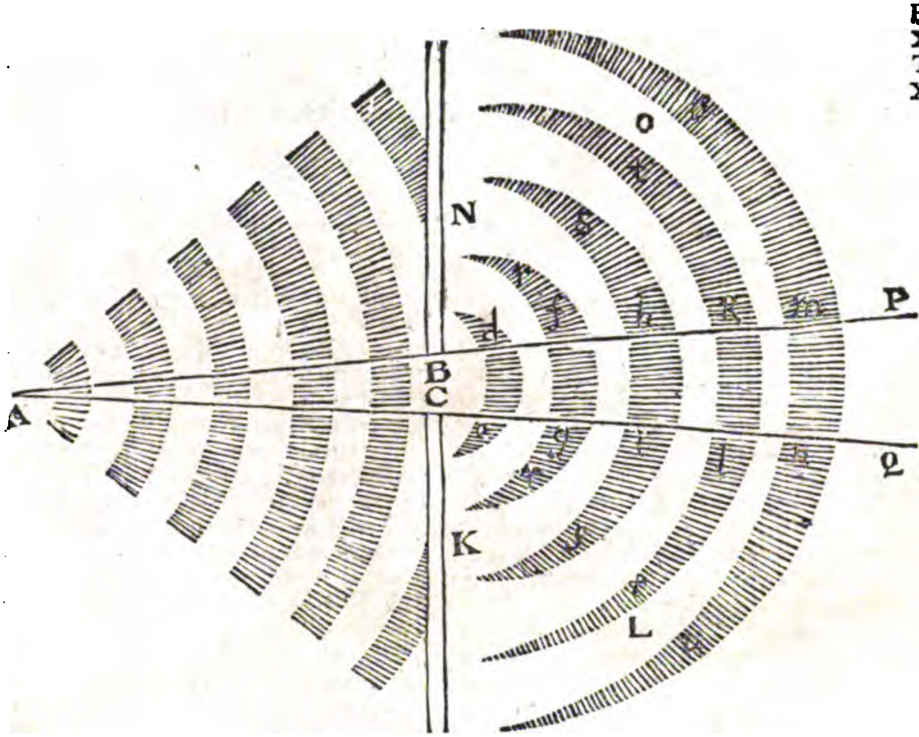
Sed ut hujus ſectionis doctrina quæ ſoni phænomenis explicandis accommodata eſt, melius intelligatur, nonnulla de naturâ ſoni & de motu corporum reſonantium præmittenda ſunt:

296. *Definitio. Sonus directus eſt*, qui à corpore ſonoro ad organum auditûs rectâ lineâ fertur. *Sonus reflexus qui* à corpore ſonorò in alia corpora fertur, & inde ad aurem reflectitur.

297. *Propoſitio. Sonus eſt particularum corporis reſonantis motus tremulus ac vibratorius aeri communicatus & ad aures delatus.* Hæc propoſitio notiſſimis experimentis certa eſt. Nam corpora non reſonant niſi percutiantur, & maximè omnium reſonant corpora dura atquè elaſtica quorum partes ictu flectuntur, & deinde vi ſuâ elaſticâ reſiliunt, atquè ità tremulo ac vibratorio motu agitantur. Particularum corporis reſonantis ſubſultus viſu & tactu percipitur; chartæ fruſtula corpori reſonanti inſidentia ſubſultare oculis cernuntur & admotâ manu partium fremitus ſentitur. Verùm ſi fides inſtrumenti muſici tenſa non fuerit, licet oſcillationes tota peragat, ſonum non edit; & forcipis focariæ crura digitis conſtricta & extemplò dimiſſa, oſcillationes agunt ſine ſono; at ſi oſcillando corpus aliquod durum percutiunt, reſonant; ex quibus deducitur ſonum non ſolo totius corporis oſcillatorio motu, ſed particularum ipſius tremore produci. Hic motus aeri contiguo communicatur & pulſus excitat (294). Cùm propè aquam ſtagnantem tympanum quatitur, ſubſultus obſervantur in aquæ ſuperficie. Dum inſtrumentorum muſicorum pulſantur nervi, pulviſculi qui aëri innatant & radio ſolis fiunt conſpicui, conformiter ad fremitum nervorum ſubſultare videntur. Si ex duabus chordis muſicis, homogeneis, æqualibus & æque tenſis una pulſetur ut ſonum edat, altera prioris vicina concutitur & ſimiliter reſonat. Tandem corpora ſonora ſub campanâ antliæ pneumaticæ poſita atque percuſſa, dum educitur aër, ſonum languidiorem reddunt & exhauſto aëre, nullum qui poſſit percipi. Eſt igitur aër vehiculum ſoni: attamen totius aereæ molis motus qui in vento cernitur, per ſe ad producendum ſonum non valet, ſed vibratorius particularum motus ſatis validus neceſſarius eſt.

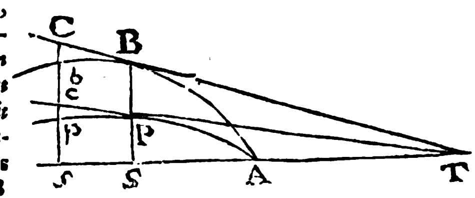
298.

gent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur fluidæ ſunt, ideoque recedunt quâquâverſum in regiones ubi minus premuntur: recedent eædem verſus medii partes omnes quieſcentes, tam laterales *KL* & *NO*, quàm anteriores *PQ*,

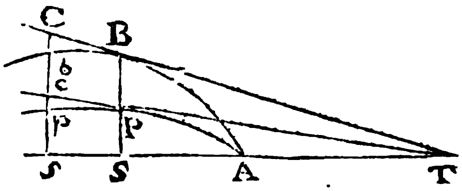


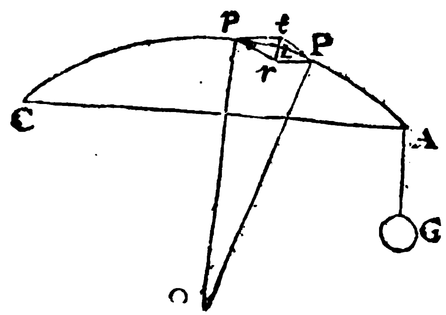
eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen *BC* tranſiit, dilatari incipiet & inde tanquam à principio & centro, in partes omnes directè propagari. *Q. E. D.*

298. Lemma. *Si curvarum duarum AB, AP abſciſſam communem AS habentium, ordinatæ SB, SP ſint ſemper ad invicem in datâ ratione, imminutis iis in infinitum ut curvæ tandem coincidant cum axe AS, erit ultima ratio curvaturæ eadem quæ ordinatarum.* Duc novam ordinatam s p curvis occurrentem in p & b, & ad puncta B & P duc tangentes occurrentes ordinatæ novæ in C & c. Tum ob datam ordinatarum rationem, tangentes productæ ad idem axis punctum T concurrent (256. *lib.* 298.



lib. 1.) & ideò ob parallelas SB, sC, erit sC : sc = SB : SP & (per hyp.) SB : SP = sb : sp; unde sC : sc = sb : sp = sC − sb : sc − sp = bC : pc = SB : SP, coincidant jam ordinatæ sb, SB, & lineolæ evaneſcentes bC, pc, erunt ſubtenſæ angulorum contactûs bBC, pPc, & ordinatis SB, SP in infinitum diminutis, ut curvæ tandem coincidant cum axe AS, ſubtenſæ illæ perpendiculares evadent ad curvas, fietque Bb æqualis Pp. Sed in hâc hypotheſi, anguli contactûs ſunt ad invicem ut $\frac{bC}{Bb}$, ad $\frac{pc}{Pp}$ (154. lib. 1.), hoc eſt, ut bC ad pC. Quarè curvaturæ in B & P, quæ angulis contactûs proportionales ſunt (121. *lib.* 1.) erunt ſubtenſis bC, pc, ac proindè (ex dem.) ordinatis SB, SP proportionales. Q. E. D.





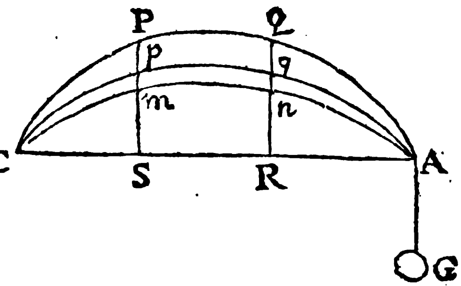
299. Lemma. *Vis acceleratrix quâ punctum quodlibet P nervi tenſi & uniformiter craſſi urgetur, dum per breviſſimum ſpatium oſcillatur, eſt ut nervi curvatura in eodem loco.* Nervus AC pondere G tenſus oſcillando pervenerit ad poſitionem curvæ APC, cum axe AC ferè coincidentis, & quia linea recta CA pondere G tenditur ubique æqualiter, æqualis quoque erit tenſio omnium partium curvæ APC quamproximè. Sumatur punctum p, puncto P quamproximum, & ductis tangentibus Pt, pt concurrentibus in t, compleatur parallelogrammum Ptpr, ducanturque ad curvam normales PO, po concurrentes in O, vires æquales quibus arcus evaneſcens Pp, (qui ſumi poteſt pro arcu circuli radio PO deſcripti (121. *lib.* 1.) in directionibus tangentium tP, tp, hinc indè trahitur, exponantur per tangentes illas æquales, & ſingulæ reſolvantur in duas alias vires, vis quidem tP in vires tz & zP, & vis tp in vires tz, ſeu zr & zp vires zP, zp, æquales & oppoſitæ nullum motum in arcu Pp producent, at viribus tz & zr, ſimul, ſeu vi totâ tr, in directione tr, ſivè PO urgebitur. Erit igitur vis motrix quâ particula Pp in directione tr urgetur, ad fili tenſionem in P vel p per quam generatur vis illa ut tr ad tP. Sed (ex naturâ circuli) angulus tPr, æqualis eſt angulo POp, cum arcus Pp ſit utriuſque menſura, & propterà triangulum iſoſcele POp, ſimile eſt triangulo iſoſceli tPr. Quarè Pp eſt ad PO ut tr ad tP, hoc eſt, ut vis motrix quâ particula Pp in directione tr ſeu PO urgetur ad fili tenſionem datam G, & ideò vis illa eſt ut $\frac{Pp}{PO}$. Cum igitur vis acceleratrix ſit in ratione vis motricis directè & materiæ movendæ inverſè (per def. 8am. lib. 1.) & materia movenda ſit hic ut Pp, ob æqualem ubique nervi craſſitudinem, erit vis acceleratrix ut $\frac{1}{PO}$, id eſt, in ratione inverſâ radii circuli curvam oſculantis in P, ideóque in ratione curvaturæ in P (121. *lib.* 1.). Q. E. D.

300. PROPOSITIO. *Si chorda muſica AC uniformiter craſſa & pondere G tenſa, ità inflectatur dum reſonat, ut ejus elongatio maxima ab axe motûs AC ſit ferè inſenſibilis & ideò vis tenſionis non mutetur per auctam chordæ longitudinem in majoribus ſuis ab axe diſtantiis & inclinatio radiorum curvaturæ ad axem negligi poſſit, ea erit natura curvæ AQPC in quam chorda oſcillando inflectitur, in quovis articulo motûs ejuſdem chordæ ut ductis pro libitu ordinatis ad axem normalibus QR, PS ſit curvatura in Q, ad curvaturam in*

P,

P, ut QR, ad PS, ac puncta omnia Q, P ſimul ab axem pervenientia & ſimul redeuntia oſcillationes ſuas omnes eodem tempore peragant ad inſtar penduli oſcillantis in cycloide.

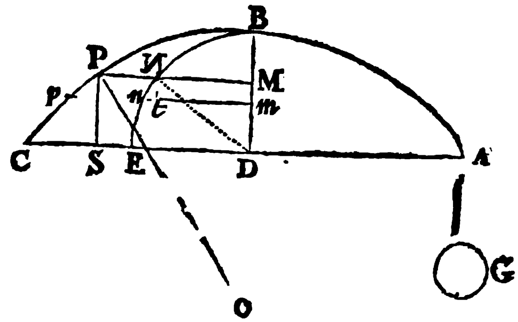
De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLII. Theor. XXXIII.



Caſ. 1. Sit curva AQPC chordæ oſcillantis diſtantia maxima ab axe AS punctis omnibus jam quieſcentibus, eaque ſit hujus curvæ natura ut curvatura in Q ſit ad curvaturam in P, in ratione diſtnatiæ QR ad diſtantiam PS. Hoc poſito erit acceleratio in Q ad accelerationem in P in eâdem ratione QR ad PS (*per Lem. ſuperius 299.*) ideóque initio motû ſpatia ſimul percurſa Qq, Pp, erunt in eâdem ratione, & diviſim ſpatia percurrenda qR, pS, erunt in eâdem ratione QR ad PS; undè etiam accelerationes novæ in punctis q & p, erunt in eâdem ratione QR ad PS (299, 298.) atque erunt ad accelerationes priores in Q & P, ut diſtantiæ qR & pS ad diſtantias QR & PS (299, 298.). Ergò puncti cujuſvis P, vel in eâdem curvâ AQPC vel in diverſis AQPC & Aqpc, ſpectati acceleratio ſemper eſt ut ejuſdem diſtantia ac axe motûs AC. Quarè (*per prop.* 51. *lib.* 1.) puncta omnia nervi ad axem ſimul perveniunt, ſimul redeunt & oſcillationes ſingulas peragunt dato tempore ad inſtar corporis in cycloide oſcillantis. Q. E. D.

Caſ. 2. Si chorda plectro modò percuſſa nondum induerit formam curvæ in primo caſu deſcriptæ, erit curvatura in P ad curvaturam in Q in majori vel minori ratione quàm diſtantiæ PS ad diſtantiam QR. Sit in majori ratione, & erit velocitas in P, ad velocitatem in Q, in ratione majore quam PS ad QR, (299) & ſpatium Pp tempore minimo deſcriptum ad ſpatium Qq, eodem tempore deſcriptum in ratione majore quam PS ad QR, ideòque diviſim erit ps minor reſpectu PS, quàm qR, reſpectu QR; & quia curvatura cum diſtantiis ab axe minuitur ac coincidente curvâ cum axe nulla evadit, erit etiam curvatura in p, minor reſpectu curvaturæ in P, quam curvatura in q, reſpectu curvaturæ in Q, & inde (299) acceleratio in p, minor reſpectu accelerationis in P, quam acceleratio in q, reſpectu accelerationis in Q. Majoris igitur velocitatis acceleratione ſemper decreſcente & minoris velocitatis 300 acceleratione è contrà ſemper creſcente, reſpectu diſtantiarum ab axe AC, motus inter ſe tandem ità temperabuntur, ut punctis P & Q pervenientibus in loca quædam m & n, tum velocitates, tum accelerationes futuræ ſint diſtantiis mS, nR proportionales, ideóque curvâ AnmC, jam exiſtente eâdem quam deſcripſimus in caſu 1°, motus dehinc omnes conſpirabunt, atquè idem eveniet, ſi ſit curvatura in P ad curvaturam in Q in minore ratione quam diſtantiæ PS ad diſtantiam QR. Quarè quocumque modo percutiatur chorda muſica, quam citiſſimè induet formam curvæ in caſu primo deſcriptæ, atquè perget moveri more ibidem deſcripto. Q. E. D.

Cæterùm inflexiones ſeu diſtantias admodum parvas ab axe motûs tam in chordis muſicis quam in laminis elaſticis ex quibus corpora ſonora compacta eſſe fingi poteſt, viribus acceleratricibus proportionales & proindè oſcillationes eſſe iſochronas experimentis oſtendit Clar. *s'Graveſandius* in Elem. phyſ. & *Merſennus* in harmoniâ univerſali longiorum chordarum vibrationes iſochronas oculis obſervavit. Si verò chorda nimiâ vi pulſetur, vis acceleratrix in experimentis creſcit in majori ratione quam diſtantiæ ab axe motûs & oſcillationes breviori tempore abſolvuntur.



301. *Cor.* 1. Datis axibus A C & B D curva muſica ſic poteſt deſcribi. Centro D & radio D B deſcribatur circuli quadrans B N E; ducatur ad B D, perpendicularis M N circulo occurrens in N, & producatur ad P, ut ſit M P ad D C, in ratione arcûs B N, ad arcum quadrantalem B N E, dico punctum P eſſe in curvâ muſicâ A B C.

Sit enim P puuctum curvæ muſicæ ABC, & dicantur B D $= a$, A C $= L$, D C $= \frac{1}{2} L$, B M $= x$, P M $= y$, arcus B P $= s$, $PS = MD = z = a - x$, radius curvaturæ in $B = r$: & ſi fluxio ds ſive P p conſtans ſumatur, erit (126. *lib.* 1.) radius curvaturæ in P, ſeu P O $= \frac{ds\,dz}{ddy} = -\frac{ds\,dx}{ddy}$. Sed (ex dem.) B D eſt ad P S ut curvatura in B ad curvaturam in P, id eſt, ut radius curvaturæ in P ad radium curvaturæ in B, ſeu $a : a - x = -\frac{ds\,dx}{ddy} : r$. Quarè $raddy = xdxds - adxds$, & ſumptis fluentibus, additâ conſtante $Q\,ds$, fit $rady = \frac{1}{2}xxds - axds + Q\,ds$. Evaneſcente B M ſeu x, fit $dy = ds$, ſeu B P $=$ P M (*per cor.* 1. *Lem.* 7. *lib.* 1.) & æquatio in hanc abit $rads = Q\,ds$, ideòque conſtans $Q = ra$. Quare in quovis curvæ puncto P erit $rady\,[ra + \frac{1}{2}xx - ax]\,ds$. Ponatur $ax - \frac{1}{2}xx = bb$, ut ſit $rady = [ra - bb]\,ds$, & $rraady^2 = [ra - bb]^2 ds^2 = [ra - bb]^2 dy^2 + [ra - bb]^2 dx^2$; undè deducitur $[2rabb - b^4]\,dy^2 = [ra - bb]^2 dx^2$; & quia curva A B C ferè coincidit cum axe A C (per hyp.) ac ideò quantitas bb minima eſt reſpectu quantitatis ra in quâ radius curvaturæ] r maximus eſt, ſi conferatur cum a vel x æquatio in hanc abibit $2rabbdy^2 = rradx^2$, ex quâ eruitur $dy = \frac{r^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \times \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Ducatur in circulo altera ordinata m n priori M N proxima; & ex puncto N demittatur ad m n perpendiculum N t; evaneſcente M m, erit (ex naturâ circuli) N M : N D $=$ N t : N n, ſivè $\sqrt{2ax - xx} : a = dx : \mathrm{N} = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Eſt igitur $dy = \mathrm{Mn} \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, & ſumptis fluentibus $y = \mathrm{BN} \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, cui æquationi nihil addendum vel ſubducendum eſt, cum arcus B N, evaneſcente P M ſeu y evaneſcat. Verum ubi P M coincidit cum C D, ſeu ubi fit $y = \frac{1}{2} L$, eſt B N $=$ B N E, & propterea $\frac{1}{2} L = \mathrm{BNE} \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, atquè adeò $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{1}{2} L}{\mathrm{BNE}}$. Quarè in quolibet curvæ puncto P, eſt $y = \frac{\mathrm{BN} \times \frac{1}{2} L}{\mathrm{BNE}}$, & proindè $y : \frac{1}{2} L = \mathrm{BN} : \mathrm{BNE}$, hoc eſt, PM eſt ad C D ut arcus B N ad quadrantem B N E. Q. E. D.

302. *Cor.* 2. Quia P S eſt ad B D ſeu ad a, ut radius r ad radium P O, erit $PO \times PS = ar$. Sit diameter circuli ad circumferentiam ut 1 ad c & ideò a ad BNE ut 1 ad $\frac{1}{2}c$, ſeu $BNE = \frac{1}{2}ac$, & cum ſit (301) $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{1}{2}L}{BNE}$, erit $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{L}{ac}$ & $\frac{r}{a} = \frac{LL}{a^2c^2}$, & $r = \frac{LL}{ac^2}$; atquè $PO \times PS = ar = \frac{LL}{cc}$.

303. PROPOSITIO. *Si diameter circuli ſit ad circumferentiam ut* 1, *ad* c, *& chorda muſicæ uniformiter craſſæ longitudo ſit* L, *pondus* P, *pondus quo tenditur* G *& penduli in cycloide oſcillantis longitudo* D; *tempus quo chorda illa oſcillationem unam perficit, erit ad tempus unius oſcillationis penduli in ratione ſubduplicatâ* P L *ad* c c D G; *numerus verò oſcillationum chordæ tempore unius oſcillationis penduli erit* $c\sqrt{\frac{DG}{LP}}$.

Nam vis quâ particula P p in loco P, exiſtens urgetur dicatur A, ejuſdem pondus B & (*per dem.* 199) erit A ad G, ut P p ad P O, & ob uniformem chordæ craſſitudinem eſt P ad B, ut L ad P p, & his rationibus conjunctis, $P \times A$ ad $B \times G$ ut L, ad P O; undè fit A ad B ut $G \times L$ ad $PO \times P$. Jam ſi particula P p vi motrice ceu pondere A ſollicitata oſcillaretur in cycloide cujus perimeter tota æquaret duplam diſtantiam P S, tempus unius vibrationis in cycloide æquale eſſet tempori vibrationis unius chordæ muſicæ ſeu particulæ P p; quia vis particulæ P p, in cycloide oſcillantis ſemper decreſcit in ratione diſtantiæ ejus à puncto infimo ſeu medio cycloidis, quemadmodum vis illa decreſcit in ratione diſtantiæ a puncto S cum particula P p vibrationes ſuas agit in rectâ P S, & vis motrix particulæ in puncto cycloidis altiſſimo æqualis eſt vi motrici A, (*per cor. prop.* 51. *lib.* 1.). Si verò particula P p pondere ſuo abſoluto B oſcilletur in cycloide cujus perimeter tota ſit 2 D, erit hujus penduli longitudo D (*per cor. prop.* 50. *lib.* 1.), & tempus unius vibrationis chordæ muſicæ erit ad tempus unius oſcillationis penduli in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione longitudinis P S ad longitudinem D, & ſubduplicatâ ratione ponderis B ad vim A (*cor.* 5. *prop.* 24. *lib.* 2.); id eſt, in ratione ſubduplicatâ quantitatis $PO \times PS \times P$, ad quantitatem GLD, atque ideò ob $PO \times PS = \frac{LL}{cc}$ (202.) in ratione ſubduplicatâ PL ad $ccGD$. Q. D. E.

Quia verò numerus vibrationum iſochronarum quas chorda vel pendulum tempore quovis dato peragunt ſunt inversè ut oſcillationum tempora, erit numerus vibrationum quas chorda muſica tempore 303.
unius oſcillationis penduli prædicti peragit ad unitatem ut tempus unius oſcillationis penduli ad tempus unius vibrationis chordæ, ideoque in ratione ſubduplicatâ $ccGD$, ad PL, & proinde numerus vibrationum quas chorda muſica peragit eo tempore quo pendulum cujus longitudo eſt D ſemel oſcillatur eſt $c\sqrt{\frac{GD}{PL}}$. Q. E. D.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLII. Theor. XXXIII.

304. *Cor.* 1. Si longitudo chordæ L digitis pedis Pariſienſis exprimatur, numerus vibrationum quas chorda tempore minuti unius ſecundi peragit, erit $19{,}0341\sqrt{\frac{G}{PL}}$ quamproximè. Nam pendulum cujus longitudo D eſt pedum Pariſienſium 3 & linearum $8\frac{1}{2}$, ſeu digit. $\frac{881}{24}$, ſingulas oſcillationes tempore minuti unius ſecundi abſolvit (471. *lib.* 1.) & præterea ut 113 ad 355; ità diameter 1 ad circuli circumferentiam c, quæ proinde erit $\frac{355}{113}$. Quarè ſi loco D & c ſcribantur ipſorum valores in formulâ, erit $c\sqrt{\frac{GD}{PL}} = \frac{355}{113}\sqrt{\frac{881\,G}{24\,LP}} = 19{,}0341\sqrt{\frac{G}{PL}}$ quamproximè.

305. *Cor.* 2. Si conferantur variarum chordarum oſcillationes, quia quantitates c & D in formulâ $c\sqrt{\frac{GD}{PL}}$ datæ ſunt; numeri vibrationum dato tempore peractarum erunt ut $\sqrt{\frac{G}{PL}}$, & ideò tempora quibus

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLII. THEOR. XXXIII.

bus ſingulæ vibrationes fiunt ut $\sqrt{\frac{PL}{G}}$ (473 *lib.* 1.).

306. *Cor.* 3. Iiſdem poſitis, ſi prætereà chordæ ſint homogeneæ, æquè craſſæ & æquè tenſæ, cum in eo caſu pondus *G* datum ſit & pondus *P* ſit ut chordæ longitudo *L*, tempora quibus ſingulæ vibrationes fiunt, erunt ut $\sqrt{LL}$, ſeu ut chordarum longitudines; Quod experimentis confirmavit Clariſſ. *s'Graveſande* in Elem. Phyſices.

Scholion. Quæ de chordis vibrantibus huc uſque diximus, ea ferè omnia, nonnullis tamen immutatis, mutuati ſumus ex tractatu de methodo incrementorum Clariſſ. *Taylor.* Formulas noſtris ſimiles dedêre Celeberrimi Viri, *Sauveur* in Monumentis Acad. Pariſ. an. 1713. & *Daniel Bernoulli* tum in Actis Petropol. tum in Diſſertatione de Propagatione Lucis, ab Academiâ regiâ Pariſ. præmio condecoratâ an. 1736.

307. PROPOSITIO. *Si numeri vibrationum quas chordæ muſicæ dato tempore peragunt, ſint inter ſe ut numeri* 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, chordæ illæ tonos edent qui his notiſſimis vocibus ſignificantur, UT, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, *ut*, initio ſumpto à tono graviori. Hæc propoſitio experimentis demonſtrata eſt; nam nervi muſici homogenei, æquè craſſi eodemque pondere tenſi, quorum longitudines ſunt inversè ut numeri illi, tonos quos diximus edunt, & horum nervorum longitudines ſunt inversè ut numeri vibrationum quas dato tempore abſolvunt: & directè ut ſingularum vibrationum tempora ideoque ut 180, 160, 144, 135, 120, 108, 96, 90: (306).

308. *Cor.* Sonorum differentia ſecundùm *grave* & *acutum*, à minori vel majori numero vibrationum quas chordæ muſicæ dato tempore peragunt, pendet, & eò graviores ſunt ſoni quò tardiores ſunt ſingulæ chordarum vibrationes & contrà.

309. PROPOSITIO. *Corpora ſonora homogenea & ſimilia quorum latera homologa rationem habent inverſam numerorum* 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, *tonos edunt*, UT, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, *ut*. Hanc propoſitionem probant experimenta quæ in campanis, cylindris & priſmatibus homogeneis & ſimilibus habuerunt Merſennus in harmoniâ univerſali & D. Carré in monum. Acad. Reg. an. 1709.

310. PROPOSITIO. *Dum corpus ſonorum percutitur, tremulus particularum motus ex ictu & vi elaſticâ creatus, remotis obſtaculis, per ſuperficiem corporis propagatur*: quod quidem leviora chartæ fruſtula ſuperficiei corporis reſonantis impoſita, tremore ſuo indicant.

311. PROPOSITIO. *Campanæ figura ictu clavæ ità mutari oculis cernitur ut cum rotunda eſſet, fiat ovata & quandiù auditur ſonus, alternis mutatur oſcillationibus.*

312. *Cor.* Ex tribus ultimis propoſitionibus concludere licet, ut in chordis ita & in aliis corporibus reſonantibus, tonos pendere à numero vibrationum ſeu undulationum quæ dato tempore peraguntur.

PRO-

PROPOSITIO XLIII. THEOREMA XXXIV.

Corpus omne tremulum in medio elaſtico propagabit motum pulſuum undique in directum; in medio verò non elaſtico motum circularem excitabit.

Caſ. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, itu ſuo urgebunt & propellent partes medii ſibi proximas, & urgendo comprimiment eaſdem & condenſabunt; dein reditu ſuo ſinent partes compreſſas recedere & ſeſe expandere. Igitur partes medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad inſtar partium corporis illius tremuli: & quâ ratione partes corporis hujus agitabant haſce medii partes, hæ ſimilibus tremoribus agitatæ agitabunt partes ſibi proximas, eæque ſimiliter agitatæ agitabunt ulteriores, & ſic deinceps in infinitum. Et quemadmodum medii partes primæ eundo condenſantur & redeundo relaxantur, ſic partes reliquæ quoties eunt condenſabuntur, & quoties redeunt ſeſe expandent. Et propterea non omnes ibunt & ſimul redibunt (ſic enim determinatas ab invicem diſtantias ſervando, non rareſierent & condenſarentur per vices) ſed accedendo ad invicem ubi condenſantur, & recedendo ubi rareſiunt, (f) aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condenſatæ, ob motum ſuum progreſſivum, quo feriunt obſtacula, ſunt pulſus; & propterea pulſus ſucceſſivi à corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem diſtantiis, (g) ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus ſuis ſingulis ſingulos pulſus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant ſecundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulſus inde per medium propagati ſeſe dilatabunt ad latera, per propoſitionem præcedentem;

(f) *Aliquæ earum ibunt* (294).

(g) * *Ob æqualia temporis intervalla.* (300). 312.

tem; & à corpore illo tremulo tanquam centro communi, ſecundum ſuperficies propemodum ſphæricas & concentricis, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in undis, quæ ſi digito tremulo excitentur, non ſolum pergent hinc inde ſecundum plagam motus digiti, ſed, in modum circulorum concentricorum, digitum ſtatim cingent & undique propagabuntur. Nam gravitas undarum ſupplet locum vis elaſticæ.

Caſ. 2. (b) Quod ſi medium non ſit elaſticum: quoniam ejus partes à corporis tremuli partibus vibratis preſſæ condenſari nequeunt, propagabitur motus in inſtanti ad partes ubi medium facillimè cedit, hoc eſt, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas à tergo relinqueret. Idem eſt caſus cum caſu corporis in medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum; ſed in circulum eundo, pergit ad ſpatia quæ corpus relinquit à tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum priorem, medium inde repelletur & ad locum ſuum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non ſit firmum, ſed modis omnibus flexile, ſi tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus ſuis nequit medium ubivis urgere, quin alibi eidem ſimul cedat; efficiet ut medium, recedendo à partibus ubi premitur, pergat ſemper in orbem ad partes quæ eidem cedunt. *Q. E. D.*

Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium flammæ ad preſſionem, per medium ambiens, ſecundum lineas rectas propagandum conducere. Debebit ejuſmodi preſſio non ab agitatione ſolâ partium flammæ, ſed à totius dilatatione derivari.

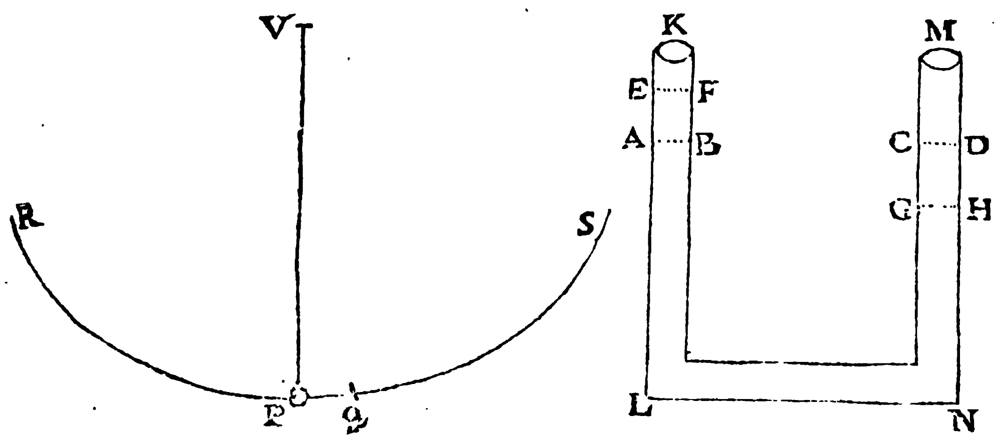
(b) * *Quod ſi medium* continuum ſit & *non elaſticum*, &c.

PRO-

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XXXV.

Si aqua in canalis cruribus erectis KL, MN *vicibus alternis aſcendat & deſcendat; conſtruatur autem pendulum cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis æquetur ſemiſſi longitudinis aquæ in canali: dico quod aqua aſcendet & deſcendet iiſdem temporibus quibus pendulum oſcillatur.*

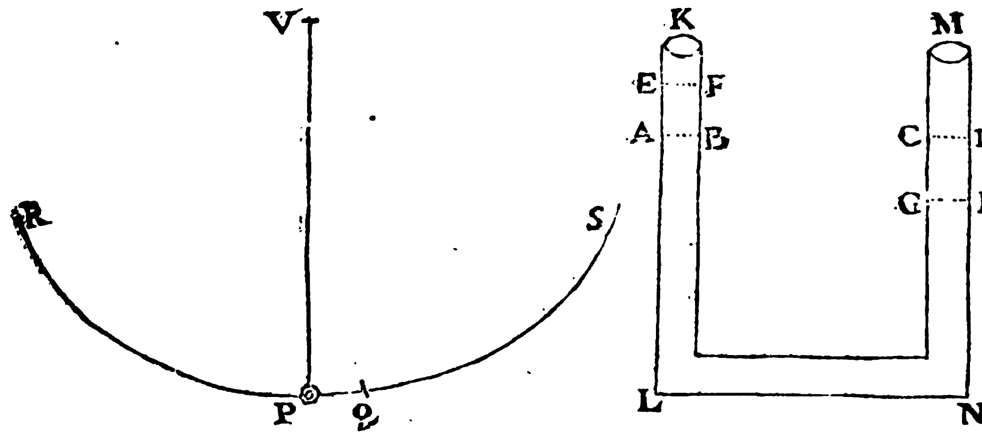
Longitudinem aquæ menſuro ſecundum axes canalis & crurum, eandem ſummæ horum axium æquando; & reſiſtentiam aquæ, quæ oritur ab attritu canalis, hic non conſidero. Deſignent igitur *AB*, *CD* mediocrem altitudinem aquæ in crure



utroque; & ubi aqua in crure *KL* aſcendit ad altitudinem *EF*, deſcenderit aqua in crure *MN* ad altitudinem *GH*. Sit autem *P* corpus pendulum, *VP* filum, *V* punctum ſuſpenſionis, *RPQS* cylois quam pendulum deſcribat, *P* ejus punctum infimum, *PQ* arcus altitudini *AE* æqualis. Vis, quâ motus aquæ alternis vicibus acceleratur & retardatur, eſt

 ex-

exceſſus ponderis aquæ in alterutro crure ſupra pondus in altero, ideoque, ubi aqua in crure *KL* aſcendit ad *EF*, & in crure altero deſcendit ad *GH*, (i) vis illa eſt pondus duplicatum aquæ *EABF*, & propterea eſt ad pondus aquæ totius. ut *AE* ſeu *PQ* ad (k) *VP* ſeu *PR*. Vis etiam, quâ pondus *P* in loco quovis *Q* acceleratur & retardatur in cycloide (*per corol. prop.* LI.) eſt ad ejus pondus totum, ut ejus diſtantia *PQ* à loco infimo *P*, ad cycloidis longitudinem *PR*. Quare aquæ & penduli, æqualia ſpatia *AE*, *PQ* deſcribentium, vires motrices ſunt ut pondera movenda; (l) ideoque, ſi aqua & pendulum in principio quieſcunt, vires illæ movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficientque ut motu reciproco ſimul eant & redeant. *Q. E. D.*



(i) * *Vis illa eſt pondus duplicatum &c.* Eſt enim vis illa pondus tam aquæ EABF, quam aquæ æqualis CGHD.

(k) * *Ad VP ſeu PR.* Semicyclois PR, æqualis eſt longitudini penduli, (*per cor. prop.* 50. *lib.* 1.).

(l) 313. * *Ideoque, ſi aqua & pendulum &c.* Id evidentiſſimum fit ſi pondus P quod, manente oſcillationis unius tempore poteſt ad arbitrium aſſumi, capiatur æquale ponderi aquæ totius in canali; tùm enim vires motrices, maſſæ movendæ, & ſpatia deſcribenda, ideòque & tempora quibus ſpatia illa deſcribuntur, in canali

Corol. 1. Igitur aquæ aſcendentis & deſcendentis, ſive motus intenſior ſit ſive remiſſior, vices omnes ſunt iſochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali ſit pedum *Pariſienſum* $6\frac{1}{9}$. aqua tempore minuti unius ſecundi deſcendet, & tempore minuti alterius ſecundi aſcendet; & ſic deinceps vicibus alternis in infinitum. (m) Nam pendulum pedum $3\frac{1}{18}$ longitudinis tempore minuti unius ſecundi oſcillatur.

Corol. 3. Auctâ autem vel diminutâ longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione ſubduplicatâ.

PROPOSITIO XLV. THEOREMA XXXVI.

Undarum velocitas eſt in ſubduplicatâ ratione latitudinum.

Conſequitur ex conſtructione propoſitionis ſequentis.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA X.

Invenire velocitatem undarum.

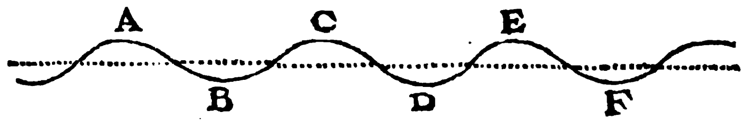
Conſtituatur pendulum cujus longitudo, inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis, æquetur latitudini undarum: & quo tempore pendulum illud oſcillationes ſingulas peragit, eodem undæ progrediendo latitudinem ſuam propemodum conficient.

Un-

nâli & in cycloïde æquantur reſpectivè. Sed obſervandum eſt ſuperficiem A B, eſſe locum æquilibrii, ad quem cum aqua pervenit, nullâ amplius vi acceleratrice urgetur, ſed velocitate tantum acquiſitâ ulteriùs deſcendit vel aſcendit; ſicuti corpus pendulum *P* dum pervenit in locum cycloidis infimum *P* ſolâ velocitate acquiſitâ movetur. Undè quo tempore aqua deſcenſum unum abſolvit in crure alterutro canalis, eodem tempore pendulum oſcillationem unam ex deſcenſu & aſcenſu compoſitam perficit, duas verò oſcillationes abſolvit intereadum aqua è loco E deſcendit & ad eundem redit. 313.

(m) * *Nam pendulum ped.* $3\frac{1}{18}$, ſeu ped. 3. & lin. 8. quamproximè (471. *lib.* 1). Clariſſ. *Hermanus* tom. 3. Comm. Acad. Petrop. motum aquæ in tubis crura quomodolibet ad baſim inclinata habentibus definivit. Rem generaliùs pertractavit Celeb. D. *Bernoullius* in Hydrodynamicâ. Hos authores, ſi lubet, adeat lector.

Undarum latitudinem voco menſuram tranſverſam, quæ vel vallibus imis, vel ſummis culminibus interjacet. Deſignet *ABCDEF* ſuperficiem aquæ ſtagnantis, undis ſucceſſivis aſcendentem ac deſcendentem; ſintque *A*, *C*, *E*, &c. undarum culmina, & *B*, *D*, *F*, &c. valles intermedii. Et quoniam motus undarum fit per aquæ ſucceſſivum aſcenſum & deſcenſum, ſic ut ejus partes *A*, *C*, *E*, &c. quæ nunc al-



tiſſimæ ſunt, mox fiant infimæ; & vis motrix, quâ partes altiſſimæ deſcendunt & infimæ aſcendunt, eſt pondus aquæ elevatæ; alternus ille aſcenſus & deſcenſus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, eaſdemque temporis leges obſervabit: & propterea (*per prop.* XLIV.) ſi diſtantiæ inter undarum loca altiſſima *A*, *C*, *E* & infima *B*, *D*, *F*, (n) æquentur duplæ penduli longitudini; partes altiſſimæ *A*, *C*, *E*, tempore oſcillationis unius evadent infimæ, & tempore oſcillationis alterius denuo aſcendent. Igitur inter tranſitum undarum ſingularum tempus erit oſcillationum duarum; hoc eſt, unda deſcribet latitudinem ſuam, quo tempore pendulum illud bis oſcillatur; ſed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla eſt, ideoque æquat undarum latitudinem, oſcillabitur ſemel. *Q. E. I.*

Co-

(n) * *Æquentur duplæ penduli longitudini.* Quoniam, ex dictis, unda percurrit latitudinem ſuam A C vel B D intereadum altitudo A transfertur in C, vel cavitas B in D, quod fieri non poteſt niſi aqua ab altitudine undarum deſcendat, & deindè ad eandem altitudinem aſcendat, & quia cavitas quæ eſt infrà aquæ quieſcentis ſuperficiem quam in figurà exhibet linea punctis diſtincta, eſt circiter æqualis elevationi aquæ ſuprà eandem ſuperficiem quæ eſt æquilibrii locus, patet (313) totius aquæ movendæ longitudinem æqualem eſſe longitudini cavitatis vel elevationis aquæ infrà vel ſuprà locum illum æquilibrii, ac proinde cum longitudo cavitatis vel elevationis illius æqualis ſit diſtantiæ A B, vel B C, pendulum cujus longitudo eſt $\frac{1}{2}$ A B vel $\frac{1}{2}$ B C,

ſemel

Corol. 1. Igitur undæ, quæ pedes *Pariſienſes* $3\frac{1}{18}$ latæ ſunt, (o) tempore minuti unius ſecundi progrediendo latitudinem ſuam conficient; ideoque tempore (p) minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, & horæ ſpatio pedes 11000 quamproximè.

(q) *Corol.* 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in ſubduplicatâ ratione latitudinis.

Hæc ita ſe habent ex hypotheſi quod partes aquæ rectà aſcendunt vel rectà deſcendunt; ſed aſcenſus & deſcenſus ille (r) verius fit per circulum, ideoque tempus hâc propoſitione non niſi quamproximè definitum eſſe affirmo.

PROP.

ſemel oſcillabitur eo tempore quo aqua aſcendit, & iterum oſcillabitur, intereadum aqua deſcendit (313.) atque ità oſcillabitur bis quo tempore unda deſcribit latitudinem ſuam. Quoniam igitur numeri oſcillationum quas pendula eodem tempore peragunt, ſunt in ratione ſubduplicatâ longitudinis pendulorum inversè (474. *lib.* 1.) pendulum cujus longitudo eſt ABCD, quadrupla longitudinis $\frac{1}{2}$ AB ſemel oſcillabitur quo tempore unda latitudinem ſuam percurrit. In undis verò latioribus quæ altiùs non elevantur, linea curva ABC, vix differt à rectâ AC, quæ eſt undæ latitudo, & propterea in eo caſu unda latitudinem ſuam deſcribit, intereadum pendulum cujus longitudo eſt recta AC, ſemel oſcillatur.

(o) * *Tempore minuti unius ſecundi* (471. *lib.* 1.)

(p) * *Tempore minuti unius primi.* Quia undarum datæ latitudinis velocitas æquabilis eſt (ex dem.) Si undæ latitudo data ped. $3\frac{1}{18}$, ducatur in tempus 60″, factum $183\frac{1}{3}$ ped. erit ſpatium quod unda tempore minuti unius primi ſeu minutorum ſecundorum 60, deſcribit & ducto 313.
rurſus hoc numero $183\frac{1}{3}$ in 60′, producetur ſpatium 11000 ped. quod unda tempore horæ unius conficit.

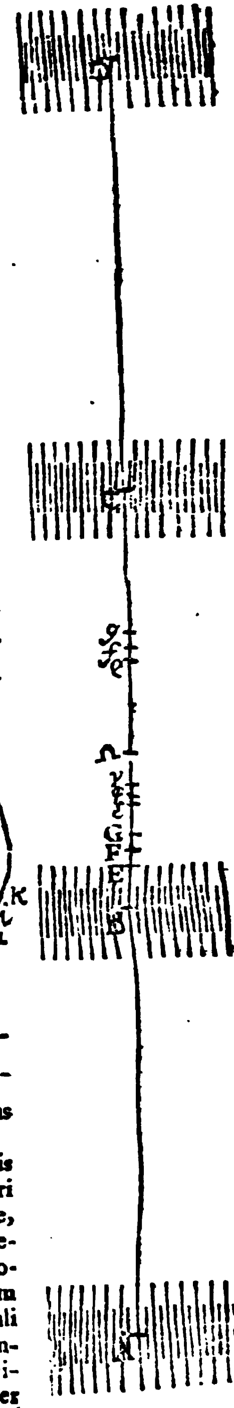
(q) * *Cor.* 2. Undarum velocitates ſunt ut earumdem latitudines directè & tempora quibus latitudines illas percurrunt inversè (5. *lib.* 1.) Sed tempora illa ſunt in ſubduplicatâ ratione latitudinum undarum ſeu longitudinum pendulorum quæ eo tempore quo undæ latitudines ſuas deſcribunt, ſemel oſcillantur (472. *lib.* 1.). Undarum igitur velocitates ſunt in ratione compoſitâ ex ratione latitudinum directè & ratione ſubduplicatâ earumdem latitudinum inversè, ideòque ſunt in ratione ſubduplicatâ latitudinum directè.

(r) * *Veriùs fit per circulum*, ſeu per arcum curvilineum qui magis accedit ad figuram arcûs circularis quàm ad figuram canalis rectilinei in quo aqua, rectà aſcendit & deſcendit.

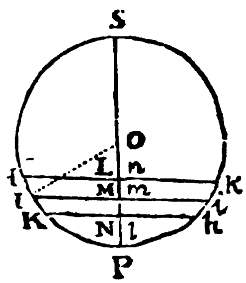
De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLVII. Theor. XXXVII.

PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

Pulſibus per fluidum propagatis, ſingulæ fluidi particulæ, motu reciproco breviſſimo euntes & redeuntes, accelerantur ſemper & retardantur pro lege oſcillantis penduli.



Deſignent *AB*, *BC*, *CD*, pulſuum ſucceſſivorum æquales diſtantias; *ABC* plagam motus pulſuum ab *A* verſus *B* propagati; *E*, *F*, *G* puncta tria phyſica (f), medii quieſcentis in rectâ *AC* ad æquales ab invicem diſtantias ſita; *Ee*, *Ff*, *Gg* ſpatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco (t) ſingulis vibrationibus eunt & redeunt; ϵ, φ, γ loca quævis intermedia eorundem punctorum; & *EF*, *FG* lineolas phyſicas ſeu medii partes lineares punctis illis interjectas, & ſucceſſivè tranſlatas in loca $\epsilon\varphi$, $\varphi\gamma$ & *ef*, *fg*. Rectæ *Ee* æqualis ducatur recta *PS*. Biſecetur eadem in *O*, centroque *O* & intervallo *OP* deſcribatur circulus *SIPi*. Per hujus circumferentiam totam cum partibus ſuis exponatur tempus totum vibrationis unius cum ipſius partibus pro-por-



(f) * *Medii quieſcentis*, id eſt, nondum agitati vibrationibus corporis tremuli, aut indè productis aëris pulſibus.

(t) 314. * *Singulis vibrationibus eunt & redeunt.* Si corporis tremuli aut chordæ muſicæ oſcillantis particula incipiat moveri in E, & eundo ſecum transferat medii punctum E, in locum e, & deindè particula illa chordæ muſicæ vi propriâ & punctum e, medii inter e, & C compreſſi ac condenſati dilatatione redeant in locum E, unicus in medio elaſtico pulſus ſecundum directionem BC. producetur, & ſingulis aliis vibrationibus corporis tremuli vel chordæ muſicæ ex itu & reditu compoſitis, ſinguli excitabuntur pulſus (*prop.* 43.) atquè adeò pulſus latitudinem ſuam deſcribit intereadum punctum E, vibrationem unam ex itu & reditu per breviſſimum ſpatium Ee, compoſitam, abſolvit.

portionalibus; ſic ut completo tempore quovis PH vel $PHSh$, ſi demittatur ad PS perpendiculum HL vel hl, & capiatur $E\epsilon$ æqualis PL vel Pl, punctum phyſicum E reperiatur in ϵ. Hâc lege punctum quodvis E, eundo ab E per ϵ ad e, & inde redeundo per ϵ ad E, iiſdem accelerationis ac retardationis gradibus vibrationes ſingulas peraget (u) cum oſcillante pendulo. Probandum eſt quod ſingula medii puncta phyſica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur medium tali motu à causâ quâcunque cieri, & videamus quid inde ſequatur.

In circumferentiâ $PHSh$ capiantur æquales arcus HI, IK vel hi, ik, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ EF, FG ad pulſuum intervallum totum BC. Et demiſſis perpendiculis IM, KN vel im, kn; quoniam puncta E, F, G motibus ſimilibus ſucceſſivè agitantur, & vibrationes ſuas integras ex itu & reditu compoſitas interea peragunt dum pulſus transfertur à B ad C; ſi PH vel $PHSh$ ſit tempus ab initio motûs puncti E, (x) erit PI vel $PHSi$ tempus ab initio motûs puncti F, & PK vel $PHSk$ tempus ab initio motûs puncti G; & propterea $E\epsilon$, $F\varphi$, $G\gamma$ erunt ipſis PL, PM, PN in itu punctorum vel ipſis Pl, Pm, Pn in punctorum reditu, (y) æquales reſpectivè. Unde $\epsilon\gamma$ ſeu $EG + G\gamma - E\epsilon$ in itu punctorum æqualis erit $EG - LN$, in reditu autem æqualis $EG + ln$. (z) Sed $\epsilon\gamma$ latitudo eſt ſeu ex-

(u) * *Cum oſcillante pendulo.*. (prop. 52. lib. 1.).

(x) * *Erit P I vel P H S I.* Quoniam puncta E, F, G, & alia deinceps, motibus ſimilibus per medii compreſſionem & dilatationem communicatis ſucceſſivè agitantur, pulſus per æqualia ſpatia E F, F G &c. æqualibus temporibus propagatur, ideòque tempus quo transfertur ab E ad F, vel ab F ad G, eſt ad tempus totum quo transfertur à B ad C, & quo ſingula puncta E, F, G vibrationes ſuas integras ex itu & reditu compoſitas perficiunt, ut ſpatium E F vel F G ad ſpatium B C, in quâ ratione etiam eſt arcus H I, vel I K, ad totam circumferentiam P H S P, (*per hyp.*) quæ tempus totum quo pulſus à B ad C transfertur, exponit, & differentia inter tempus ſumptum ab initio motûs puncti E & tempus ſumptum ab initio motûs puncti F, eſt tempus illud quod pulſus transfertur ab E ad F. Quare *ſi P H vel P H S h exponat tempus ab initio motûs puncti E, P I vel P H S I, exponet tempus ab initio motûs puncti F*, cum H I vel h i exponat differentiam inter tempus ab initio motûs puncti E, & tempus ab initio ſimilis motûs puncti E, &c. 324

(y) * *Æquales reſpectivè.* (per prop. 52. vel 38. lib. 1.)

(z) * *Sed $\epsilon\gamma$ eſt latitudo ſeu expanſio partis medii E G, in loco $\epsilon\gamma$*, quia punctum E tranſlatum eſt in locum ϵ, & punctum G in locum γ.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLVII. Theor. XXXVII.

expanſio partis medii EG in loco $\epsilon\gamma$; & propterea expanſio partis illius in itu eſt ad ejus expanſionem mediocrem, ut $EG - LN$ (a) ad EG; in reditu autem ut $EG + ln$ ſeu $EG+LN$ ad EG. Quare (b) cùm ſit LN ad KH ut IM ad radium OP, & (c) KH ad EG ut circumferentia $PHShP$ ad BC, id eſt, ſi ponatur V pro radio circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo pulſuum BC, (d) ut OP ad V; & ex æquo LN ad EG ut IM ad V: erit expanſio partis EG punctive phyſici F in loco $\epsilon\gamma$ ad expanſionem mediocrem, quam pars illa habet in loco ſuo primo EG, (e) ut $V - IM$ ad V in itu, utque $V + im$ ad V in reditu. Unde vis elaſtica puncti F in loco $\epsilon\gamma$ (f) eſt ad vim ejus elaſticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{1}{V-IM}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu, in reditu verò ut $\frac{1}{V+im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento vires elaſticæ punctorum phyſicorum E & G in itu, ſunt ut $\frac{1}{V-HL}$ & $\frac{1}{V-KN}$ ad $\frac{1}{V}$; (g) & virium differentia ad medii vim elaſticam mediocrem, ut $\frac{HL-KN}{VV - V\times HL - V\times KN + HL\times KN}$ ad $\frac{1}{V}$. Hoc eſt, ut

(a) * *Ad E G.* Nam cùm E, F, G ſint puncta tria medii quieſcentis ſeu motu impreſſo nondum condenſati vel rarefacti, expanſio medii in loco E G, mediocris ſeu quaſi media eſt inter minimam ipſius expanſionem in locis pulſuum denſiſſimis, & maximam in locis rariſſimis.

(b) 315. * *Cùm ſit L N ad K H.* Anguli ad centrum I O P menſura eſt arcus I P æqualis dimidio arcui I P i, ſeu K P k, & anguli ad circumferentiam K H k, menſura eſt etiam dimidius arcus K P k, & ideò anguli I O P & K H L, æquales ſunt. Hinc ſi ex puncto K, demiſſum intelligatur ad H L, perpendiculum æquale L N, hoc perpendiculum cum ordinatarum H L & K N differentiâ & cum arcu minimo K H triangulum conſtituet ſimile triangulo I O M. Eſt igitur L N ad K H, ut I M ad I O ſeu O P.

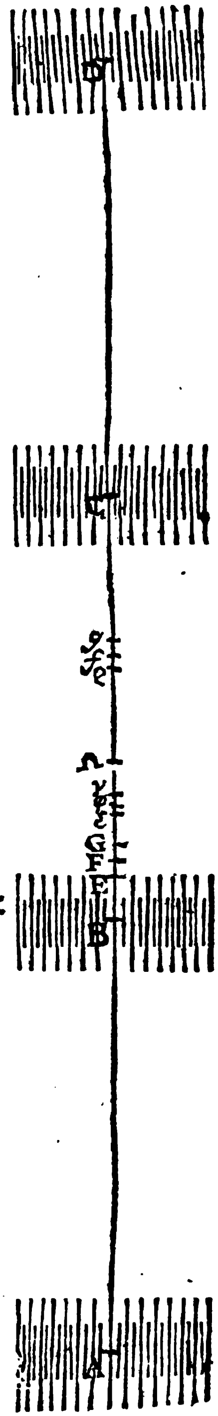
(c) * *Et K H ad E G.* (per hyp. ſuprà).

(d) * *Ut O P ad V.* Sunt enim circulorum peripheriæ P H S P & B C radiis ſuis O P & *V* proportionales.

(e) * *Ut V — I M ad V.* Quia enim (*ex dem.*) $LN = \frac{EG\times IM}{V}$, erit $EG - LN = \frac{V\times EG - IM\times EG}{V}$, & hinc E G — L N ad E G ut *V* — I M ad *V*. Et ſimiliter ob L N = l n, & I M = i m, erit E G + l n ad E G ut *V* + i m ad *V*.

(f) * *Eſt ad vim ejus elaſticam &c.* Hic ſupponit NEWTONUS vim elaſticam medii denſitati proportionalem, quam quidem hypotheſim in aëre noſtro, cæteris paribus, quamproximè veram eſſe experimentis conſtat. At, datâ medii maſſâ, denſitas eſt ut expanſio ſeu volumen inversè; Quarè cùm hic data ſit maſſa medii in volumine E G vel $\epsilon\gamma$, contenti, vis elaſtica eſt ut expanſio reciprocè & *ideò vis elaſtica puncti F, in loco* $\epsilon\gamma$, *&c.*

(g) * *Et virium differentia*, id eſt; ex-

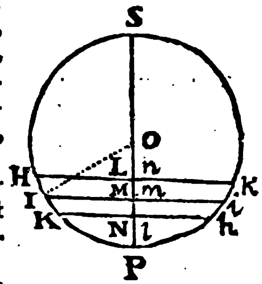


De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLVII. Theor. XXXVII.

$\frac{HL-KN}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$, ſive ut $HL-KN$ ad V, ſi modo (ob [h] anguſtos limites vibrationum) ſupponamus HL & KN indefinitè minores eſſe quantitate V. Quare cùm quantitas V detur, differentia virium eſt ut $HL-KN$, hoc eſt (ob [i] proportionales $HL-KN$ ad HK, & OM ad OI vel OP, dataſque HK & OP) ut OM; id eſt, ſi Ff biſecetur in Ω ut $\Omega\varphi$. [k] Et eodem argumento differentia virium elaſticarum punctorum phyſicorum ε & γ, in reditu lineolæ phyſicæ $\varepsilon\gamma$ eſt ut $\Omega\varphi$. Sed differentia illa (id eſt, exceſſus vis elaſticæ puncti ε ſupra vim elaſticam puncti γ)

exceſſus vis elaſticæ puncti E, ſuprà vim elaſticam puncti G erit ad medii vim elaſticam mediocrem &c.

(h) * *Ob anguſtos limites vibrationum.* Quoniam eo tempore quo punctum G vibrationem unam ex itu & reditu per breviſſimum ſpatium Ee compoſitam abſolvit & quo pulſus transfertur à B ad C, innumeræ ferè medii particulæ per medii compreſſionem & dilatationem ſucceſſivè agitantur, ſpatium illud Ee, ſeu æquale PS, perbreve erit, ſi conferatur cum pulſuum intervallo BC, aut etiam cum radio V circuli qui circumferentiam habet æqualem BC. Rectè igitur ſupponitur, quantitate HL & KN, longè minores eſſe quantitates V. 315.



(i) * *Ob proportionales.* Liquet (per not. 215.) eſſe HL—KN ad HK, ut eſt OM ad OI vel OP, undè $HL-KN = \frac{HK \times OM}{OP}$, & ideò ob datum radium OP, datumque arcum HK, qui eſt ad datam FG ut peripheria data PHSP ad datam BC, erit HL—KN ut variabilis OM. Sed $Ff = PS$, $F\varphi = PM$, & propterea ſi Ff biſecetur in Ω, ut ſit $OP = F\Omega$, erit $OM = \varphi\Omega$. Eſt igitur HL—KN ut $\varphi\Omega$.

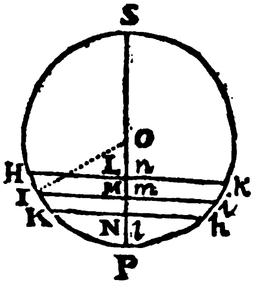
(k) * *Et eodem argumento.* Nam in reditu, vis elaſtica puncti F in loco $\varepsilon\gamma$ eſt ad vim ejus elaſticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{1}{V+im}$, ad $\frac{1}{V}$, & vires elaſticæ punctorum phyſicorum G & E, in loco $\varepsilon\gamma$, ſunt ut $\frac{1}{V+hl}$, & $\frac{1}{V+kn}$, ad $\frac{1}{V}$, & virium differentia ad medii vim elaſticam mediocrem ut $\frac{kn-hl}{VV+V\times hl+V\times kn+hl\times kn}$, ad $\frac{1}{V}$, hoc eſt, ut $\frac{kn-hl}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$ ſivè ut kn—hl ad V, &c.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLVII. Theor. XXXVII.

(l) eſt vis quâ interjecta medii lineola phyſica $\epsilon\gamma$ acceleratur in itu & retardatur in reditu; & propterea vis acceleratrix phyſica $\epsilon\gamma$, eſt ut ipſius diſtantia à medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (*per prop.* XXXVIII. *lib.* I.) rectè exponitur per arcum PI; & medii pars linearis $\epsilon\gamma$ lege (m) præſcriptâ movetur, id eſt, lege oſcillantis penduli: eſtque par ratio partium omnium linearium ex quibus medium totum componitur. *Q.E.D.* (†)

(l) * *Eſt vis quâ interjecta lineola.* Medium in ϵ & in γ vi ſuâ elaſticâ ſeſe dilatare in plagas oppoſitas C & B nititur, his viribus interjecta lineola phyſica $\epsilon\gamma$, ſeu punctum phyſicum ϕ, urgetur in utramque plagam, & exceſſu vis elaſticæ in ϵ, ſuprà vim elaſticam in γ, acceleratur in itu & retardatur in reditu.

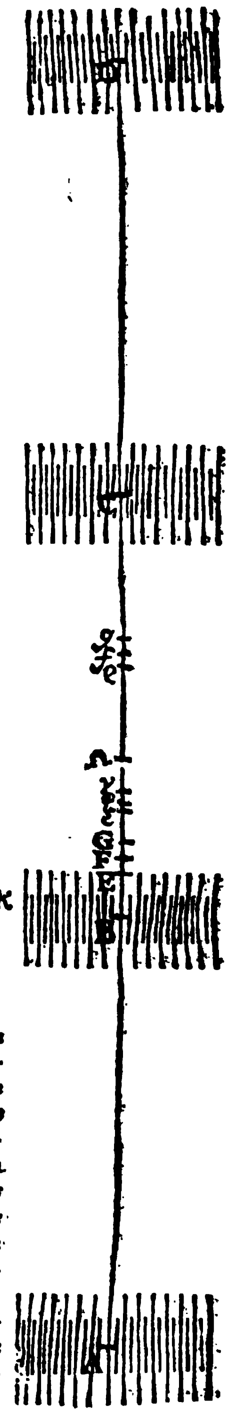
(m) * *Lege præſcriptâ movetur.* Demonſtratum eſt quod ſi punctum phyſicum E ad legem oſcillantis penduli moveatur, uti ſi vibrationibus partium corporis tremuli aut nervi muſici (quemadmodum in not. 314. expoſuimus) agitetur, tùm ſolâ vi elaſticâ medii punctum phyſicum F, & alia deindè puncta ſecundum eandem legem oſcillantis penduli ſucceſſivè movebuntur.



(†) *Jam pridem Vir Acutiſſimus* Eulerus, *hanc* NEWTONI *Theoriam ſuſpectam habuit, aliamque formulam dedit quâ ſoni celeritatem determinaret à* Newtonianâ *diverſam, ſed ſuæ formulæ demonſtrationem, aut vitium* Newtonianæ, *palam non fecit, quod ſciamus; Obſervationes ſuas hanc in rem nobis communicavit Vir Doctiſſimus* GABRIEL CRAMER, *Vir in his rebus expertiſſimus, ſagaciſſimique ingenii, quas ſuâ cum veniâ, publici juris facimus, quaſque Doctorum attentione digniſſimas credimus; Certè planiſſimè oſtendit aliquod ſubreptionis vitium in hac Demonſtrandi formâ, quam* NEWTONUS *adhibet, latere; ſcilicet demonſtrationem ipſam non ex rei naturâ, ſed ex Hypotheſi aſſumptâ fluere. Ipſi verò motus aëris ſecundùm methodum* Newtonianam *aſſequi conabimur, nam ipſam ejus propoſitionem veram eſſe, etſi ejus demonſtratio vitio quodam laboret, perſuaſum habemus, ſed eam ex naturâ motûs puncti Elaſtici ſonori eſſe deducendam, potius quàm ex motibus aëris, qui variis modis pro ratione agitationis ipſi impreſſæ peragi poſſent. Hæc autem ſunt Viri Illuſtriſſimi verba.*

Propoſitio XLVII. Lib. II. Princip. Philoſ. NEWTONI, minus firmâ demonſtratione nititur, ut ex eo patet, quod ſi diverſæ prorſus concluſioni demonſtrandæ applicetur, eodem ſucceſſu gaudeat. Id ego cùm pluribus diverſis tentaſſem modis, lubet unum, exempli gratiâ, apponere. Sit, verbi causâ, hoc Theorema à *Newtoniano* omnino diverſum, eâdem tamen Demonſtratione munitum.

Pulſi-



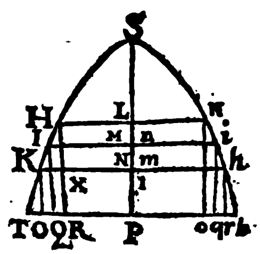
PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

315.

Pulſibus per Fluidum elaſticum propagatis, ſingulæ Fluidi particulæ, motu uniformiter retardato & accelerato euntes & redeuntes, oſcillantur pro lege Gravis aſcendentis & deſcendentis.

Deſignent AB, BC, CD, &c. pulſuum ſucceſſivorum æquales diſtantias, ABC plagam motus pulſuum ab A verſus B propagati, E, F, G, puncta tria Phyſica medii quieſcentis in recta BC ad æquales diſtantias ſita, Ee, Ff, Gg, ſpatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu uniformiter retardato moventur; ε, φ, γ, loca quævis intermedia illorum punctorum, & EF, FG lineolas phyſicas ſeu partes medii lineares punctis illis interjectas & ſucceſſivè tranſlatas in loca εφ, φγ, & ef, fg. Rectæ Ee æqualis ducatur recta PS, quâ tanquam axe deſcribatur parabola SHIK. Per baſim Tt exprimatur totum tempus unius vibrationis, & per ejus partes, partes temporis proportionales exprimantur, ſic ut completo tempore quovis TR, vel Tr, ſi erigatur normalis RH aut rh, & capiatur Eε æqualis RH vel PL, aut rh vel Pl, punctum Phyſicum E reperiatur in ε. Hâc lege punctum quodvis E eundo ab E per ε ad e, & inde redeundo per ε ad E, iiſdem retardationis & accelerationis gradibus vibrationem unam peraget cum aſcendente & deſcendente Corpore gravi. Probandum eſt quod ſingula medii puncta phyſica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur medium tali motu à cauſa quâcunque cieri, & videamus quid inde ſequatur.

In rectâ Tt, ſumantur æquales partes OQ, QR, vel oq, qr, eam habentes rationem ad rectam totam Tt, quam habent æquales rectæ EF, FG ad pulſuum intervallum BC; Et erectis OK, QI, RH, vel ok, qi, rh: demiſſis etiam ſi placet KN, IM, HL; kn, im, hl; quoniam puncta E, F, G, motibus ſimilibus ſucceſſive agitantur, & vibrationes ſuas integras itu & reditu compoſitas interea peragunt dum pulſus transfertur ex B ad C, ſi TR vel Tr ſit tempus ab initio motûs puncti E, erit TQ vel Tq tempus ab initio motûs puncti F, & TO vel To, tempus ab initio motûs puncti G; & propterea Eε, Fφ, Gγ, erunt ipſis RH, vel PL, QI vel PM, & OK vel PN in itu punctorum, vel ipſis rh aut Pl, qi aut Pm, & ok vel Pn in reditu æquales reſpective: Unde εγ ſeu EG + Gγ − Eε in itu punctorum æqualis erit EG − LN: in reditu autem æqualis EG + ln. Sed εγ latitudo eſt ſeu expanſio partis medii EG in loco εγ, & propterea expanſio partis illius in itu, eſt ad ejus expanſionem mediocrem ut EG − LN ad EG; in reditu autem ut EG + ln ſeu EG + LN ad EG. Quare cum ſit LN ſeu HX ad KX ſeu OR, ut LM ad ſemiparametrum Parabolæ, & OR ad EG ut Tt ad BC, id eſt (ſi ponatur V ad ſemiparametrum ut BC ad Tt, vel ſi ſit Tt æqualis ſemiparametro & V æqualis BC) ut ſemiparameter ad V, & ex æquo LN ad EG ut IM ad V; erit expanſio





partis EG punctive Phyſici F in loco εγ ad expanſionem mediocrem quam pars illa habet in loco ſuo primo EG, ut V − IM ad V in itu, utque V + im ad V in reditu. Unde vis elaſtica puncti F in loco εγ eſt ad vim ejus elaſticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{1}{V-IM}$ ad $\frac{1}{V}$ in

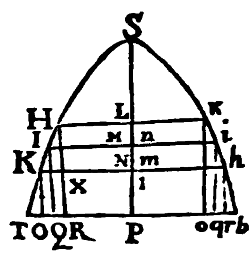
DE MOTU CORPORUM LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

itu, in reditu verò ut $\frac{1}{V+im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento itus punctorum phyſicorum E & G in itu ſunt ut $\frac{1}{V-HL}$ & $\frac{1}{V-KN}$ ad $\frac{1}{V}$, & virium differentia ad vim elaſticam mediocrem, ut $\frac{KN-HL}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ ad $\frac{1}{V}$, hoc eſt, ut $\frac{KN-HL}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$ ſive ut KN — HL ad V, ſi modo (ob anguſtos limites Vibrationum) ſupponamus HL & KN indefinite minores eſſe quantitate V. Quare cùm quantitas V detur, differentia virium eſt ut KN — HL ſeu KX, ſeu OR, hoc eſt, ob proportionales OR, EF, & Tt, BC, (dataſque EF, Tt & BC) conſtans. Et eodem argumento, differentia virium punctorum phyſicorum ε & γ in reditu lineolæ phyſicæ εγ eſt etiam conſtans. Sed differentia illa (id eſt, exceſſus vis elaſticæ puncti ε ſupra vim elaſticam puncti γ) eſt vis qua interjecta medii lineola phyſica acceleratur aut retardatur, & propterea vis acceleratrix lineolæ phyſicæ εγ eſt conſtans. Propterea tempus rectè exponetur per ordinatam IM & medii pars linearis εγ lege præſcripta movetur, id eſt, lege aſcendentis deſcendentiſque Gravis, eſtque par ratio omnium linearum ex quibus medium totum componitur. Q. E. D.

Sed (quod ſanè mirum) Prop. XLIX. in quâ ex ſua hypotheſi NEWTONUS Soni velocitatem computat, eandem dabit concluſionem in noſtra, &, ut arbitror, in aliâ quâcunque. Sic

Fingamus medium ab incumbente pondere, pro more aëris noſtri, comprimi, ſitque A altitudo medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens & cujus denſitas eadem ſit cum denſitate medii compreſſi in quo pulſus propagatur. Et quo tempore corpus cadet ex altitudine æquali dimidio ipſius A eodem tempore pulſus percurret ſpatium æquale toti altitudini A. (Id quod congruit cum Corol. 1. dictæ Prop. XLIX.)

Nam ſtantibus quæ in Propoſ. XLVII. conſtructa ſunt, ſi linea quævis phyſica ſingulis vibrationibus deſcribendo ſpatium PS urgeatur in itu & reditu à vi Elaſtica quæ ipſius ponderi, æquetur, peraget ſemivibrationem quo tempore corpus cadet ex altitudine PS, adeoque vibrationem, quo tempore corpus grave caderet ex altitudine 4 PS. Quare, cùm tempora deſcenſus ſint in ſubduplicata ratione longitudinum percurſarum, fiet tempus vibrationis unius ad tempus deſcenſus ex altitudine $\frac{1}{2}$ A, in ſubduplicatâ ratione longitudinis 4 PS ad $\frac{1}{2}$ A, ſeu 8 PS ad A. Sed vis quâ in ſingulis punctis urgetur particula EG erat ad ejus vim mediocrem elaſticam, ut KN — HL ſeu KX vel OR ad V, & vis illa mediocris, hoc eſt pondus incumbens quo lineola EG comprimitur, eſt ad pondus lineolæ EG, ut A ad EG, adeoque ex æquo, vis quâ lineola EG in ſingulis punctis urgetur, eſt ad ejus pondus, ut OR × A ad EG × V, ſeu ut ſemiparameter in A, ad VV (eſt enim OR ad EG ut Tt ad BC, atque ideo ut ſemiparameter ad V) vel ut 8 PS × A ad BC², ob V q ad BC q ut ſemiparametri





quadratum ad Tt quad. (atque ideo ut 8 PS ad ſemiparametrum.) Quare cùm tempora quibus æqualia corpora per æqualia ſpatia impelluntur, ſint reciproce in ſubduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illa Elaſtica, ad tempus unius vibrationis urgente

vi ponderis, in ſubduplicatâ ratione BC^2 ad $8PS+A$. Atque adeo ad tempus deſcenſûs ex altitudine $\frac{1}{2}A$, in ſubduplicatâ ratione BC^2 ad $8PS+A$ & ſubduplicata ratione $8PS$ ad A, hoc eſt in ratione integra BC ad A. Sed tempore unius vibrationis pulſus progrediendo conficit latitudinem ſuam BC. Ergo tempus quo pulſus percurrit ſpatium BC eſt ad tempus deſcenſûs ex altitudine $\frac{1}{2}A$, ut BC ad A. Tempus autem quo pulſus percurrit ſpatium A eſt ad tempus quo percurrit ſpatium BC, ut A ad BC, adeoque æquale tempori deſcenſus ex altitudine $\frac{1}{2}A$.

Hic notandum, quod abſurda ſit, & facilè refutanda hypotheſis hîc aſſumpta, quod nempe pulſus propagetur, particulis euntibus & redeuntibus pro lege gravis aſcendentis & deſcendentis. Verùm id ipſum eſt quod Demonſtrationem NEWTONIANAM evertit, oſtendendo nimirum eam ipſam abſurdæ hypotheſi probandæ æque inſervire.

Hactenus Vir Doctiſſimus; ſequuntur ea quibus reſtitui poſſe Newtonianam *demonſtrationem credimus.*

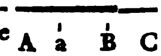
De Motibus in fluido Elaſtico genitis.

1. *Hypotheſis.* Suppono medium Elaſticum conſtare punctis, quantitate exiguâ ſed finitâ à ſe diſſitis, & vi repulſivâ donatis quæ diſtantiæ illorum punctorum ſit reciproce proportionalis; nec ad alia puncta præter ea quæ immediatè proxima ſunt ſeſe extendit: Hoc enim modo quæcumque ſit partium medii Elaſtici natura, ſatis feliciter repræſentantur effectus qui ex eorum Elaterio pendent.

2. *Cor.* 1. Medii Elaſtici ſtatus naturalis eſt ut puncta ejus Elaſtica à ſe mutuò æqualiter diſtent.

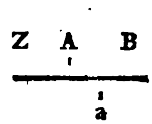
3. *Cor.* 2. Puncta elaſtica velocitatem finitam ſuſcipere poſſunt vel per immediatum contactum corporis moti, velocitate ſuâ finitâ punctum elaſticum urgentis vel per actionem continuatam vis repulſivæ punctorum elaſticorum ſi ab unâ parte fortior ſit quàm ab aliâ. Reliquas cauſas motus, ut gravitatem, vires centrales &c. hic non conſideramus.

4. *Theor.* 1. Si velocitas finita quomodocumque excitetur in puncto Elaſtico, diſtantiæ ejus à proximo puncto verſus quod movetur minuetur finitâ quantitate antequam in reliquo medio factus ſit ullus motus ullaque compreſſio: Sint A, B, C, tria puncta medii Elaſtici æquidiſtantia moveatur A verſus B velocitate finitâ, & tempore infinitè parvo deſcribat ſpatium infinitè parvum primi ordinis A a, Vis motrix puncti B erit differentia virium repulſivarum puncti A & C, eſt autem vis repulſiva puncti A ubi pervenit in a, ad vim puncti C (ſi immotum ſupponatur) ut BC ad Ba, & dividendo vis motrix puncti B, ad vim repulſivam puncti C, ut $BC - Ba$ ($= Aa$) ad Ba. Sed Aa, eſt infinite parvum ex Hypotheſi & Ba eſt finita quantitas, ergo vis motrix puncti B, eſt infinite parva vis reſpectu vis repulſivæ puncti C, quæ vis repulſiva pro ipſa vi naturali elaterii aſſumi poteſt; Vis autem Elaſticitatis eſt ex genere preſſionum, tempore infinitè parvo velocitatem infinitè parvam generaret, quæ velocitas infinite parva durante tempore infinitè parvo, ſpatium infinitè parvum ſecundi ordinis deſcribere faceret: Ergo ſiquidem vis motrix puncti B hujus vis reſpectu eſt infinitè parva, tempore infinitè parvo ſpatium infinitè parvum duntaxat tertii ordinis deſcribere faceret; nullus ergo motus in puncto B generabitur niſi ſpatium deſcriptum A a ſit finita quantitas, nulla ergo erit compreſſio inter puncta B & C. Q. E. D.

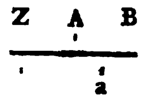


5. *Cor.* 1. Nullus ergo motus ex puncto medii Elaſtici in punctum proximum transfertur niſi poſt tempus finitum, nam ſpatium finitum A a, nonniſi tempore finito percurri poteſt per velocitatem finitam.

6. *Cor.* 2. Et velocitas finita in puncto Elaſtico excitata non mutabitur niſi poſt tempus finitum & poſtquam quantitate finitâ proceſſerit. Sint enim medii particulæ Z, A, B, procedat punctum A velocitate finitâ utcumque in id punctum



ctum producta, & tempore infinitè parvo deſcribat ſpatium infinitè parvum A a, vis quâ ſiſtetur ea velocitas orietur ex differentia virium Elaſticarum puncti Z & puncti B, eſtque vis puncti B ad vim puncti Z ut A B + A a ad A B — A a, & dividendo. Vis ſiſtens punctum A ad vim puncti Z, ut 2 A a ad A B — A a, ſed A a eſt infinitè parvum reſpectu quantitatis A B — A a; ergo, vis ſiſtens punctum A eſt infinitè parva, reſpectu vis puncti Z, quæ eſt vis elaterii naturalis, ideo (eodem modo ac in Theorematis demonſtratum fuit) probabitur, vim illam tempore infinitè parvo ſpatium infinitè parvum tertii ordinis producturam:



Quare etiamſi ſingula puncta à parte B poſitâ æquali vi agerent eorumque numerus infinitus foret, vires illæ omnes non niſi ſpatium infinitè parvum ſecundi ordinis infinitè parvo tempore ex ſpatio A a eodem tempore deſcripto detraherent, maneret itaque idem, velocitates ergo puncti A non mutabitur ex actione omnium punctorum medii Elaſtici, niſi poſt tempus finitum & poſtquam finita quantitate proceſſerit.

7. *Cor.* 3. Si conſiderentur innumera puncta Elaſtica ordine in lineâ rectâ poſitâ,

Ȧ Ḃ Ċ Ḋ Ė &c.

nec attendatur ad alia quæ circumquaque ſolidum ſpatium conſtituunt, ſi unum velocitate finitâ quâcumque ex causâ urgeatur, quæ conſtans in eo maneat, quoddam tempus finitum requiretur ut eadem velocitas in proximo puncto excitetur, paulo longius tempus ut in tertio producatur, ſicque deinceps, nam per Cor. 1. nullus motus ex puncto medii Elaſtici in punctum proximum transfertur niſi elapſo finito tempore, velocitas ergo primi puncti ad ſecundum non tranſit niſi poſt finitum tempus ab initio motus primi puncti & velocitas ſecundi puncti ad tertium non tranſit niſi poſt finitum tempus ab initio motûs ſecundi ejus puncti. Breviori autem tempore excitari debet data velocitas in ſecundo puncto per actionem continuatam ab initio motûs primi puncti, quàm in tertio per actionem continuatam ab initio motûs puncti ſecundi: cùm enim velocitas primi puncti ſit finita & æquabilis, compreſſio exinde orta ab initio ejus motûs eſt major quàm compreſſio quæ per motum ſecundi puncti ab initio ejus motus acquiritur, ſiquidem ad celeritatem primi puncti nonniſi per gradus pervenit, ergo vis motrix quæ urget ſecundum punctum ab initio, fortior eſt quam ea qua urgetur tertium punctum ab initio, ergò tertium punctum datam illam celeritatem tardius acquiret, & pari ratiocinio, cum vis motrix ſecundi puncti ſub initio fortior ſit quam vis motrix tertii, compreſſio inter ſecundum & tertium punctum major erit ſub initio quàm inter tertium & quartum; unde vis motrix quæ urget tertium punctum ſub initio, fortior eſt quàm ea quâ urgetur quartum punctum; Ergo cùm punctum ſequens aliqualem velocitatem ſuſcipere non poſſit niſi poſtquam punctum præcedens ſpatium finitum deſcripſerit, & longiori tempore ab initio motûs ſuſcepti datam velocitatem poſſit ſuſcipere, liquet quod ea data velocitas nonniſi ſucceſſivè ad ſucceſſiva medii Elaſtici puncta pertingit.

8. *Schol.* Hinc patet diſcrimen inter motum in medio Elaſtico excitatum & motum qui excitatur in medio non Elaſtico cujus partes contiguæ ſunt, in tali enim medio, preſſio cuidam particulæ applicata ad omnes partes in directum poſitas, aut divaricantes, puncto temporis extendi debet; Motus verò inſtanti in circulum propagari debet; At in medio Elaſtico, Preſſio ab uno puncto ad alterum non continuatur niſi per acceſſum punctorum medii, ſive per realem motum, qui antrorſum propagetur, & poſt tempus finitum à puncto primum moto ad reliquas partes fluidi ſucceſſivè perveniat.

9. PROB. Si punctum medii Elaſtici finitâ velocitate moveatur quæ conſtans maneat, definire motum punctorum ſequentium in lineâ recta poſitorum, omiſſis aliis ſphæricè circumquaque poſitis.

Primus Caſus. Sint ordine puncta A, B, C, D, &c. fingatur ea omnia ad æquales diſtantias in navi poſita, & punctum B ita adhærere malo ut ex ejus motu, navis motum ſuſcipiat & reliqua puncta vehat; Recipiat verò punctum A velocitatem finitam

quæ

quæ conſtans maneat relatè ad navis punctum in quo verſabatur, & ponatur primo eam verſus B tendere; ex acceſſu puncti

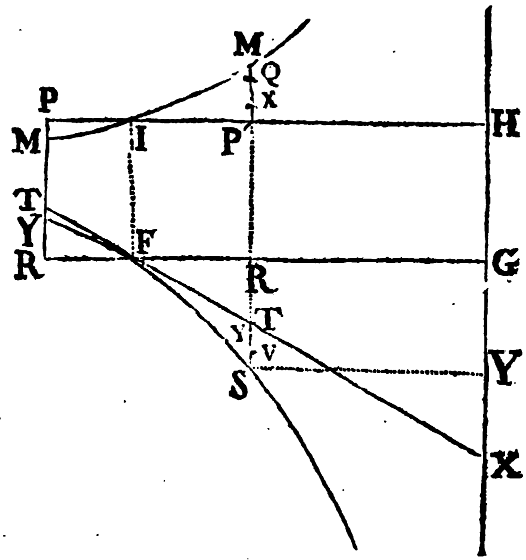


A verſus B vis repulſiva particulæ A fortior fiet vi repulſivâ particulæ C, quare ex differentia virium naſcetur vix motrix particulæ B; Procedat enim A ad B quantitate A a, erit vis particulæ C in B, ad vim particulæ A in B, ut a B ad B C ſive A B (quia particularum intervalla A B, B C initio erant æqualia) & dividendo, vis particulæ C, ad differentiam virium quæ eſt vis motrix puncti B ut a B ad A B — a B ſive A a, ſed vis particulæ C eſt vis ipſa elaterii in ſtatu naturali, ex Hypot. Ergo Vis elaterii eſt ad vim moventem punctum B, ut a B ad A a. Repræſentet itaque I H tempus quo diſtantia A B punctorum elaſticorum per velocitatem datam puncti A percurritur, dicaturque illud tempus a, ducatur deorſum ad angulos rectos linea H G quæ vim elaſticam ſingulæ particulæ medii in ſtatu naturali deſignet, ductaque F G parallela I H, aſymptotis F G & G H & dignitate æquali $a \times$ H G deſcribatur Hyperbola, tranſibit per punctum I, (ſiquidem I F = H G & F G = I H = a, ideoque I F × F G = H G × a) & ſi I P repræſentet tempus quo durante A motum eſt, dicaturque x, Dico quod P M repræſentabit vim motricem puncti B eo temporis momento. Erit enim ex naturâ Hyperbolæ, G R : G F = F I (H G) : R M & dividendo G R (H P) : F R (I P) = H G : P M; ſpatia verò uniformiter deſcripta ſunt ut tempora; ergo A B : A a = I H : I P & dividendo a B : A a = H P : I P, ſed a B ad A a ut vis elaterii ad vim motricem puncti B; ergo HP : IP = HG : PM = vis elaterii ad vim motricem puncti B, ſed H G repræſentat vim elaterii, ergo P M ubique repræſentat vim motricem puncti B.

Repræſentabit ergo etiam linea P M velocitatem momento P genitam, & area I P M totam velocitatem à puncto B acquiſitam tempore I P ſive tempore quo percurritur A a à puncto A.

Deſcribatur verò ex puncto F Logarithmica cujus axis ſit linea H G producta, ſubtangens linea quævis G X quæ dicatur s, ductâque ex puncto P lineâ P T S dico quod linea T S repræſentabit velocitatem tempore I P acquiſitam & area F T S ſpatium à puncto B deſcriptum.

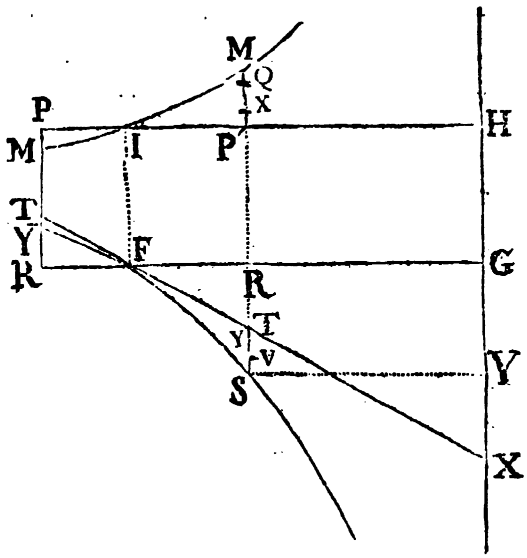
Eſt enim (*per nat. Logarith.*) area I F R M, ad Rect. I F G H ut R S ad G X, & Rect. I F G H ad Rect. I F R P ut F G ad F R ut G X ad R T, ideoque ex æquo area I F R M ad Rect. I F R P ut R S ad R T, & dividendo, eſt I P M ad I F R P ut T S ad R T; Ergo area I P M eſt ad T S in Ratione datâ, ob datum P R & rationem F R ad R T datam, ut pote æqualem rationi F G ad G X, eſt ergo T S ut I P M, 315.



ſive ut velocitas puncti B, & cùm perpendicula inter ordinatas T S ſint æqualia momentis temporis in linea I P ſumptis, area F T S erit ut ſpatium à puncto B percurſum.

Eodem modo conſtabit, quod ſi vis elaſtica ageret more gravitatis tempore a, velocitas quam eo tempore generaret, deſignaretur per ſubtangentem s, & ſpatium deſcriptum foret $\frac{as}{2}$, dicatur verò m velocitas data puncti A, data erit ratio s ad m, intervallum particularum A B erit $m\,a$, & ſpatium A a velocitate datâ percurſum eſt $m\,x$, notandum verò eſt quod ea

velocitas s ſit pluſquam dupla velocitatis globi tormentarii, unde liquet quod in caſibus ſequentibus ubi velocitas puncti A longe minor velocitate globi tormentarii eſt intelligenda; quantitas $\frac{m}{s}$ eſt fractio ſatis parva.



Ad calculum verò facilè revocatur linea F T S & area T S; 1°. enim cùm ſubtangens ſit s, ordinatarum F G, S Y differentia ſit x, area tota F G S Y (*ex nat. Log.*) eſt $s\,x$, intervallum R S eſt $s \times \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}$ &c. Rectang. $RG \times RS = \overline{a - x} \times s \times \overline{\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}}$ &c. & quoniam eſt F G (a) : G X (s) = F R (x) : R T eſt R T $= \frac{sx}{a}$ & Triang. F R T $= \frac{sx^2}{2a}$. Detrahantur ergo Rectang. $RG \times RS$ & Tr. FRT ex area F G S Y remanet area F T S $= s\,x - \overline{sa - sx} \times \overline{\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}}$ &c. $- \frac{sx^2}{2a} = sx \times 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}$ &c. $- sx \times 1 + \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}$ &c. $- \frac{sx^2}{2a} = \frac{sx^2}{a} \times \frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2} + \frac{x^3}{4 \times 5a^3} +$ &c.

erit itaque A a ad B b, ut $m\,x$, ad $\frac{sx^2}{a} \times \frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2} + \frac{x^3}{4 \times 5a^3}$ &c. vel ut m ad $\frac{sx}{a} \times \frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2}$ &c. erit verò recta T S = R S − R T $= \frac{sx}{a} \times 1 + \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}$ &c. $- \frac{sx}{a} = \frac{sx}{a} \times \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}$ &c. ideoque velocitas data puncti A erit ad velocitatem puncti B ut m ad $\frac{sx}{a} \times \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}$.

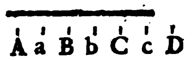
Coroll. Si quæratur in hac Hypotheſi quo tempore & ſpatio deſcripto punctum B velocitatem puncti A obtineat, fiat $m = \frac{sx}{a} \times \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}$ &c. ſed cum ſpatium A a ſit ad B b ut m ad $\frac{sx}{a} \times \frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2}$ &c. erit A a ad B b ut $\frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}$ &c. ad $\frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2} + \frac{x^3}{4 \times 5a^3}$ &c. cumque primus terminus, primæ ſeriei ſit accuratè triplus primi termini alterius ſeriei, reliqui verò pluſquam tripli; Punctum A totam ſuam celeritatem puncto B communicat antequam id punctum B tertiam partem ejus ſpatii deſcripſerit quod deſcripſit punctum A.

Tempus verò x exprimetur per Radices hujus æquationis $0 = \frac{ma}{s} - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^4}{4a^3}$ &c. Ubi liquet quod quando $\frac{m}{s}$ eſt fractio, tunc x eſt minus quam a, & ſeries eſt Convergens, ideoque ex primo termino & proximo aſſumptis erit $x = a\sqrt{\frac{2m}{s}}$; rem accuratius expendere iſto in caſu, qui merè fictitius eſt, nihil eſt neceſſe.

Caſus ſecundus. Si A moveatur uniformiter & acceleret punctum B quod etiam acceleret punctum C (nullâ habitâ ratio-

na:

ne motûs puncti D) erit in hoc Caſu vis repulſiva A ad vim repulſivam C ut A B — B b + C c ad A B — A a + B b & differentia virium ſive vis motrix puncti B ad vim repulſivam puncti C, ut A a — 2 B b + C c ad A B — A a + B b; eſt præterea vis repulſiva puncti C ad vim Elaterii ut A B ad A B — B b + C c; & denique vis Elaſtica eſt ad vim moventem punctum B in primo caſu ut A B — A a ad A a; ideoque ex æquo vis vera motrix puncti B ad ejus vim in primo caſu ut



&c.

$$\left.\begin{matrix}Aa-2Bb+Cc\\ AB\\ AB-Aa\end{matrix}\right\}\text{ ad }\left\{\begin{matrix}AB-Aa+Bb\\ AB-Bb+Cc\\ Aa\end{matrix}\right\}$$

In eâdem autem Hypotheſi vis motrix puncti C, hoc modo determinatur, eſt vis repulſiva puncti B ad vim repulſivam puncti D ut D c ad b c ſive ut A B — C c, ad A B — B b + C c, ergo vis motrix puncti C ad vim repulſivam puncti D, ut B b — 2 C c ad A B — B b + C c.

Hæc vis repulſiva puncti D eſt ad vim Elaſticam ut A B ad A B — C c, denique vis Elaſtica ad vim moventem punctum B in primo Caſu, ut A B — A a, ad A a, ideoque ex æquo vis motrix puncti C, ad vim moventem punctum B in primo Caſu ut

$$\left.\begin{matrix}Bb-2Cc\\ AB\\ AB-Aa\end{matrix}\right\}\text{ ad }\left\{\begin{matrix}AB-Bb+Cc\\ AB-Cc\\ Aa\end{matrix}\right.$$

Ut verò determinetur motus puncti B in iſto caſu (qui pro vero haberi poteſt ob exiguitatem motûs puncti D qui negligitur) concipiatur P M ad P Q ut

$$\left.\begin{matrix}AB-Aa+Bb\\ AB-Bb+Cc\\ Aa\end{matrix}\right\}\text{ ad }\left\{\begin{matrix}Aa-2Bb+Cc\\ AB\\ AB-Aa\end{matrix}\right.$$

& idem P M ad P X ut

$$\left.\begin{matrix}AB-Bb+Cc\\ AB-Cc\\ Aa\end{matrix}\right\}\text{ ad }\left\{\begin{matrix}Ab-2Cc\\ AB\\ AB-Aa\end{matrix}\right.$$

curvæ quæ tranſibunt per Q & X erunt loci virium motricium puncti B & puncti C, areæ I P Q, I P X erunt ut velocitates per illas vires dato tempore I P genitæ, & ſi ſumantur ordinatæ T V & T Y, tales ut T S, T V, T Y ſint ut areæ I P M, I P Q, I P X, areæ F T V, F T Y erunt ut ſpatia B b & C c: ſit ergo

$TV = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + Dx^5$ &c.

& $TY = Ox^4 + Pa^5 + Ra^6$ &c.

erit $TV\,dx = Ax^2dx + Bx^3dx + Cx^4dx + Dx^5dx$ &c.

$TY\,dx = Ox^4dx + Px^5dx$

Unde integrando, eſt area $FTV = \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^4}{4} + \frac{Cx^5}{5} + \frac{Dx^6}{6}$ &c. $= Bb$

& $FTY = \frac{Ox^5}{5} + \frac{Px^6}{6}$ &c. $= Cc$

fluxio autem $TV = 2Axdx + 3Bx^2dx + 4Cx^3dx + 5Dx^4dx$ &c. A. 315.

& fluxio $TY = 4Ox^3dx + 5Px^4dx$ &c.

Erat autem fluxio $TS = \frac{sxdx}{a^2} \times 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4}$ &c.

Sed P M ad P Q, ut fluxio T S ad fluxionem T V

& P M ad P X ut fluxio T S ad fluxionem T Y

ergo fluxio T S ad fluxionem T V ut

$$\left.\begin{matrix}AB-Aa+Bb\\ AB-Bb+Cc\\ Aa\end{matrix}\right\}\text{ ad }\left\{\begin{matrix}Aa-2Bb+Cc\\ AB\\ AB-Aa\end{matrix}\right.$$

& eadem fluxio T S ad fluxionem T Y ut

$$\left.\begin{matrix}AB-Bb+Cc\\ AB-Cc\\ Aa\end{matrix}\right\}\text{ ad }\left\{\begin{matrix}Bb-2Cc\\ AB\\ AB-Aa\end{matrix}\right.$$

In his proportionibus multiplicatis extremis & mediis & terminorum collatione factâ, invenientur lineæ T V & T Y & areæ F T V & F T Y, ſicque tempora quibus acquiruntur velocitates T V, T Y & ſpatia deſcripta dum acquiruntur, obtineri poterunt, Calculum iſtum prolixiſſimum in compendio exhibebo; primò invenitur quod fluxio $TS \times AB \times AB - Aa = sm^2xdx$, eſt præterea $Aa - 2Bb + Cc$ æquale $mx + * - \frac{2A}{3}x^3 - \frac{2B}{4}x^4 - \frac{2C-O}{5}x^5 - \frac{2D-P}{6}x^6$ &c. eſtque $Bb - 2Cc = \frac{A}{3}x^3 + \frac{B}{4}x^4 + \frac{C-2O}{5}x^5 + \frac{D-2P}{6}x^6$ &c. quæ ſeries multiplicatæ per sm^2xdx dant facta extremorum in utrâque proportione.

Ut habeantur facta mediorum, in primâ proportione eſt $AB - Bb + Cc \times Aa =$

$$mx \times ma + * + * - \frac{Ax^3}{3} - \frac{Bx^4}{4} - \frac{C-O}{5}x^5 - \frac{D-P}{6}x^6;$$ ducatur in $AB - Aa + Bb =$

$$ma - mx + * + \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^4}{4} + \frac{Cx^5}{5} + \frac{Dx^6}{6}$$ fit

$$mx \times m^2a^2 - m^2ax + * + * + \frac{mAx^4}{3} + \frac{mBx^5}{4} + \frac{C-O}{5}mx^6 \&c.$$

$$+\frac{Omax^5}{5} + \frac{Pmax^6}{6}$$

$$-\frac{A^2x^6}{3 \times 3}$$

Quod ducatur in fluxionem $TV =$

$dx \times 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3 + 5Dx^4 + 6Ex^5 + 7Fx^6$ factum erit

$$mxdx \times 2m^2a^2Ax - 2m^2aAx^2 - 3m^2aBx^3 + 4m^2aCx^4 + \frac{2mA^2x^5}{3} + \frac{18mBAx^6}{3 \times 4}$$

$$+ 3m^2a^2Bx^2 + 4m^2a^2Cx^3 + 5m^2a^2Dx^4 - 5m^2aDx^5 + \frac{2maAOx^6}{5} \&c.$$

$$+ 6m^2a^2Ex^5 - 6m^2aEx^6$$

$$+ 7m^2a^2Fx^6$$

termini omnes hujus ſeriei dividantur per sm, & conferantur cum correſpondentibus terminis ſeriei quam exhibet factum extremorum primæ proportionis & habebitur $m = \frac{2ma^2A}{s}$, ideoque $A = \frac{s}{2a^2}$, tum $\frac{-2maA}{s} + \frac{3ma^2B}{s} = 0$, ideoque $B = \frac{s}{3a^3}$, 3°. $-\frac{2A}{3} = -\frac{3maB}{s} + \frac{4ma^2C}{s}$, unde invenitur $C = \frac{s}{4a^4} - \frac{s}{3 \times 4ma^4}$, 4° $-\frac{2B}{4} = -\frac{4maC}{s} + \frac{5ma^2D}{s}$ eſt ergo $D = \frac{s}{5a^5} - \frac{6s^2}{3 \times 4 \times 5ma^5}$; 5°. $\frac{O-2C}{5} = + \frac{2mA^2}{3s} - \frac{5maD}{s} + \frac{6ma^2E}{s}$ eſt ergo $E = \frac{s}{6a^6} - \frac{46s^2}{3 \times 4 \times 5 \times 6ma^6} + \frac{2s^3}{3 \times 4 \times 5 \times 6m^2a^6} + \frac{sO}{5 \times 6 \times ma^2}$ & denique invenitur $F = \frac{s}{7a^7} - \frac{252s^2}{3.4.5.6.7ma^7} + \frac{24s^3}{3.4.5.6.7m^2a^7} + \frac{sP}{6.7ma^2}$.

In alterâ Proportione reſumatur factum $AB - Bb + Cc \times Aa$ quod eſt

$$mx \times ma + * + * - \frac{Ax^3}{3} - \frac{Bx^4}{4} - \frac{C-O}{5}x^5 - \frac{D-Px^6}{6}$$ ducatur in $AB - Cc$ quod eſt

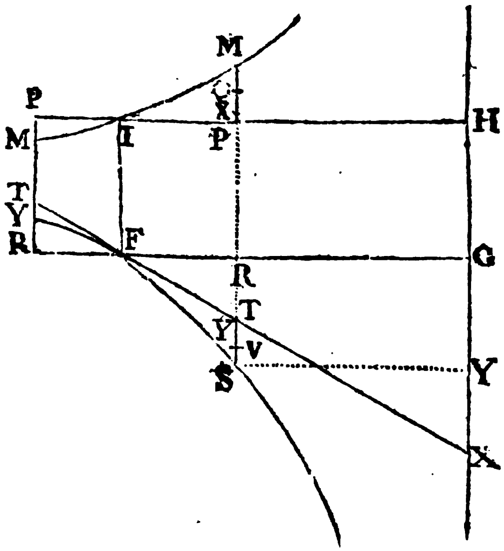
$$ma + * + * + * + * - \frac{Ox^5}{5} - \frac{Px^6}{6} \&c.$$ fit

$$mx \times m^2a^2 + * + * - \frac{maAx^3}{3} - \frac{maBx^4}{3} - \frac{maCx^5}{5} - \frac{maDx^6}{6}$$ &c. Multiplicetur per fluxionem TX quæ eſt $dx \times, 4Ox^3 + 5Px^4 + 6Qx^5 + 7Rx^6$ &c. habetur $mxdx \times 4m^2a^2Qx^3 + 5m^2a^2Px^4 + 6m^2a^2Qx^5 + 7m^2a^2Rx^6 + 8m^2a^2Sx^7$

$$-\frac{4maAOx^6}{3} - \frac{4maBOx^7}{4}$$

$$-\frac{5maAOx^7}{3}$$

termini omnes hujus ſeriei dividantur per sm & conferantur cum terminis correſpondentibus ſeriei quam exhibet factum extremorum ſecundæ proportionis, & habebitur



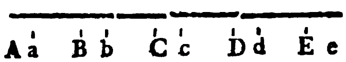
tur $\frac{A}{3} = \frac{4ma^2O}{s}$ ideoque $O = \frac{s^2}{2\times3\times4ma^4}$: 2°. $\frac{B}{4} = \frac{5ma^2P}{s}$ hinc $P = \frac{s^2}{3\times4\times5ma^5}$ 325.
3°. $\frac{C}{5} - \frac{2O}{5} = \frac{6ma^2Q}{s}$, hinc $Q = \frac{s^2}{4\times5\times6ma^6}\ \frac{2s^3}{3\times4\times5\times6m^2a^6}$ &c. unde tandem obtinentur hæ ſeries, quibus velocitates & ſpatia deſcripta exprimuntur: exprimitur ergo velocitas puncti B,

$$\text{per } TV = \frac{sx^2}{2a^2} + \frac{sx^3}{3a^3} + \frac{sx^4}{4a^4} + \frac{sx^5}{5a^5} + \frac{sx^6}{6a^6} + \frac{sx^7}{7a^7} \ \&c.$$
$$- \frac{2s^2x^4}{2,3\times4ma^4} - \frac{6s^2x^5}{3\times4\times5ma^5} - \frac{46s^2x^6}{3\times4\times5\times6ma^6} - \frac{390s^2x^7}{2.4.5.6.7ma^7} \ \&c.$$
$$+ \frac{5s^3x^6}{2\times3\times4\times5\times6m^2a^6} + \frac{50s^3x^7}{2\times3\times4\times5\times6\times7m^2a^7} \ \&c.$$

$$\text{area } FTV = \frac{sx^3}{2\times3a^2} + \frac{sx^4}{3\times4a^3} + \frac{sx^5}{4\times5a^4} + \frac{sx^6}{5\times6a^5} + \frac{sx^7}{6\times7a^6} + \frac{sx^8}{7\times8a^7} \ \&c.$$
$$- \frac{s^2x^5}{3\times4\times5ma^4} - \frac{6s^2x^6}{3\times4\times5\times6ma^5} - \frac{46s^2x^7}{3\times4\times5\times6\times7ma^6} - \frac{390s^2x^8}{3.4.5.6.7.8ma^7}$$
$$+ \frac{5s^3x^7}{2\times3\times4\times5\times6\times7m^2a^6} + \frac{50s^3x^8}{2.3.4.5.6.7.8m^2a^7}$$

velocitas puncti C exprimitur $\text{per } TX = \frac{+s^2x^4}{2\times3\times4ma^4} + \frac{s^2x^5}{3\times4\times5ma^5} + \frac{s^2x^6}{4\times5\times6ma^6}$ &c.
$$- \frac{2s^3x^5}{3\times4\times5\times6m^2a^6}$$

area denique $FTX = \frac{s^2x^5}{2\times3\times4\times5ma^4} + \frac{s^2x^6}{3\times4\times5\times6ma^5} + \frac{s^2x^7}{4\times5\times6\times7ma^6}$ &c.
$$- \frac{2s^3x^6}{3\times4\times5\times6\times7m^2a^6}$$



Punctorum ſequentium motus determinari poſſent ſimili ratione; Etenim vires motrices punctorum B, C, D, E &c. ſunt ut A a — 2 B b, B b — 2 C c, C c — 2 D d, D d — 2 E e, &c. Vis enim cujuſvis puncti ut C eſt ad vim puncti E ut d e ad c d ſive ut A B + E e — D d ad A B + D d — C c & dividendo vis motrix puncti D ad vim puncti E ut C c — 2 D d + E e ad c d; vis puncti E eſt ad vim Elaſticam naturalem ut A B ad e d, ergo vis motrix puncti D ad vim Elaſticam naturalem ut $\left\{\frac{\text{C c} - 2\,\text{D d} + \text{E e}}{\text{A B}}\right\}$ ad $\left\{\begin{matrix}\text{c d}\\ \text{e d}\end{matrix}\right\}$ ſive ut C c — 2 D d + E e ad $\frac{\text{c d} \times \text{d e}}{\text{A B}}$, ergo alternando eſt vis motrix puncti D ad C c — 2 D d + E e ut vis Elaſtica naturalis ad $\frac{\text{c d} \times \text{d e}}{\text{A B}}$, ideóque in paulò majori ratione quàm vis elaſtica ad A B quia tam c d quàm d e paulò minores ſunt quàm A B, ſed vis motrix puncti D eſt ad C c — 2 D d in majori ratione quam eadem vis motrix ad C c — 2 D d + E e, ergo vis motrix puncti D eſt ſemper ad C c — 2 D d in majori ratione quam vis elaſtica ad A B, cùmque id verum ſit in omnibus punctis & hæc ultima ratio ſit conſtans, Ratio vis motricis puncti cujuſvis ad ſpatium à præcedenti puncto deſcriptum dempto duplo ſpatii ab ipſo hoc puncto deſcripti, erit ſemper major ratione conſtante, non tamen multo, ideo Phyſicè pro conſtante aſſumi poteſt, hinc alternando vires illæ motrices, punctorum ſucceſſivorum, ſunt in ratione indicatâ.

Sed calculum pro illis punctis inſtituere neceſſe non eſt, per Analogiam enim ex motu duorum priorum punctorum B & C reliquorum motum ſtatuere, ſufficiens videtur.

10. Si, miſſis cæteris caſibus, quæratur intervallum temporis quo velocitas data m, in punctis ſucceſſivis B, C, generetur, ut & ratio ſpatiorum A a, B c, C c eo tempore deſcriptorum; Fiat T V $= m$, & utroque ducto in $\frac{a^2}{s}$, erit $\frac{a^2 TV}{s} = \frac{a^2 m}{s}$, dicatur $\frac{a^2 m}{s} = z^2$ & in ſerie $\frac{a^2 TV}{s}$, ponatur ubique $\frac{m}{z^2}$ loco $\frac{s}{a^2}$, hæc ſeries in hanc formam migrabit

$$z^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3a} + \frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^5}{5a^3} + \frac{x^6}{6a^4}\ \&c.$$
$$- \frac{2x^4}{2.3.4z^2} - \frac{6x^5}{3.4.5az^2} - \frac{46x^6}{3.4.5.6a^2z^2}\ \&c.$$
$$+ \frac{5x^6}{2.3.4.5.6z^4}\ \&c.$$

Juxta Analyſeos *Newtonianæ* Methodum ſumantur omnes termini in quibus differentiæ exponentium x & z minimum efficiunt valorem, fiantque æquales z^2 reliqui termini ſeriei $\frac{a^2 TV}{s}$ negligi poſſunt, quia per dignitates quantitatis $\frac{x}{a}$ reſpectu eorum qui aſſumpti fuerunt multiplicantur; (in Hypotheſi quæ velocitatem m alicujus momenti aſſumeret hi termini negligendi non forent, ſed in caſu præſenti velocitatem m minimam ſupponere nobis licet cùm de tali tantum in futurum ſimus acturi) erit ergo

$$z^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^4}{2.3.4z^2} + \frac{5x^6}{2.3.4.5.6z^4} - \frac{14x^8}{2.3.4.5.6.7.8z^6} + \frac{41x^{10}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10z^8} - \frac{122x^{12}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12z^{10}}\ \&c.$$

(qui termini continuatâ ſerie T V inveniuntur) & æquatione per approximationem ſoluta invenietur $x^2 = 3.57z^2 = \frac{3.57a^2 m}{s}$.

Jam verò in areâ F T V quæ ſpatium B b exprimit, loco $\frac{s}{a^2}$ ponatur ut prius $\frac{m}{z^2}$ & aſſumantur termini in quibus differentia exponentium quantitatum x & z minima eva-

evadit, ii ſunt $\frac{mx^3}{2\times3z^2}-\frac{2mx^5}{2.3.4.5z^4}+\frac{5mx^7}{2.3.4.5.6.7z^6}-\frac{14x^8}{2.3.4.5.6.7.8\,9z^7}$ in quibus ſi valor $x^2=3.57z^2$ ſubſtituatur, fiet hæc ſeries $mx\times\frac{3.57}{2\times3}-\frac{2\times3.57\times3.57}{2.3.4.5}+\frac{5\times3.57\times3.57\times3.57}{2.3.4.5.6.7}-\frac{14\times3.57\times3.57\times3.57\times3.57}{2.3.4.5.6.7.8.9}$ &c. ſive $Bb=mx\times.428$.

Eodem modo valor C c invenietur ex hac ſerie $\frac{mx^5}{2\times3.4.5z^4}-\frac{2mx^7}{3\times4.5.6.7z^6}$ ſive ſubſtituto valore x^2, erit $Cc=mx\times\frac{3.57\times3.57}{2.3.4.5}-\frac{2\times3.57\times3.57}{3.4.5.6.7}$ &c. ſive $Cc=mx\times.07$ ſive circiter ſexta pars intervalli à puncto B deſcripti eodem tempore quo acquirit celeritatem m.

Et Celeritas à puncto C tunc temporis acquiſita erit iiſdem ſubſtitutionibus factis $m\times\frac{3.57\times3.57}{2.3.4.}-\frac{2\times3.57\times3.57\times3.57}{3.4.5.6}$ &c. $=m\times.279$ &c. circiter $\frac{1}{4}$ celeritatis m.

11. Quod ſi eventus quæratur in hypotheſi velocitatem m non eſſe quamminimam; ſupponatur illa æqualis ipſi s; ſi quæratur ſpatium deſcriptum à puncto B, dum ejus velocitas fit m, fiat ſeries $TV=m$, & utroque ducto in x, erit $xTV=mx$, ergo collatâ ſerie xTV, & FTV habebitur ratio ſpatiorum percurſorum A a & B b, ſed illæ ſeries poſito $\frac{s}{m}=1$. ſunt

$$xTV=\frac{sx^3}{2a^2}+\frac{sx^4}{3a^3}+\frac{sx^5}{6a^4}+\frac{sx^6}{10a^5}+\frac{sx^7}{30a^6}\ \&c.$$

$$\&\ FTV=\frac{sx^3}{6a^2}+\frac{sx^4}{12a^3}+\frac{sx^5}{30a^4}+\frac{sx^6}{60a^5}+\frac{11sx^7}{2160a^6}\ \&c.$$

Ubi liquet quod primus terminus primæ ſeriei ſit triplus primi termini ſecundæ, reliqui verò termini primæ ſeriei reliquorum terminorum ſecundæ ſeriei plus-quam tripli, unde liquet quod A a. eſt magis quam triplum ſpatii per punctum B deſcripti uſque dum celeritatem m recipiat; Ex quo conſequitur, quod ſiquidem B eo momento non eſt in medio inter puncta A & C, ſed vicinius puncto A ad minimum ſextâ parte ſpatii à puncto A deſcripti ab eo ulterius urgetur & acceleratur, celeritatemque majorem quam m recipit donec ad medium inter A & C perveniat, ibique cum celeritate majore quàm A feratur, verſus C magis accedet, ſicque vim repulſivam puncti C ſentiet, dumque ultra medium inter A & C promovebitur ſenſim tardabitur, tandem deſtructo ejus exceſſu celeritatis ſupra celeritatem m, cùm ſit vicinius puncto C quam puncto A diminuetur ulterius ejus celeritas m, ideoque puncto A vicinius gradatim fiet, in medio inter A & C iterum occurret, ſed cum velocitate diminutâ, quare perget vicinius fieri puncto A, ſicque ab ipſo velocitatis incrementum denovo accipiet, ſicque perpetuò oſcillabitur punctum B circa medium inter punctum A & punctum C ad morem fibræ ſonantis; Eâque ratione fit ut Particulæ aeris magnâ velocitate pulſæ ſonum edant ſponte, ut in tonitru, pulvere fulminante, flagellis, tapetibus aut lodicibus fortiter excuſſis &c.

315.

Sed ubi m minima fit, punctum B cum celeritatem m acquiſivit eo tempore quo parùm abeſt a medio inter puncta A & C, (per hujus n. 10.) una circiter vigeſima ſpatii à puncto A deſcripti, ideoque agitationes ſupra dictas exiguas ſuſcipit quas pro nullis habere Phyſicis licere debet, quamvis Mathematicè non omninò nullæ ſint.

12. Suppoſito ut prius velocitatem datam m eſſe minimam, ut obtineatur intervallum temporis quo punctum C celeritatem eam datam m acquiret ſumpto ut prius $z^2=\frac{a^2m}{s}$ fiat $TX=m$ & $\frac{a^4m^2}{s^2}TX=mz^4$ & ponatur ubique in ſerie TX, $\frac{m}{z^2}$ pro $\frac{s}{a^2}$ fiet $mz^4=\frac{mx^4}{2.3.4}+\frac{mx^5}{3.4.5}$ &c. ſive ſumptis terminis in quibus exponentes quantitatum x & z differentiam minimam habent, erit $mz^4=\frac{mx^4}{2.3.4}-\frac{4mx^6}{2.3.4.5.6z^2}$

+

$+ \frac{13 m x^8}{2.3.4.5.6.7.8 z^4} - \frac{40 m x^{10}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10 z^6}$ &c. & æquatione per approximationem ſoluta, invenitur $x^2 = 9\frac{2}{5} x^2$. Et ſeriem FTX ulterius continuando & calculum inſtituendo ut pro ſerie F T V factum eſt, invenitur quod vis à puncto A emenſa, dum punctum C velocitatem *m* acquirit, eſt ad viam quam ipſum punctum C emetitur, ut 100 ad 32. ſive fere ut 3 ad 1. Quod quidem paulo majus eſt vero, quia omiſſa eſt conſideratio motus puncti D, quod cum diſcedat à puncto C efficit ut vis B in ipſum C ſit fortior, brevioríque tempore motum *m* ipſi impertiatur.

13. Hinc, cùm tempus quo punctum B celeritatem datam *m* acquiſivit ſit $z \sqrt{3.57}$ & tempus quo punctum C eam celeritatem acquiſivit ſit $z \sqrt{9\frac{2}{5}}$, illa tempora ſunt ut $\sqrt{3.57}$ ad $\sqrt{9\frac{2}{5}}$ ſive ut 19 ad 30 fere ut 2 ad 3; cùm ergo punctum A uniformiter moveatur, ſpatium quod punctum A deſcribit dum C acquirit velocitatem *m*, eſt ad ſpatium quod idem punctum A deſcripſerat dum B eamdem velocitatem *m* acquiſiverat, ſicut 3 ad 2; ſpatium verò quod C deſcripſit dum eam celeritatem acquiſivit, eſt proximè tertia pars ſpatii eodem tempore ab A deſcripti, & ſpatium quod B deſcribit dum eamdem celeritatem *m* acquirit eſt fere dimidia pars ſpatii eo tempore ab A deſcripti, ergo illa ſpatia à punctis C & B deſcripta, donec velocitatem *m* ſingula acquirant ſunt æqualia.

14. Ex analogiâ verò deducetur quòd ſpatium quod punctum quartum D deſcribit, dum velocitatem *m* attingit, erit 4ª. pars ſpatii ab A deſcripti, ſiquidem ſpatium a 2do. puncto deſcriptum eſt dimidia pars ſpatii ab A deſcripti, ſpatium à 3º. puncto deſcriptum tertia pars ſpatii deſcripti ab A &c. Imo eum ordinem accuratius obſervari in punctis remotioribus ſtatuere licet quod punctum C tertiam partem ſpatii ab A deſcripti dum velocitatem *m* acquirit, accuratius deſcribat quàm B dimidiam partem ſpatii ab A deſcripti dum velocitatem *m* ſuſcipit. Calculum tentare poteſt qui hac Analogiâ rem ſufficienter demonſtrari non cenſebit, & B. L. ignoſcere rogamus quod talem laborem ſubire piguerit.

Et eadem Analogiâ (art. 13.) deducetur, ſpatia quæ percurrunt ſucceſſiva puncta D, E dum velocitatem *m* acquirunt, æqualia eſſe iis quæ puncta ſingula B & C deſcripſerunt.

15. Quibus admiſſis ſequitur diminutionem intervalli inter particulas medii, cùm motu communi cum puncto A feruntur, eſſe ubicumque eamdem, & æqualem dimidio ſpatio ab A deſcripto dum B celeritatem *m* acquirit.

Nam cùm A bis id dimidium ſpatium deſcripſerit & B ſemel dum B communem cum A motum ſuſcipit, contrahitur ſpatium inter A & B dimidio illo ſpatio; A proceſſit ter illo dimidio ſpatio & C ſemel dum C communem cum B & A motum ſuſcipit, ergo intervallum inter A & C duplo ejus dimidii ſpatii diminutum eſt, ſed inter A & C duo ſunt particularum intervalla A & B, B & C, & primum intervallum eſt contractum dimidio illo ſpatio, ergo intervallum inter B & C eodem dimidio intervallo diminutum eſſe debet, ſicque de cæteris.

16. Ideo ſi quolibet tempore elapſo ſumatur via tota puncti *A*, ea via æqualis erit ſummæ diminutionum intervallorum inter omnes particulas ad quas celeritas *m* communicata fuit; cùm ergo motus puncti *A* ſit uniformis, uniformiter etiam creſcit numerus particularum ad quas celeritas *m* communicatur; & numerus earum particularum æqualis erit viæ à puncto *A* percurſæ diviſæ per diminutionis intervalli unius quantitatem.

17. Manente autem fluido eodem, ſed mutatâ celeritate puncti *A*, tempora quibus puncta ſucceſſiva medii celeritatem ejus puncti *A* ſuſcipiunt eadem tamen manent: Nam ſi in formula $x^2 = \frac{3.57\, a^2 m}{s}$ quâ determinatur quadratum temporis quo punctum B recipit celeritatem puncti *A* ſubſtituantur loco *m* & *s* quantitates ipſis æquipollentes, formula hæc fiet quantitas conſtans (manente Elaterio medii & intervallo particularum) quæcumque ſit velocitas puncti *A*; Etenim dicatur *f* vis elaſtica medii, quoniam, ex Hypotheſi Problematis hujuſce, uniformiter agere cenſetur tempore quod exprimitur per *a* ut celeritatem *s* generet, erit $s = af$; præterea quoniam particularum intervallum

B A

$\frac{\frac{3.57 a^2 m}{s} = 3.57 a^2 \frac{AB}{a}}{af} = \frac{3.57AB}{f}$ quæ quantitas, conſtantes tantùm continet à celeritate m independentes; Hinc, tempus quo punctum B celeritatem puncti A recipit idem eſt quæcumque ſit velocitas puncti A; Idem demonſtrabitur de tempore quo punctum C eam celeritatem recipit, nam habet (*not.* 13.) rationem conſtantem ad tempus quo punctum B eam celeritatem acquirit, eſt nempe ad id tempus ut 3 ad 2, & ſic de cæteris punctis. Q. E. D.

18. Diminutiones intervallorum inter partes medii Elaſtici (manente eodem fluido) ſunt ut celeritas puncti A; Nam ſpatium A a percurſum à puncto A tempore quo certa quædam particula medii Elaſtici celeritatem m recipit eſt ſemper $m\,x$, (x deſignante tempus quo illa particula medii celeritatem m ſuſcipit) ſed illud tempus eſt conſtans (n. 17. hujuſce) quæcumque ſit celeritas puncti A, ergo ſpatium A a eſt ſemper ut velocitas m; ſed illud ſpatium A a eſt ſumma diminutionum intervallorum inter partes ad quas celeritas m pervenit (n. 16.), ſingulæ autem diminutiones ſunt æquales (n. 15.) ergo ſingulæ diminutiones ſunt ut illud ſpatium A a, ſive ut velocitates.

19. Et vice versâ, numerus partium compreſſarum quæ dato tempore celeritatem puncti A receperunt eſt ſemper idem quæcumque ſit puncti A velocitas; Nam ille numerus eſt ut ſpatium A a diviſum per unius partis diminutionem, ſpatium A a dato tempore eſt ut celeritas puncti A, diminutio unius partis eſt etiam ut ea celeritas; ergo numerus partium quæ dato tempore celeritatem puncti A receperunt, eſt ut celeritas per celeritatem diviſa, hoc eſt, in ratione conſtanti; Unde, in diverſis temporibus, numerus particularum ad quas celeritas m pervenerit, erit directè ut tempus.

20. Quod ſi Particulæ datâ celeritate jam ſint dimotæ, & certum gradum compreſſionis ſuſceperint, poſtea verò nova velocitas addatur (vel detrahatur) puncto A, novus ille celeritatis gradus eodem tempore ab unâ particulâ ad aliam propagabitur quo prima celeritas propagata fuit, (in Hypotheſi quod tam velocitas m quàm hæc nova velocitas addititia exiguæ ſunt) idque hoc modo demonſtrari poteſt.

Fingatur, omnes particulas primâ celeritate motas & compreſſas in navi poſitas eſſe quæ ipsâ particularum earum celeritate feratur, ita ut illæ particulæ in eâ nave reſpectivè quieſcant, urgeatur verò prima pars per exceſſum novæ celeritatis ſuper primam, communicatio iſtius exceſſus celeritatis ad omnes partes in navi poſitas ut & nova compreſſio particularum determinabitur ut in præcedenti Problemate, mutatis celeritate, intervallo particularum medii, & ejus elaſticitate; Si ergo prima celeritas fuerit ut prius m; a tempus quo intervallum particularum A B eâ celeritate percurrebatur, ideoque ſit $AB = m\,a$, ſit ut prius s velocitas genita tempore a per vim elaſticam medii in ſtatu naturali conſiderati & uniformiter agentis, inventum eſt quod tempus quo punctum B celeritatem m acquiſiverat erat $a\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ (n. 10.) quod ſpatium A a interea à puncto A deſcriptum erat $ma\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}$ & ſpatium B b erat, $428\, m\, a\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}$, ita ut compreſſio particularum ſit A a — B b $= .572\; m\; a\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}$, ideoque novum intervallum inter particulas in nave poſitas erit $m\,a \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}$; Eſt autem Vis Elaſtica prior ad vim Elaſticam novam inversè ut partium intervalla, ſive ut $m\,a \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}$ ad $m\,a$, ſive ut $1 - .572\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}$ ad 1. Et, ſi exceſſus novæ velocitatis ſuper priorem dicatur n, tempus quo novum intervallum inter particulas deſcriberetur per hanc celeritatem n, erit $\frac{a\,m}{n} \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$, nam tempus a quo prius intervallum $m\,a$ deſcribebatur velocitate m debet eſſe ad illud tempus directè ut intervalla $m\,a$ & $m\,a \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ & inversè ut velocitates m & n. Denique, ſubtangens Logarithmicæ quæ deſignabatur per s in caſu priore, eſt in iſto $\frac{m\,s}{n}$, cùm enim deſignet velocitatem uni-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

315.

De Motu Corporum Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLVII. Theor. XXXVII.

uniformiter genitam ab Elaterio, tempore quo intervallum particularum deſcribitur, eſt directè ut vis elaſtica & ut tempus, habetur ergo hæc proportio, eſt

$$a\left\{1-.5722\sqrt{\frac{3.57m}{s}}\right\} \text{ ad } \frac{am}{n}\left\{1-.5722\sqrt{\frac{3.57m}{s}}\right\}$$

ut s ad $\frac{ms}{n}$.

In ſeriebus ergo ſupra inventis loco m ponatur n; loco a ponatur $\frac{am}{n}\times 1-.5722\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$; loco s ponatur $\frac{ms}{n}$, & tempus quo punctum B celeritatem n acquirit, invenietur (ſubſtituendo hos valores in formula $a\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$)

$$\frac{am}{n}\times 1-.5722\sqrt{\frac{3.57m}{s}}\times\sqrt{\frac{3.57n}{\frac{ms}{n}}}=\frac{am}{n}\times 1-.5722\sqrt{\frac{3.57m}{s}}\times\sqrt{\frac{3.57nnm}{mms}}=a\times 1-.5722\sqrt{\frac{3.57m}{s}}\times\sqrt{\frac{3.57m}{s}}.$$

Ideoque tempus $a\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ quo in præcedenti caſu punctum B acquirebat celeritatem m, eſt ad tempus quo in hoc caſu acquirit celeritatem n, ut 1 ad $1-.5722\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$, ſed hæc ratio, exiſtente m quantitate minimâ ut ſuppoſitio fert, eſt fere æqualitatis. Quare nova celeritas, ſive exceſſus novæ celeritatis ſupra præcedentem, propagabitur ad punctum proximum medii elaſtici eodem temporis intervallo quo præcedens celeritatis gradus in eo puncto genitus fuerat, ideoque etiam ad puncta ſucceſſiva iiſdem temporibus perveniet.

21. Si per datum aliquod tempus primum punctum A medii Elaſtici conſtanti celeritate m fuerit motum, poſtea urgeatur majori celeritate $m+n$ durante æquali tempore, omnes particulæ quæ primam celeritatem m ſuſceperant, altero iſto tempore celeritatem novam $m+n$ ſuſcipient, & intera totidem particulæ ulteriores priorem celeritatem m accipient; Nam incrementum celeritatis n ad eas omnes particulas à primâ propagari poteſt dato tempore, ad quas eo ipſo tempore celeritas m propagata fuerat (hujuſce 20). Interea verò uniformiter propagata fuiſſet velocitas priſtina m ab ultimis particulis quæ eam ſuſceperant ad totidem ulteriores. Si itaque ſucceſſive poſt æqualia tempora velocitas creſcat, totidem formabuntur portiones medii Elaſtici, æquali numero partium conſtantes, quæ ſucceſſivas illas celeritates habebunt, portio proxima puncto A ultimam celeritatem habebit, ſecunda penultimam, & ſic deinceps.

22. Hinc, ſi medium Elaſticum urgeatur per ſucceſſivos velocitatis gradus, imprimi poteſt ejus partibus velocitas ſatis magna ut ſenſibiliter in aures agat nec tamen excitetur in medii Elaſtici partibus ſenſibilis ea vibratio quæ juxta n. 11. naſceretur ſi ſimul & ſemel tota illa velocitas ipſi imprimeretur; & hinc intelligitur differentia inter aërem ſonum generantem, aërem ſonum propagantem, & aërem ventum deferentem; ſi magna velocitas particulæ aëreæ imprimatur, particula ipſi proxima tremores ſuſcipit, fitque punctum ſonorum; ſi velocitas minor excitetur quæ conſtans maneat nec per gradus augeatur aër uniformiter transfertur & fit ventus; ſed ſi ab exiguâ velocitate ad magnam aſſurgatur, aëris particulæ ſucceſſivos illos gradus recipiunt, & quia ſingula velocitas accepta eſt exigua tremores ſenſibiles non excitantur in particulis aëreis, quæ velocitatem illam magnam ſuſcipientes & ad aurem deferentes ſenſationem ſoni producunt.

23. Si autem velocitas nova minor ſit velocitate præcedente, eodem modo conſtabit quod decrementum illud velocitatis eodem tempore ad proximum punctum tranſibit quo præcedens velocitatis gradus ab eo acquiſitus fuerat, & ad ſucceſſiva puncta iiſdem etiam temporibus perveniet quibus priorem celeritatem acquiſiverant, imo ſolutio per conſtructionem Problematis ipſius productâ Logarithmica ultra punctum F quæri poteſt, eademque obtinebuntur ac prius.

24. Quibus poſitis intelligitur effectus vibrationis fibræ flexæ & redeuntis in aërem. 1ᵘˢ. *Caſus*. Dividatur tempus ejus reditus in partes æquales quam minimas, & durante ſin-

ſingulâ temporis parte, fibræ velocitas uniformis manere cenſeatur. Prima velocitas, ad certum numerum partium dato eo tempore communicabitur qui partium numerus dicatur N; altero inſtanti ſecunda velocitas eidem partium numero N communicabitur dum prima velocitas ad totidem particulas ulteriores N perveniet, tertio inſtanti primus partium numerus N tertiam velocitatem habebit, ulterior numerus N ſecundam velocitatem, numerus N adhuc ulterior primam; hinc ergo ſi fibra dimidiam vibrationem abſolverit, hoc eſt ultra ſtatum ſuum naturalem diſceſſerit quantum poteſt, erunt in aëre totidem ſucceſſivæ portiones, quæ particulas numero N continebunt, quot ſucceſſivæ velocitates erunt genitæ, & particulæ remotiſſimæ à fibrâ primum celeritatis gradum habebunt, proximæ fibræ ultimum, mediæ verò medium, qui maximus eſt; diminutiones intervallorum correſpondebunt illis celeritatum gradibus, ut ſint minimæ tam in particulis à fibrâ remotiſſimis, quam in particulis ipſi proximis, maximæ in mediis.

Regrediente fibrâ, eadem omnino Lex obſervabitur, niſi quod partes aëris fibræ proximæ retrò movebuntur & compreſſiones in dilatationes mutabuntur, dum in portiones ulteriores medii celeritates primo receptæ propagantur, ideoque tota vibratione abſolutâ numerus particularum agitatarum duplus erit ejus quem in dimidia vibratione notaveramus, pars dimidia remotior eſt planè æqualis illi de quâ primo actum eſt & ſimiliter conſtituta, pars citerior verò negativam celeritatem obtinebit & dilatationem; ejus citerioris partis portio remotiſſima à fibrâ primum celeritatis fibræ regredientis gradum habebit, & portio fibræ proxima ultimum (quietem nempe), media portio medium, hoc eſt retrocedet eâ ipsâ celeritate quâ medium ulterioris partis procedit & dilatationes illis celeritatibus negativis correſpondebunt, ideoque in medio illius proximæ portionis maxima erit dilatatio ut & maximus regreſſus.

2dus. *Caſus*. Quod ſi ſingula tempuſcula, quibus durantibus velocitas fibræ uniformis fingitur, æqualia non ſint, eâdem ratione intelligetur effectus fibræ in partes medii, niſi quod portiones medii quæ ſingulis ſucceſſivis velocitatis gradibus gaudent non ſint æquales, ſed (per not. 19.) ſint ſicut tempora quibus durantibus ſingulæ illæ velocitates in fibrâ permanſerunt.

3us. *Caſus*. Quamvis autem fibræ velocitas nullo tempuſculo uniformis maneat ſed continuo acceleretur, eodem tamen modo fibra aget in medium ac ſi reverâ velocitas ejus creſceret per intervalla temporis, & durante tempuſculo quam minimo (ſed finito) uniformis maneret; idque propterea quod Intervalla inter particulas medii ſunt finitæ quantitates non verò infinitè parva; nam per not. 4. & 5. nullus motus ex puncto *A* in punctum *B* tranſire poteſt, niſi punctum *A* proceſſerit finitâ quantulâcumque quantitate, ideoque, niſi fibra quæ urget punctum *A* velocitatem finitam in eo generaverit (ut fert Hypotheſis Problematis not. 9.); Pari ratiocinio punctum B non ſentiet incrementa velocitatis puncti A, niſi poſtquam incrementum finitum velocitatis in eo genitum fuerit (*not.* 5. & 20.). Ergo fibra agit in medium quaſi ſingulo tempuſculo (æquali vel inæquali) ejus velocitas uniformis perſtitiſſet; Intelligitur ergo effectus vibrationis fibræ in aërem per primum & ſecundum caſum hujuſce demonſtrationis. Q. E. I. 325.

25. Totum autem ſpatium cujus particulæ commotæ fuerunt durante integrâ fibræ vibratione à NEWTONO pulſus vocatur, & ſi vibratione abſolutâ fibra quieſceret, ſemper ulterius propagaretur ille pulſus; Nam totus ille pulſus (momento quo abſolvitur vibratio) diviſus intelligatur in portiones totidem quot temporis intervalla in vibrationis duratione fuerunt aſſumpta, quæ temporis intervalla facilitatis ergo æqualia ſupponantur, ſingula portio medii eam velocitatem habebit quam habuit chorda in momento ipſi reſpondenti, ultima portio ſive remotiſſima à fibra eam habebit celeritatem quam fibra habuerat primo inſtanti, penultima portio eam celeritatem habet quam fibra habuit ſecundo inſtanti &c.; Sequenti verò tempuſculo ultima portio pulſus ad novam portionem ſibi æqualem & ulteriorem ſuam velocitatem propagabit (hujus 21.) dum ipſa ſuſcipiet penultimæ portionis celeritatem, penultima verò portio celeritatem antepenultimæ &c., poſtea altero temporis intervallo ad alteram novam portionem ulteriorem prima celeritas propagabitur, & ſecunda celeritas in primâ portione, novi iſtius pulſus genera-

rabitur, ſicque deinceps: novus ergo pulſus formabitur plane ſimilis priori æqualiter extenſus, æquali celeritate in ſingulis partibus donatus (ſemotâ ut dixi conſideratione partium circumquâque poſitarum remque conſiderando quaſi de partibus in linea rectâ poſitis unicè ageretur).

26. Ipſe autem primus pulſus penitus quieſcit quando in ſecundum totus tranſiit ſi nulla nova chordæ agitatio ſuccedat, nam celeritas portionis pulſus quæ fibræ proxima eſt ſucceſſivè ad ſequentes portiones tranſit dum novus pulſus formatur, ſed celeritas ejus portionis fibræ proximæ eſt ultima fibræ celeritas quæ in hac Hyp. eſt quies, ſed ubi pulſus ſecundus totus formatus eſt, celeritas portionis pulſus quæ fibræ proxima erat ad initium ſecundi pulſus eſt tranſlata & per omnes partes pulſus primi ſucceſſivè tranſiit, ideoque in quiete eas conſtituit in quâ permanſerant nullâ ſuccedente novâ agitatione.

27. Quòd ſi chorda novam vibrationem faciat, ut evenit, Reſtituetur primus pulſus æqualis præcedenti qualiſcumque ſit ejus vibrationis velocitas initialis, nam dividatur totius vibrationis hujuſce tempus in totidem partes æquales partibus in quas tempus primæ vibrationis diviſum fuerat, quod fieri poteſt cum vibrationes ſint iſochronæ, iſtæ partes temporis æquales erunt iis quæ in præcedenti vibratione aſſumptæ fuerunt; Dato autem tempore numerus particularum compreſſarum eſt ſemper idem qualiſcumque ſit velocitas (n. 19. hujuſce). Ergo ſiquidem ſingulo inſtanti dato totidem partes comprimuntur, totidemque ſunt inſtantia data in vibrationibus Iſochronis, pulſus ad totidem particulas in quâvis vibratione Iſochronâ extendetur.

28. Si per velocitatem pulſûs intelligatur (cum NEWTONO) diſtantia ad quam pulſus extenditur diviſa per tempus quo pulſus ad eam diſtantiam pervenit, dico Pulſus in eodem medio eſſe omnes æquiveloces quæcumque ſit fibræ pulſum producentis vibratio: Id jam liquet de vibrationibus Iſochronis in quibus tempore unius vibrationis ad totidem partes pulſus propagatur, ideoque æquale ſpatium æquali tempore percurrit, poſtea verò idem pulſus ſimiliter propagatur, ſed id pariter verum eſt de Vibrationibus Eterochronis; Dividantur enim inæqualia vibrationum tempora in totidem utrinque tempuſcula minima quæ totis temporibus ſint proportionalia, numerus partium compreſſarum ſingulis tempuſculis diverſis ſunt illis tempuſculis proportionales (n. 19. hujuſce) ideoque totis vibrationum temporibus proportionales, ſed in ſingulâ vibratione totidem tempuſcula aſſumpta ſunt, ergo totus numerus partium quæ ſingulum pulſum conſtituunt eſt proportionalis tempori vibrationis. Sed diſtantia ad quam pervenit pulſus eſt ſemper numero partium proportionalis. Ideoque diſtantia ad quam pervenit pulſus eſt tempori vibrationis proportionalis, ſed velocitas pulſus eſt diſtantia ad quam pervenit diviſa per tempus quo ad eam diſtantiam pervenit, ergo ea velocitas eſt conſtans. Ergo in eodem medio omnes pulſus ſunt æquiveloces; Quod de ſono per experimenta verum eſſe demonſtravit *Derhamus*.

29. Quòd ſi medium diverſum ſit, velocitates pulſuum erunt inversè in ratione ſubduplicatâ denſitatis & directè in ratione ſubduplicatâ vis Elaſticæ, quippe (n. 17. hujuſce) deprehendimus quadratum temporis quo celeritas puncti *A* tranſit in punctum *B* eſſe $\frac{3.57\,\mathrm{AB}}{f}$ deſignante AB particularum intervallo & f vi elaſticâ, & uniformiter procedere motum in pulſu ab unâ particulâ ad ſequentem, ſumantur ergo totidem partes in utroque medio, tempora quibus motus pulſus à primâ ad ultimam perveniet erit ut $\frac{\sqrt{\mathrm{AB}}}{\sqrt{f}}$ (neglectâ quantitate conſtanti 3.57.) Velocitas verò pulſus eſt directè ut ſpatium quod occupant illæ omnes particulæ & inversè ut tempus quibus motus à primâ ad ultimam tranſit, ſpatium verò quod occupant illæ particulæ cum ſint totidem eſt ut intervallum AB ſingulæ particulæ, ideoque eſt velocitas pulſus ut $\frac{\mathrm{AB}}{\sqrt{\frac{\mathrm{AB}}{f}}} = \sqrt{\mathrm{AB}} \times \sqrt{f}$. Intervallum particularum eſt inversè ut denſitas medii (rem conſiderando ut in n. 25. hujuſce) ergo velocitas pulſus eſt inversè in ratione ſubduplicatâ denſitatis medii, & directè in ratione ſubduplicatâ vis Elaſticæ (quod Prop. XLVIII. ſtatuit NEWTONUS).

30. His de toto pulſu dictis, nunc de motu ſingulæ particulæ pulſûs obſervandum eſt, in ſingulâ particulâ omnes velocitatis ſucceſſivè gradus quos habuit prima particula A pro-

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLVII. Theor. XXXVII.

315.

produci, & tantùmdem temporis in eâ particulâ durare, quantùm in ea particula A, hoc cum diſcrimine quod tardius eos velocitatis gradus ſuſcipiat quam particula A, & quidem eò tardius quò ab ea remotior eſt; 1us. *Caſus.* Dividatur, ut prius, vibrationis tempus in tempuſcula, & durante uno tempuſculo æquabilis manere cenſeatur velocitas impreſſa particulæ A, fingamus ſingulo tempuſculo velocitatem ad viginti particulas pervenire, & ſpectemus ſpeciatim motum quem 10a. particula à puncto A ſuſcipiet, quæ particula dicatur X, illa particula X motum puncti A non ſuſcipit niſi poſt novem particulas antecedentes, tum ipſa particula X motum puncti *A* ſuſcipit & uniformiter cum eo movetur durante reliquo tempuſculo, tunc ex Hypotheſi mutatur celeritas puncti A, interea tamen uniformis manet celeritas puncti X donec nova ea celeritas ad ipſam pervenire potuerit, hoc eſt poſtquam ſucceſſivè pervenit ad particulas novem antecedentes, ſed nova hæc celeritas per novem particulas antecedentes particulam X propagatur eodem tèmpore quo prima celeritas per eaſdem novem particulas propagata fuerat; ergo prima celeritas tantò diutius permanet in particulâ X quantò tardius eam receperat, ergo ea prima celeritas tamdiù durat in particulâ X quamdiù duraverat in particulâ *A*; cumque idem de ſingulis ſucceſſivis motibus puncti A dici poſſit, hinc quælibet particula X ipſiſſimum habet motum ac particula A, niſi quod tardius in eâ incipiat & deſinat. Ideoque etiam manifeſtum eſt in hoc caſu, ſpatia à particulis *A* & X deſcripta æqualia fore & ſimiliter deſcripta.

2us. *Caſus.* Pona ut nunc quod motus puncti *A* æquabilis non maneat durante ſingulo tempuſculo, velocitates tamen ſucceſſivæ puncti X erunt illæ quas in fine ſinguli tempuſculi quam minimi punctum *A* acquiſiverit, ut liquet ex tertio caſu notæ 24, ideoque punctum X ſuſcipiet velocitates correſpondentes velocitatibus puncti A ſumptis per ſaltus, ſed quoniam cùm primùm punctum A ſpatium finitum deſcripſit, agere incipit in punctum proximum, ſaltus illi quamminimi intelligi debent, ideoque Phyſicè nulli, hinc Phyſicè particula X & particula A eoſdem motus habebunt.

Pariter deſcribent ſpatia æqualia & ſimilia; Quippe abſciſſæ curvæ cujuſvis repræſentent tempus quo durante punctum *A* movetur, & ejus ordinatæ repræſentent correſpondentes velocitates, & dividatur axis curvæ in partes quamminimas ſed finitas, erigantur que ordinatæ, illæ repræſentabunt velocitates æquabiles puncti *X* initio ſinguli tempuſculi, & Parallelogrammata contenta ſub ordinata & portione axis reſpondente repræſentabunt ſpatia à puncto *X* deſcripta, areæ verò mixtilineæ inter eaſdem ordinatas eaſdem axis portiones & arcus curvæ comprehenſæ repræſentabunt ſpatia correſpondentia à puncto *A* deſcripta, ſed quando portiones axis ſunt quamminimæ, ſummæ omnium eorum Parallelogrammatum & arearum mixtilinearum correſpondentium pro æqualibus habentur. Ergo ſpatia à particulis A & X deſcripta ſunt æqualia & ſimiliter deſcripta ſaltem quàm proximè.

31. Ideo uniformiter motus fibræ propagatur trans particulas medii; ſingulæ verò ejus particulæ ſucceſſivè motum fibræ ſuſcipiunt & ejus ad inſtar moventur, ſed in fibrâ Elaſticâ vires ſunt ſemper proportionales diſtantiæ fibræ à puncto medio motus ſui, ut per experimenta conſtat, & illarum virium actio ſenſibiliter non turbatur per reſiſtentiam aëris, propter ejus raritatem, nec per ejus elaterium quia hinc inde à fibrâ aër datur qui ferè æqualiter premit, ideo fibra elaſtica ac per conſequens particulæ ipſæ medii moventur ſecundum Legem Prop. XXXVIII. Lib. I. Sed eadem eſt Lex motus Penduli in Cycloide oſcillantis Prop. LI. lib. I. Ergo *Pulſibus per fluidum propagatis ſingulæ particulæ motu reciproco breviſſimo euntes & redeuntes accelerantur ſemper & retardantur pro Lege oſcillantis Penduli* Q.E.D.

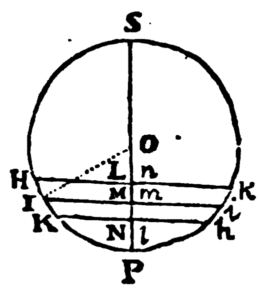
32. Sumatur tempus quodvis, ſimulque illud intervallum inter particulas pulſus, quod tale eſt ut eo tempore aſſumpto motus fibræ à primâ particulâ ejus intervalli ad ultimam perveniat. Dico, quod tempus illud erit ad totum vibrationis tempus ut illud intervallum ad totius pulſus longitudinem; Res eſt evidentiſſima ex præcedentibus; nam cùm motus propagetur in pulſu uniformiter qualiſcumque ſit celeritas, hoc eſt, cum ad totidem particulas dato tempore perveniat, manifeſtum eſt quod ſi ut eſt totum vibrationis tempus, ſive totum tempus quo pulſus formatur ad omnes particulas quæ pulſum conſtituunt, ita portio quævis ejus temporis ad numerum particularum quæ eâ temporis portione motum receperunt.

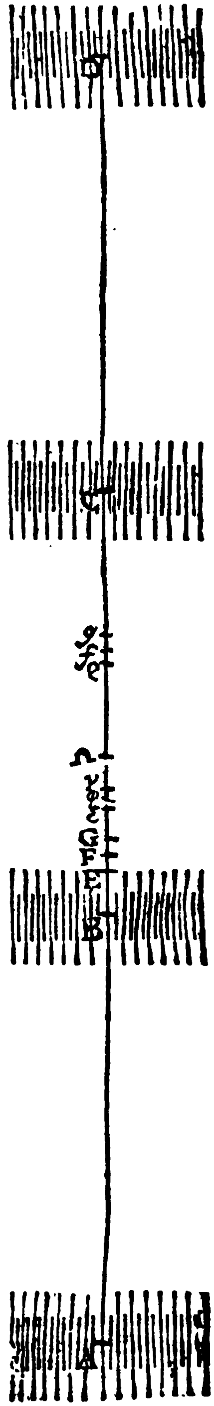
De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLVII. Theor. XXXVII.

33. Ut melius horum cum *Newtonianis* nexus pateat, hic adjungere lubet Propoſitionis XLIX. demonſtrationem ex XLVII. deſumptam, quamvis vix diverſa ſit ab iis quæ in ipſo Textu leguntur, & 1°. quidem, ſit PS ſpatium quod fibra unâ vibratione eundo percurrit, ex ejus medio O ut centro deſcribatur circulus PKSk ejus circumferentia repræſentet totum vibrationis ex itu & reditu compoſitæ tempus, partes ejus circumferentiæ ut KH repræſentabunt tempora quibus fibra per ſpatium correſpondens NL movebitur; HL, KN repræſentabunt velocitates fibræ in punctis N & L, & HL — KN velocitatum incrementa vel decrementa, actioni elaterii fibræ proportionalia, hæc omnia patent ex Propoſ. XXXVIII. & LI. Lib. I.

2°. Sit BC longitudo pulſus, & dicatur *V* radius circuli cujus circumferentiæ illa longitudo BC æqualis foret, dico quod vis naturalis elaterii medii erit ad vim acceleratricem fibræ ut V — KN ad HL — KN.

Sint enim duo puncta E & G in ſuo naturali ſitu in medio elaſtico, quæ poſt aliquod tempus in locis ε & γ occurrant, ſuſcepto nempe motu fibræ ſecundum Leges à nobis expoſitas, ſingula ſeorſim eumdem motum ac fibra habebunt, ideoque ſi ſumptum fuerit Eε = PL erit PH tempus elapſum à momento quo punctum E motum fibræ ſuſcepit & erit HL ejus velocitas in ε, pariter ſit Gγ = PN erit PK tempus elapſum à momento quo G motum fibræ ſuſcepit, & erit KN ejus velocitas in γ, ſint verò E & G puncta proxima; compreſſio ſpatii EG ubi in εγ pervenit oritur ex eo quod plus proceſſit ε quam γ, itaque diminutio ejus ſpatii erit æqualis ſpatio LN, ideoque εγ erit æqualis EG — LN, utque vires quibus urgentur puncta medii, eorum denſitati eſt proportionalis, vis tota quâ urgetur punctum γ eſt ad eam quâ urgebatur punctum G (quæ erat vis naturalis elaterii) inversè ut ſpatium εγ ad EG ſeu ut $\frac{1}{EG - LN}$ ad $\frac{1}{EG}$. Sed eſt LN ad KH ut IM ad radium PO, & cum KH deſignet intervallum temporis quo pulſus à puncto E ad punctum G pervenit, eſt (per n. 32.) KH ad EG ut tota circumferentia PKSk ad BC, ſive ut PO ad *V*; Ergo ex æquo eſt LN ad EG ut IM ad *V* & convertendo EG — LN ad EG ut *V* — IM ad *V* ideoque $\frac{1}{EG - LN} : \frac{1}{EG} = \frac{1}{V - IM} : \frac{1}{V}$, ac per conſequens vis tota quâ urgetur punctum γ eſt ad vim naturalem elaterii ut $\frac{1}{V - IM}$ ad $\frac{1}{V}$.





Vis illa tota quâ urgetur punctum γ eſt vis naturalis Elaterii medii cui ſuperaddita eſt tota vis motrix fibræ quæ ad id punctum pervenit, ergo dividendo & reducendo ad communem denominatorem, Vis motrix fibræ in puncto N, eſt ad vim naturalem elaterii ut IM ad V — IM, ſive invertendo, Vis naturalis elaterii, ad vim totam motricem fibræ in puncto N ut V — IM ad

Corol. Hinc patet quod numerus pulſuum propagatorum idem ſit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progreſſu. Nam lineola phyſica $\epsilon\gamma$, quamprimum ad locum ſuum primum redierit, (n) quieſcet; neque deinceps movebitur, niſi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulſuum qui à corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quieſcet igitur quamprimum pulſus à corpore tremulo propagari deſinunt.

PRO-

ad I M, vel quia I M & K N pro ſe mutuo ſumi poſſunt ubi puncta N & L ſunt proxima eſt vis naturalis elaterii ad vim totam motricem fibræ ut *V* — K N ad K N; ſed vis tota motrix fibræ eſt ad vim ejus acceleratricem durante tempuſculo K H ut K N ad H L — K N, ergo ex æquo, eſt vis naturalis elaterii ad vim acceleratricem fibræ ut *V* — K N ad H L — K N: Q. E. D.

3°. In ipſo motûs fibræ initio, vis elaterii fluidi in ſtatu ſuo naturali eſt ad vim acceleratricem fibræ ut *V* ad H K; Nam ipſo motus initio ſi P H ſit infinitè parvum, ac per conſequens etiam E ε infinitè parvum nullus adhuc motus ad particulam proximam G communicatur (*per n* 4.) ergo omninò evaneſcit K N ideoque *V* — K N = *V*, & H L — K N = H L ſed arcus infinitè parvus & ejus ſinus æquantur ergo H L = H K; Ergo vis elaterii fluidi in ſtatu naturali eſt ad vim acceleratricem fibræ ipſo ejus motus initio ut *V* ad H K.

Ex quibus fluit demonſtratio Propoſitionis XLIX. Q. E. I.

(n) * *Quieſcet, neque deinceps movebitur.* Quamprimùm lineola phyſica ε γ ad locum ſuum primum redierit, ipſius velocitas quam ordinata, m i, ſemper exponit (*prop.* 38. *lib.* 1.) extinguetur; & ejuſdem lineolæ denſitas viſque elaſtica eadem erit cum denſitate & vi elaſti à partis E G medii quieſcentis; ideóque quieſcet &c. * Id liquet ex n. 20. additionis noſtræ de Motibus in fluido Elaſtico genitis.

316. Ex his intelligitur quomodò per vibrationes iſochronas corporis reſonantis producantur in aëre pulſus quibus ad aurem appulſis, fit in nobis perceptio ſoni, 316. & cur ſoni, ceſſante motu tremulo corporis ſonori, ſtatim ceſſent. Liquet etiam tonos à numero pulſuum qui in aëre tempore dato excitantur, pendere, cùm (per cor. prop. hujus) numerus pulſuum æqualis ſit numero vibrationum ex itu & reditu compoſitarum quas chorda muſica peragit, & ab iſto numero tonorum diverſitas oriatur (308).

317. Patet etiam quomodo aëris pulſus ſonum & tremores in aliis corporibus uniſonis aut conſonantibus creare poſſint. Nam cùm aëris pulſus in nervum muſicum incurrit qui vibrationem unam ex itu & reditu compoſitam abſolvere aptus ſit, eo tempore quo pulſus ſuam percurrit latitudinem, commovetur nervus & oſcillatur per exiguum licet ſpatium, & recurrentibus novis atque conſpirantibus aëris pulſibus celeriùs agitatur ſonumque reddit. At ſi nervus vibrationes ſuas integras ſeu ex itu & reditu compoſitas perficere nequeat quo tempore pulſus aëris latitudinem ſuam deſcribit, poſſit tamen in partes aliquotas hujuſmodi vibrationibus peragendis aptas dividi; partes illæ, quieſcentibus diviſionum punctis, congruenter ad pulſuum recurſum ſenſim agitabuntur, vibrationeſque ſuas cum pulſibus uniſonas ſingulæ perficient. Si verò nervi duo proximi in eas partes aliquotas dividi poſſint quæ ſint inter ſe ad uniſonum, aut quod idem eſt, quæ vibrationes iſochronas peragant, & horum nervorum unus pulſetur ſonumque edat, nervi duo ſeſe in partes ſuas aliquotas veluti dividentes ad uniſonum reducantur. Ut ſi

ejuſ-

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XXXVIII.

Pulſuum in fluido elaſtico propagatorum velocitates ſunt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ directè & ſubduplicatâ ratione denſitatis inversè; ſi modo fluidi vis elaſtica ejuſdem condenſationi proportionalis eſſe ſupponatur.

Caſ. 1. Si media ſint homogenea, & pulſuum diſtantiæ in his mediis æquentur inter ſe, ſed motus in uno medio intenſior ſit: contractiones & dilatationes partium analogarum (o) erunt ut iidem motus. Accurata quidem non eſt hæc proportio. Verumtamen niſi contractiones & dilatationes ſint valde intenſæ, non errabit ſenſibiliter, ideoque pro phyſicè accuratâ haberi poteſt. (p) Sunt autem vires elaſticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium ſimul genitæ ſunt ut vires. Ideoque æquales & correſpondentes pulſuum correſpondentium partes itus & reditus ſuos per ſpa-

ejuſdem nervi capiantur partes duæ quarum ſit ratio 2 ad 3 & æqualiter tendantur, alteraque pars pulſetur, dividetur minor nervus in partes duas, & major in partes tres æquales quæ ſingulæ ſeorſim oſcillabuntur. Nam brevior nervus duarum nempe partium, ter oſcillando dum nervus longior partium trium, duas oſcillationes abſolvit (306) frequentiores in aëre pulſus excitat quorum recurſu nervus longior citiùs quàm par eſt agitatur; & cum utriuſque nervi aeriſque motus congruere non poſſint niſi ſingulæ nervorum partes aliquotæ & æquales ſeorſim oſcillentur, motus ille conſpirans tam in nervis quàm in aëre tandem producitur. Et hæc quidem in experimentis muſicis ità contingere obſervarunt *Joan. Wallis* Operum in fol. tom. 2. pag. 466. Et deinde Acuſticæ inſtaurator D. *Sauveur* in Monum. Acad. Pariſ. an. 1701. ubi alia experimenta refert quæ ex prædictis facile poſſunt explicari; * & inde ingenioſiſſimi ſyſtematis de tonorum productione & Harmoniâ fundamenta derivavit Ill. *De Mairan* omni laude ſuperior, quod ad Praxim feliciſſimè revocavit vir inter eruditos Orpheos Illuſtriſſimus D. *Rameau.*

(o) * *Erunt ut iidem motus.* Motus enim illi ſunt vel cauſæ vel effectus contractionis & dilatationis partium in pulſibus correſpondentium. Hæc tamen proportio accurata non eſt, ſi contractiones & dilatationes ſint valde intenſæ, quemadmodum ſi chorda muſica nimiâ vi pulſetur, vis motrix particularum ejus non eſt amplius proportionalis ſpatiis per quæ debet moveri, & aëris denſitas vi ipſius elaſticæ proportionalis non manet, ſi nimiâ vi comprimatur vel dilatetur aer. * Singulæ diminutiones intervallorum ſunt ut velocitates (n. 19.) non tamen ex eo ſequitur contractiones eſſe ut velocitates, (hunc verò caſum & reliquos demonſtravimus n. 29. additionis de mot. fluid. el.)

(p) * *Sunt autem vires elaſticæ motrices.* Nam vires elaſticæ motrices ſunt ut partium analogarum denſitates, hoc eſt, datâ materiæ quantitate, ut contractiones; & contractiones ſunt ut dilatationes quæ viribus elaſticis medii contracti producuntur;

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLVIII. Theor. XXXVIII.

ſpatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ ſunt ut ſpatia, ſimul peragent: & propterea pulſus, qui tempore itûs & reditûs unius latitudinem ſuam progrediendo conficiunt, & in loca pulſuum proximè præcedentium ſemper ſuccedunt, ob æqualitatem diſtantiarum, æquali cum velocitate in medio utroque progredientur.

Caſ. 2. *S*in pulſuum diſtantiæ ſeu longitudines ſint majores in uno medio quàm in altero; (q) ponamus quod partes correſpondentes ſpatia latitudinibus pulſuum proportionalia ſingulis vicibus eundo & redeundo deſcribant: & (r) æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque ſi media ſint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ elaſticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda eſt ut pulſuum latitudo; & in eâdem ratione eſt ſpatium per quod ſingulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. (ſ) Eſtque tempus itûs & reditûs unius in ratione compoſitâ ex ratione ſubduplicatâ materiæ & ratione ſubduplicatâ ſpatii, atque ideo ut ſpatium. Pulſus autem temporibus itûs & reditûs unius eundo latitudines ſuas conficiunt, hoc eſt, ſpatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea ſunt æquiveloces.

Caſ.

tur; *& velocitates partium æqualium ſimul genitæ ſunt ut vires* (13. lib. 1.), hoc eſt, ut contractiones & dilatationes, *ideòque* cum ſpatia ſimul deſcripta ſint ut velocitates ſimul genitæ, *æquales & correſpondentes pulſuum correſpondentium partes itus & reditus ſuos*, ſeu motus ſuos *per ſpatia contractionibus proportionalia, cum velocitatibus quæ ſunt ut ſpatia ſimul peragent*; *& propterea pulſus qui tempore itûs & reditûs latitudinem ſuam progrediendo conficiunt* (314.) *& in loca pulſuum proximè præcedentium ſemper ſuccedunt, ob æqualitatem diſtantiarum* æqualibus temporibus *deſcriptarum æquali cum velocitate in medio utroque progredientur.*

(q) *Ponamus quod partes correſpondentes.* Quoniam (*per caſ.* 1.) in eodem medio homogeneo & datâ pulſuum latitudine ſpatium quod partes medii oſcillando deſcribunt, manente tempore oſcillationis, minui poteſt in datâ ratione; nihil obſtat quominùs in hoc ſecundo caſu ſupponatur quod partes mediorum correſpondentes ſpatia latitudinibus pulſuum proportionalia, iiſdem manentibus oſcillationum in unoquoque medio temporibus, eundo & redeundo percurrant. 317.

(r) * *Æquales erunt.* Si media ſint homogenea, uti in hoc 2°. caſu ſupponitur, vires elaſticæ motrices ſunt ut partium correſpondentium contractiones & dilatationes quas producunt, ſed quia quantitates materiæ in partibus correſpondentibus ſunt ut pulſuum latitudines, ſeu ut partium analogarum volumina, & partes illæ analogæ eundo & redeundo dilatantur & contrahuntur per ſpatia quantitatibus materiæ proportionalia (*per hyp.*) contractiones & dilatationes ideòque vires elaſticæ motrices æquales erunt.

(ſ) * *Eſtque tempus itûs & reditûs.* Nam tempus quo materia viribus æqualibus ad legem oſcillantis penduli agitatur, eſt in ra-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII PROP. XLVIII. THEOR. XXXVIII

Caſ. 3. In mediis igitur denſitate & vi elaſticâ paribus, pulſus omnes ſunt æquiveloces. Quod ſi medii vel denſitas vel vis elaſtica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis elaſticæ, & materia movenda in ratione denſitatis augetur; (t) tempus, quo motus iidem peragantur ac prius, augebitur in ſubduplicatâ ratione denſitatis, ac diminuetur in ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ. Et propterea velocitas pulſuum erit in ratione compoſitâ ex ratione ſubduplicatâ denſitatis medii inversè & ratione ſubduplicatâ vis elaſticæ directè. *Q. E. D.*

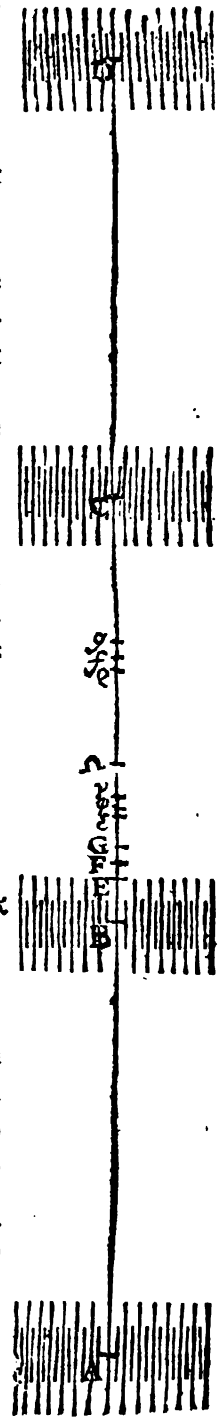
Hæc propoſitio ulterius patebit ex conſtructione ſequenti.

PRO-

ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione materiæ & ſubduplicatâ ratione ſpatii (*per cor.* 5. *prop.* 24. *lib.* 2.).

(t) *Tempus quo motus iidem peragantur &c.* Tempus quo motus per æqualia ſpatia peraguntur eſt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione materiæ movendæ directè & ſubduplicatâ ratione vis motricis inversè (*per cor.* 5. *prop.* 24.) ideóque in hoc tertio caſu, tempus, manente ſpatio deſcripto, augebitur in ſubduplicatâ ratione denſitatis, ac diminuetur in ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ, & propterea velocitas quæ eſt ut ſpatium directè & tempus inversè, (ob datum ſpatium per hyp.) erit in ratione compoſitâ ex ratione ſubduplicatâ denſitatis medii inversè, & ratione ſubduplicatâ vis elaſticæ directè; ſed datis medii denſitate & vi elaſticâ, velocitas pulſuum, utcumque varietur ſpatium, data eſt, (*per caſ.* 1. *&* 2.) ergò velocitas pulſuum erit ſemper in ratione compoſitâ ex ratione ſubduplicatâ denſitatis medii inversè & ratione ſubduplicatâ vis elaſticæ directè.

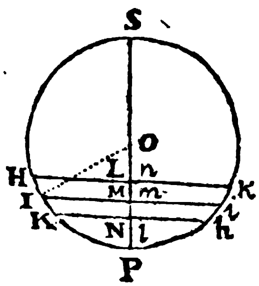
318. Ex hâc propoſitione patet cur ſoni omnis generis, gravis & acutus, intenſus & remiſſus, pari velocitate in eodem aëre propagentur. Nam ſonorum diverſitas, quoad *grave* & *acutum*, à numero pulſuum qui in aëre tempore dato excitantur, pendet (316); at (per hanc prop.) pulſus aëris, ſeu plures ſeu pauciores dato tempore producantur, eâdem ſemper velocitate diffunduntur & dato tempore datum ſpatium conficiunt: Soni verò in eodem aëre producti eo intenſiores ſunt, manente tono, quo majus eſt ſpatium quod aëris particulæ eundo & redeundo deſcribunt dato tempore; ut ſi chorda muſica validius pulſetur, majores vibrationes dato tempore peragit, majoreſque oſcillationes particularum aëris excitat, & ſonus intenſior percipitur, licet tonus idem maneat & proinde pulſuum latitudo ac velocitas non mutentur. Cùm ergo tanta ſit velocitas lucis ut per atmoſphæram in inſtanti quoad ſenſum propagetur (*per ſchol. ad prop. XCVI. lib.* 1.); Si ſonus & lux eodem puncto temporis excitentur, uti in machinis bellicis flamma & fragor producuntur ſimul, & ſpectator ſpatium quo à corpore reſonante diſtat, tempuſque quod inter luminis & ſoni perceptiones intercedit, dimediatur, ſoni velocitas innoteſcet. Atque eo modo in variis regionibus varia obſervata eſt velocitas ſoni, & in Angliâ eâ celeritate ferri, *Flamſtedio* & *Halleyo* viſum eſt, quâ pedes Londinenſes plus minus 1142, Pariſienſes verò 1070, tempore minuti unius ſecundi percurreret. Quia verò denſitas & vis elaſtica aëris in variis terrarum locis, diverſiſque anni tempeſtatibus in eodem loco mutantur, inde quoque mutari oportet ſoni velocitatem. Diu creditum eſt, obſervantibus *Merſenno*, *Gaſſendo*, & Academicis Florentinis, ſonum neque conſpirante vento accelerari, neque adverſo retardari; Sed D. *Derham* experimentis accuratè inſtitutis, falſum id eſſe aſſerit.



PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA XI.

Datis medii denſitate & vi elaſticâ, invenire velocitatem pulſuum.

Fingamus medium ab incumbente pondere pro more aëris noſtri comprimi; ſitque A altitudo medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus denſitas eadem ſit cum denſitate medii compreſſi, in quo pulſus propagantur. Conſtitui autem intelligatur pendulum, cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis ſit A: & quo tempore pendulum illud oſcillationem integram ex itu & reditu compoſitam peragit, eodem pulſus eundo conficiet ſpatium circumferentiæ circuli radio A deſcripti æquale.



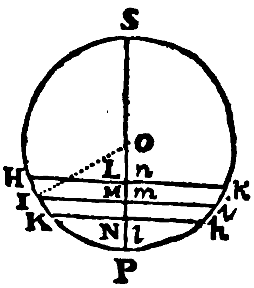
Nam ſtantibus quæ in propoſitione XLVII. conſtructa ſunt, ſi linea quævis phyſica *E F*, ſingulis vibrationibus deſcribendo ſpatium *P S*, urgeatur in extremis itus & reditus cujuſque locis *P* & *S*, à vi elaſticâ (u) quæ ipſius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes ſingulas quo tempore eadem in cycloide, cujus perimeter tota longitudini *P S* æqualis eſt, oſcillari poſſet: id adeo quia vires æquales æqualia corpuſcula per æqua-

(u) * *Quæ ipſius ponderi æquetur*, & quæ decreſcat ut ipſius diſtantia à centro O; peraget hæc vibrationes ſingulas quo tempore eadem in cycloide, cujus perimeter tota longitudini PS æqualis eſt, oſcillari poſſet; quia particulæ E F in hujuſmodi cycloide oſcillantis vis motrix eſt ſemper ut diſtantia ipſius à puncto cycloidis infimo ſeu medio, & in altiſſimis ſeu extremis punctis cycloidis ponderi ipſius æquatur, *per Cor. Prop.* LI. *lib.* I.

318.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLIX. Probl. XI.

lia ſpatia ſimul impellent. Quare cùm oſcillationum tempora (x) ſint in ſubduplicatâ ratione longitudinis pendulorum, (y) & longitudo penduli æquetur dimidio arcui cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oſcillationis penduli, cujus longitudo eſt A, in ſubduplicatâ ratione longitudinis $\frac{1}{2}$ *PS* ſeu *PO* ad longitudinem A. Sed vis elaſticâ, quâ lineola phyſica *EG*, in locis ſuis extremis *P*, *S* exiſtens, urgetur, erat (in demonſtratione propoſitionis XLVII.) ad (z) ejus vim totam elaſticam ut *HL* — *KN* ad V, hoc eſt (cum punctum *K* jam incidat in *P*) ut (a) *HK* ad V: & (b) vis illa tota, hoc eſt pondus incumbens, quo lineola *EG* comprimitur, eſt ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo A ad (c) lineolæ longitudinem *EG*; ideoque ex æquo, vis quâ lineola *EG* in locis ſuis *P* & *S* urgetur, eſt ad lineolæ illius pondus ut *HK* × A ad V × *EG*, ſive ut *PO* × A ad VV, (d) nam *HK* erat ad *EG* ut *PO* ad V. Quare cùm tempora, quibus æqualia corpo-



(x) * *Sint in ſubduplicata ratione longitudinis pendulorum* (472. lib. 1.).

(y) * *Et longitudo penduli æquetur dimidio arcui cycloidis totius*; per cor. Prop. L. & Cor. 2. Prop. LII. lib. 1.

(z) * *Ad ejus vim totam elaſticam* in loco E G ubi medium quieſcit, ut &c.

(a) * *Ut HK ad V.* Cùm punctum K incidit in P, evaneſcit KN & fit H L — K N = H L = H K, per cor. 1. lem. VII. lib. 1.

(b) * *Et vis illa tota, hoc eſt, pondus incumbens, quo &c.* Vis elaſtica tota partis E G eſt in æquilibrio cum pondere comprimente, ubi medium quieſcit.

(c) * *Ad lineolæ longitudinem* E G. Cùm enim medium homogeneum, cujus altitudo eſt A, ſit (*per hyp.*) ejuſdem denſitatis cum medii parte E G, pondera ſunt ut volumina, hoc eſt, ut lineæ A & E G.

(d) * *Nam H K erat ad E G ut P O ad V*, in Dem. Prop. XLVII.

ra per æqualia ſpatia impelluntur, ſint (e) reciprocè in ſubdu- DE MOTU CORPORUM.
plicatâ ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente LIBER SECUND.
vi illâ elaſticâ, ad tempus vibrationis, urgente vi ponderis, in SECT. VIII.
ſubduplicata ratione V V ad $PO \times$ A, atque (f) ideo ad tem- PROP. XLIX.
pus oſcillationis penduli cujus longitudo eſt A in ſubduplicatâ PROBL. XI.
ratione V V ad $PO \times$ A, & ſubduplicatâ ratione PO ad A conjunctim; id eſt, in ratione integrâ V ad A. Sed tempore vibrationis unius ex itu & reditu compoſitæ, pulſus progrediendo conficit latitudinem ſuam BC. Ergo tempus, quo pulſus percurrit ſpatium BC, (g) eſt ad tempus oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, ut V ad A, id (h) eſt, ut BC ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A. Tempus autem, quo pulſus percurret ſpatium BC, eſt ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in (k) eâdem ratione; ideòque tempore talis oſcillationis pulſus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas pulſuum ea eſt, quam acquirunt gravia æqualiter accelerato motu cadendo, & caſu ſuo deſcribendo dimidium altitudinis A. Nam tempore caſus hujus, cum velocitate cadendo acquiſitâ, pulſus percurret ſpatium (l) quod erit æqua-

(e) * *Sint reciprocè in ſubduplicatâ ratione virium.* Patet per cor. 3. prop. XXIV. libri hujus.

(f) * *Atque ideo ad tempus &c.* Patet per compoſitionem rationum & ex æquo; quia (*ex demonſtratis*) tempus unius vibrationis particulæ E F, urgente vi ponderis ipſius, eſt ad tempus oſcillationis penduli cujus longitudo eſt A, in ſubduplicatâ ratione P O ad A.

(g) * *Eſt ad tempus oſcillationis unius & itu & reditu compoſitæ*, penduli cujus longitudo eſt A.

(h) * *Id eſt, ut B C ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A.* Nam (in demonſtr. prop. XLVII.) erat V radius circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo B C; unde eſt V ad A ut B C ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A.

(k) * *In eâdem ratione.* Quoniam tempus quo pulſus percurrit ſpatium B C; eſt ad tempus datum oſcillationis integræ penduli cujus longitudo A, datis medii denſitate & vi elaſticâ datâ, eſt ut ſpatium B C ad datam peripheriam circuli radio A deſcripti; liquet, quod tempus, quo pulſus percurrit ſpatium B C, aut eadem celeritate percurreret datam peripheriam circuli radio A deſcripti, fore eis ſpatiis proportionalem. Quare tempus quo pulſus percurrit ſpatium B C, eſt ad tempus oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ penduli cujus longitudo eſt A, ut tempus quo pulſus percurrit idem ſpatium B C, ad tempus quo percurrit longitudinem æqualem circumferentiæ circuli cujus radius eſt A; Ideoque tempore talis oſcillationis pulſus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. 318.

(l) * *Quod erit æquale toti altitudini A* (30. lib. 1.)

æquale toti altitudini A; ideoque tempore oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ percurret ſpatium æquale circumferentiæ circuli radio A deſcripti: eſt (m) enim tempus caſûs ad tempus oſcillationis ut radius circuli ad ejuſdem circumferentiam.

Corol. 2. Unde cum altitudo illa A ſit ut fluidi vis elaſtica directè & denſitas ejuſdem inverſè; (n) velocitas pulſuum erit in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione denſitatis inverſè & ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ directè.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XII.

Invenire pulſuum diſtantias.

Corporis, cujus tremore pulſus excitantur, inveniatur numerus vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur ſpatium quod pulſus eodem tempore percurrere poſſit, & pars inventa (o) erit pulſus unius latitudo. *Q. E. I.*

Scho-

(m) * *Eſt enim tempus caſûs*, per dimidiam altitudinem A ad tempus oſcillationis unius ex ſolo itu, vel ſolo reditu conſtantis, ut diameter circuli ad ejus circumferentiam (470. lib. 1.), ideóque ad tempus duplum oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, ut radius circuli ad ejus circumferentiam. Quare cùm velocitates uniformes ſint ut ſpatia eodem tempore deſcripta, pulſus verò propriâ velocitate æquabili peripheriam circuli radio A deſcripti tempore oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ percurrat, & grave cum uniformi velocitate, quam acquirere poteſt cadendo per dimidiam altitudinem A, eodem tempore idem ſpatium deſcribat; patet velocitates illas pulſûs & gravis eſſe æquales.

(n) * *Velocitas pulſuum erit &c.* Velocitas pulſuum, ut pote æqualis (*per cor.* 1.) velocitati quam gravia per dimidiam altitudinem A cadendo acquirunt, eſt in ratione ſubduplicatâ altitudinis illius A (28. lib. 1.); Sed altitudo A medii homogenei, cujus denſitas eadem eſt cum denſitate medii E G & pondus in æquilibrio cum ejuſdem medii E G vi elaſticâ, manente denſitate eſt ut pondus ſeu ut vis elaſtica directè, & manente vi elaſticâ ſeu pondere eſt ut denſitas inverſè, quia denſitas eſt ſemper ut pondus directè & volumen ſeu altitudo A inverſè; & propterea conjunctis his rationibus altitudo A eſt ſemper in ratione compoſitâ ex ratione vis elaſticæ directè & ratione denſitatis inverſè. Quare velocitas pulſuum erit in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione denſitatis inverſè & ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ directè.

(o) * *Erit pulſus unius latitudo.* Quoniam pulſus omnes uniformi cum velocitate propagantur (*ex dem. Prop.* XLVIII. & XLIX.) & tot pulſus æquales producuntur in aëre, quot ſunt corporis tremuli vibrationes iſochronæ ex itu & reditu compoſitæ (*per cor. Prop.* XLVII.); Si ſpatium quod pulſus ſeu ſonus dato tempore percurrere poſſit, per numerum vibrationum, quas corpus ſonorum eodem tempore perficit, dividatur, quotus erit pulſûs unius latitudo. Sed dato ſono, numerus vibrationum quas corpus ſonorum dato tempo-

re

Scholium.

Spectant propoſitiones noviſſimæ ad motum lucis & ſonorum. (p) Lux enim cùm propagetur ſecundum lineas rectas, in actione ſolâ (*per prop.* XLI. & XLII.) conſiſtere nequit. Soni verò propterea quod à corporibus tremulis oriantur, nihil aliud ſunt quam aëris pulſus propagati *per prop.* XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, ſi modo vehementes ſint & graves, quales ſunt ſoni tympanorum. (q) Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & ſonos quoſvis, in chordas corporibus ſonoris uniſonas impactos, excitare tremores notiſſimum eſt. Confirmatur etiam ex velocitate ſonorum. Nam cùm pondera ſpecifica aquæ pluvia-

re peragit, invenitur (per formulas 303, 304); Si nimirum chorda muſica ad uniſonum vel ad notam conſonantiam cum ſono dato reducatur. Cùm enim tonorum differentia à numero vibrationum quas corpus reſonum dato tempore abſolvit, pendeat (308 & 312); iidem toni eodem vibrationum iſochronarum numero producuntur. Notum verò eſt ſpatium quod ſonus dato tempore deſcribit (318).

Exempli causâ, ſi ſonus omnium acutiſſimus, quem poſſimus diſtinguere, vibrationibus integris 6400 tempore minuti unius ſecundi abſolutis producatur, & omnium graviſſimus vibrationibus $12\frac{1}{2}$ excitetur, uti D. *Sauveur* in Hiſtoria Acad. Scient. Pariſ. an. 1700. arbitratus eſt; divide ſpatium 1142. pedum Londinenſium, quod ſonus tempore minuti unius ſecundi conficit, per numeros 6400. & $12\frac{1}{2}$ ſucceſſivè, & quoti, videlicet digiti 2, 14, & pedes 91, 36, erunt latitudines pulſuum, quibus ſoni acutiſſimus & graviſſimus producuntur.

(p) * *Lux enim cùm propagetur ſecundùm lineas rectas*, & interpoſitis corporibus opacis intercipiatur, in actione ſolâ, ſeu preſſione, motuve per medium quodlibet fluidum propagato, conſiſtere nequit; quia preſſio & motus per medium omne fluidum propagata divergunt à recto tramite in ſpatia immota & pone obſta- 318.
cula circumquaque diffunduntur, per prop. citatas. Cùm igitur lumen ſit corpus, ut pote motu progreſſivo præditum, ab obſtaculis reflexum & refractum, motumque in corporibus quæ inflammat excitans, neceſſe eſſe videtur ut à corporibus luminoſis tenuiſſima corpuſcula incredibili fere velocitate quaquaverſum emittantur. Spatia igitur cœleſtia, quæ aſtrorum omnium Lux immenſâ illâ celeritate permeat, materiâ quâdam æthereâ denſiſſimâ, quæ radiorum lucis motum interciperet, plena eſſe non poſſunt.

(q) 319. * *Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur.* Corpora enim majora & minus elaſtica majoribus ſoni gravioris, cum quo conſonare poſſunt, vibrationibus facilius concutiuntur & congruenter ad pulſuum motum agitantur; nam debet eſſe proportio quædam inter pulſuum aëris latitudinem & corporum circumjectorum magnitudinem, denſitatem & vim elaſticam, ut ſonus iis communicetur; & quo fibræ breviores ſunt, tenuiores & magis tenſæ, eo facilius acuto ſono ſeu brevioribus aëris pulſibus agitantur & contremunt. Quæ omnia patent per notam 317.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. L. PROBL. XII.

vialis & argenti vivi ſint ad invicem ut 1 ad $13\frac{2}{3}$ circiter, & ubi mercurius in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus ſpecificum aëris & aquæ pluvialis ſint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: (r) erunt pondera ſpecifica aëris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Proinde cum altitudo argenti vivi ſit 30 digitorum, altitudo aëris uniformis, cujus pondus aërem noſtrum ſubjectum comprimere poſſet, erit 356700 digitorum, ſeu pedum *Anglicorum* 29725. Eſtque hæc altitudo illa ipſa quam in conſtructione ſuperioris problematis nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum deſcripti (ſ) circumferentia eſt pedum 186768. Et cùm pendulum digitos $39\frac{1}{5}$ longum oſcillationem ex itu & reditu compoſitam tempore minutorum duorum ſecundorum, uti notum eſt, (t) abſolvat; pendulum pedes 29725 ſeu digitos 356700 longum (u) oſcillationem conſimilem tempore minutorum ſecundorum $190\frac{3}{4}$ abſolvere debebit. Eo igitur tempore ſonus progrediendo (x) conficiet pedes 186768, ideoque tempore minuti unius ſecundi pedes 979.

Cæterum in hoc computo nulla habetur ratio craſſitudinis ſolidarum particularum aëris, per quam ſonus utique (y) propagatur in inſtanti. Cum pondus aëris ſit ad pondus aquæ ut 1 ad

(r) * *Erunt*, ex æquo & per compoſitionem rationum, pondera ſpecifica ſive denſitates aëris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Sed fluidorum in ſe homogeneorum, eidem baſi incumbentium, & in æquilibrio conſiſtentium altitudines ſunt inversè ut denſitates (173. *lib.* 2.): eſt igitur 1 ad 11890 ut 30 digit. ad altitudinem aëris uniformis qui cum 30 digitis argenti vivi æquiponderat; & ideo altitudo hæc eſt digitorum 356700, ſeu, dividendo per 12, pedum Anglicorum 29725.

(ſ) * *Circumferentia eſt pedum* 186768. Eſt enim radius ad circumferentiam ut 113 ad 710, ſive ut 29725 ad 186768 quàm proximè.

(t) * *Abſolvat*. Pendulum cujus longitudo eſt pedum Pariſienſium 3 & linearum $8\frac{1}{2}$, oſcillationem unam ex itu & reditu compoſitam tempore minutorum duorum ſecundorum abſolvit (471. lib. 1.); & pes Londinenſis eſt ad pedem Pariſienſem ut 15 ad 16 quam proximè, & ita ſunt pedes 3 cum lineis $8\frac{1}{2}$ ad digitos $39\frac{1}{8}$, vel $39\frac{1}{5}$ quam proximè.

(u) * *Oſcillationem conſimilem tempore &c.* Oſcillationum tempora ſunt in ſubduplicatâ ratione longitudinis pendulorum (472. lib. 1.), & propterea ut $39\frac{1}{5}$ ad 356700, ita 4 ad quadratum numeri minutorum ſecundorum, qui quæritur, & peracto calculo invenitur eſſe $190\frac{3}{4}$ quam proximè.

(x) * *Conficiet pedes &c.* Per Prop. XLIX.

(y) * *Propagatur in inſtanti.* Nam corpus ſolidum quod condenſari non poteſt, dum movetur, totum ſimul movetur, & ideo motus ab uno corporis illius extremo

ad 870, & ſales ſint fere duplo denſiores quàm aqua; ſi particulæ aëris ponantur eſſe ejuſdem circiter denſitatis cum particulis vel aquæ vel ſalium, & raritas aëris oriatur ab intervallis particularum: (z) diameter particulæ aëris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979, quos ſonus tempore minuti unius ſecundi juxta calculum ſuperiorem conficiet, addere licet pedes $\frac{979}{9}$. ſeu 109 circiter, ob craſſitudinem particularum aëris: & ſic ſonus tempore minuti unius ſecundi conficiet pedes 1088 circiter.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. L. PROBL. XII.

His adde quod vapores in aëre latentes, cùm ſint alterius ela-

mo ad alterum extremum propagatur in inſtanti.

(z) * *Diameter particulæ aëris erit &c.* Fingantur cubi duo æquales, quorum alter aëre plenus ſit, alter medio continuo ejuſdem circiter denſitatis cum aquâ vel ſalibus. Hoc medium continuum diviſum ſit in particulas æquales, tenuiſſimas & ſeſe mutuo contingentes; aër verò ex hujuſmodi particulis, quæ æqualibus intervallis diſtinctæ ſint, conſtet. Harum particularum diameter dicatur D, ſpatium inter illas in aëre interceptum S, & ideo intervallum inter centra particularum aëris $S + D$, numerus particularum aëris in uno cubi latere N, & proinde earum numerus in cubo toto aëreo N^3, & latus cubi $NS + ND$. Sit M numerus particularum alterius medii continui in uno latere cubi, & propterea M^3 earum numerus in cubo toto, ac MD cubi latus. Quia duo cubi æquales ſupponuntur, erit $NS + ND = MD$. Si denſitas aëris ſit ad denſitatem alterius medii continui ut 1 ad A; quia paribus voluminibus, denſitates ſunt ut quantitates materiæ, quæ ſunt ut numeri particularum magnitudine & denſitate æqualium, erit $1 : A = N^3 : M^3$, & hinc $1 : A^{\frac{1}{3}} = N : M$, ideoque $M = NA^{\frac{1}{3}}$. Quare cùm ſit $NS + ND = MD = NDA^{\frac{1}{3}}$, erit $S + D = DA^{\frac{1}{3}}$; & $S = D \times [A^{\frac{1}{3}} - 1]$, idéoque $D : S = 1 : A^{\frac{1}{3}} - 1$ ac $D : S + D = 1 : A^{\frac{1}{3}}$. 318 Jam ſi ponatur A fere æqualis numero 870, erit fere $A^{\frac{1}{3}} = 9$; ſi verò ponatur $A = 1000$, vel $A = 1100$, vel $A = 1200$, erit fere $A^{\frac{1}{3}} = 10$; unde diameter D ſolidæ particulæ aëris erit ad intervallum $S + D$ inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum S inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ſpatium totum quod particulæ ſolidæ in lineâ rectâ datâ poſitæ occupant, erit ad ſpatium reliquum quod intervalla particularum in eâdem lineâ tenent, ut 1 ad 8 vel 9 circiter, & ad totam lineam ut 1 ad 9 vel 10. Sed ſi nulla habeatur ratio craſſitudinis ſolidarum particularum aëris, ſonus lineam rectam pedes 979 longam tempore minuti unius ſecundi deſcribit: quare cùm ſonus per ſpatium totum quod ſolidæ particulæ aëris occupant, in inſtanti propagetur, & ſit 9 ad 1 ut linea pedes 979 longa ad ipſius partem quam particulæ ſolidæ aëris occupant; partem illam, quæ eſt $\frac{979}{9}$, ſeu 109 pedum circiter, addere licet ſpatio 979 pedum.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. L. PROBL. XII.

elateris & alterius toni, (a) vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri quo ſoni propagantur. His autem quieſcentibus, motus ille celerius propagabitur per ſolum aërem verum, idque in ſubduplicatâ ratione minoris materiæ. Ut ſi atmoſphæra conſtet ex decem partibus aëris veri & unâ parte vaporum, motus ſonorum celerior erit in ſubduplicatâ ratione 11 ad 10, vel in integrâ circiter ratione 21 ad 20, quam ſi propagaretur per undecim partes aëris veri: ideoque motus ſonorum ſupra inventus, augendus erit in hâc ratione. Quo pacto ſonus, tempore minuti unius ſecundi, conficiet pedes 1142.

Hæc ita ſe habere debent tempore verno & autumnali, ubi aër per calorem temperatum rareſcit, & ejus vis elaſtica nonnihil intenditur. At hyberno tempore, ubi aër per frigus condenſatur, & ejus vis elaſtica remittitur, motus ſonorum tardior eſſe debet in ſubduplicatâ ratione denſitatis; & viciſſim æſtivo tempore debet eſſe velocior.

Conſtat autem per experimenta quod ſoni tempore minuti unius ſecundi eundo conficiunt pedes *Londinenſes* plus minus 1142, *Pariſienſes* vero 1070.

Cognitâ ſonorum velocitate innoteſcunt etiam intervalla pulſuum. (b) Invenit utique *D. Sauveur*, factis à ſe experimentis, quod fiſtula aperta, cujus longitudo eſt pedum *Pariſienſium* plus minus quinque, ſonum edit ejuſdem toni cum ſono chor-

dæ

(a) * *Vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri quo ſoni propagantur.* Nam vibratorius particularum aëris motus, quo ſonus producitur, corporibus ejuſdem toni facile, at corporibus alterius elateris & alterius toni ægrè aut nullo modo communicari poteſt (317). Unde ſi atmoſphæra conſtet ex decem partibus aëris veri & unâ parte vaporum, ſitque proinde totum pondus atmoſphæræ ad pondus vaporum ut 11 ad 1, & ad pondus aëris veri, ſubducto pondere vaporum, ut 11 ad 10, minuenda eſt quantitas materiæ movendæ in ratione 11 ad 10. Sed ſi denſitas medii, ſive quantitas materiæ ſub dato volumine contentæ, cæteris paribus, minuatur, velocitas ſoni augetur in eâdem ratione ſubduplicatâ (*per prop.* XLVIII). Quare (*in hyp. Newt.*) velocitas ſoni augenda eſt in ratione ſubduplicatâ 10 ad 11, vel in integrâ circiter ratione 20 ad 21; & ideo ſpatium dato tempore minuti unius ſecundi deſcriptum, quod erat 1088 pedum, augendum in ratione 20 ad 21. Eſt autem fere 20 ad 21 ut 1088 ad 1142.

(b) * *Invenit utique D. Sauveur* in Hiſtoriâ Acad. Scient. Pariſ. an. 1700.

dæ quæ tempore minuti unius ſecundi (c) centies recurrit. Sunt igitur pulſus plus minus centum in ſpatio pedum *Pariſienſium* 1070, quos ſonus tempore minuti unius ſecundi percurrit; ideoque pulſus unus occupat ſpatium pedum *Pariſienſium* quaſi $10\frac{7}{10}$, id eſt, duplam circiter longitudinem fiſtulæ. (d) Unde veroſimile eſt quod latitudines pulſuum, in omnium apertarum fiſtularum ſonis, æquentur duplis longitudinibus fiſtularum.

Por-

(c) * *Centies recurrit*, hoc eſt centum oſcillationes ex itu & reditu compoſitas tempore minuti unius ſecundi abſolvit. Idem D. *Sauveur* in Monumentis Acad. Pariſ. an. 1713. oſcillationes 101 vel 102 pro ejuſdem fiſtulæ ſono poſuit.

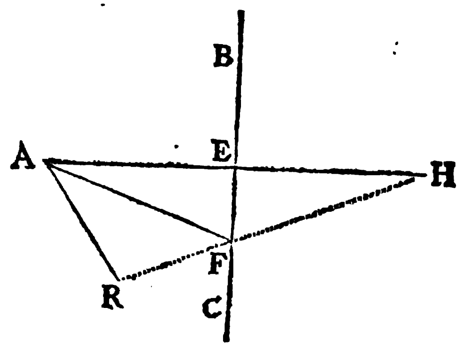
(d) * *Unde veroſimile eſt &c.* Idem confirmatur alio experimento ejuſdem D. *Sauveur*, qui loco mox citato invenit quod fiſtula aperta, cujus longitudo eſt pedum Pariſienſium plus minus 2, ſonum edit ejuſdem toni cum ſono chordæ quæ 243 oſcillationes integras tempore minuti unius ſecundi perficit. Unde ſi dividatur numerus 1070 per 243, prodit pulſus unius latitudo ped. Pariſ. $4\frac{2}{5}$ circiter, id eſt, dupla circiter longitudo fiſtulæ. Eſt autem in organis pneumaticis fiſtula aperta, quæ patet in ſuperiori & latiori extremo, alteri quo aër fiſtulam ingreditur, oppoſito. Si occludatur fiſtula, octavâ gravius ſonat.

Huc uſque de ſono directo plura diximus, de reflexo pauca adjungenda ſunt.

320. *Prop.* Sonus percipitur tanquam ex eo loco procedens ex quo quaſi centro pulſus aëris propagantur. Conſtat experientiâ.

321. *Cor.* 1. Hinc ſi ſonus è centro quovis A directe propagatus in obſtaculum planum ſatis magnum B C incurrat, & ex A ducatur ad B C perpendicularis A E, producaturque ad H ut ſit E H æqualis A E; ſonus reflexus eodem fere modo percipietur ac ſi ex loco H tanquam centro directè propagaretur (194).

322. *Cor.* 2. Similiter ſi ſonus à centro quovis propagatus in obſtaculum quod-



libet impingat, à quo ita reflectatur ut poſt reflexionem radii ſoni in centrum aliud convergant; ſonus reflexus tanquam ex hoc ſecundo centro propagatus audietur. 322.

323. *Cor.* 3. Unde ſi radii ſonori ſatis denſi ad aurem appellentes & ſoni unius ſenſationem producentes, ab aure in diverſa centra convergant; locus ex quo ſonus propagatur, non bene diſtinguetur.

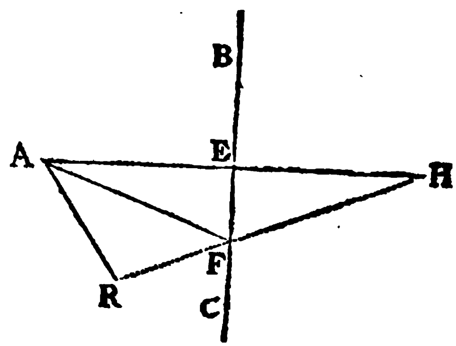
324. Si ſonus producatur in A, & deinde ab obſtaculo quovis B C (*vide fig. ſup.*) reflectatur tanquam ex centro H propagatus; auditor in loco R ſonum directum per A R propagatum percipiet primùm; deinde ſonum reflexum quaſi ex centro H procedentem, poſtquam motu directo ſpatium A F, & motu reflexo ſpatium F R deſcripſit, audiet. Idem igitur ſonus audietur bis, modò tamen diſtantiarum A R & A F R differentia tanta ſit ut ſonus directus & ſonus reflexus eodem ſenſibili momento organum auditûs non afficiant; nam ſi ſonus reflexus ad aurem perve-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. L. PROBL. XII.

Porro cur ſoni ceſſante motu corporis ſonori ſtatim ceſſant, neque diutius audiuntur ubi longiſſimè diſtamus à corporibus ſonoris, quàm cùm proximè abſumus, patet ex corollario propoſitionis XLVII. libri hujus. Sed & cur ſoni in tubis ſtentorophonicis valde augentur, ex allatis principiis manifeſtum eſt. Motus enim omnis reciprocus ſingulis recurſibus à causâ generante augeri ſolet. Motus autem in tubis dilatationem ſonorum impedientibus, tardius amittitur & fortius recurrit, & propterea à motu novo ſingulis recurſibus impreſſo magis augetur. Et hæc ſunt præcipua phænomena ſonorum.

SEC-

niret eo tempore, quo ſoni directi impreſſio adhuc in eâ perſeverat, non geminus, ſed intentior tantùm ſonus audiretur. Porrò experientiâ conſtat ſonos vix poſſe diſtingui; ſi plures quàm 9 circiter ſyllabæ tempore minuti unius ſecundi ſucceſſivè producantur; & ideo ne ſonus reflexus cum directo confundatur, inter eorum ad aurem appulſus intercedere oportet partem nonam minuti unius ſecundi, quo tempore ſonus deſcribit ſpatium 127 pedum Londinenſium circiter. Hoc igitur ſpatio minor eſſe non debet diſtantiarum A R & A F R differentia, ut ſonus reflexus diſtinctè percipi poſſit in R. Quod ſi auditor in A locetur, ubi ſonus directus producitur, & ſpatium 2 A E quod ſonus deſcribit ut ad centrum A poſt reflexionem in E redeat, ſit 127 pedum Londinenſium, ideoque A E 63 vel 64 pedum circiter, diſtingui poterit ſonus reflexus à directo. Si plura ſint obſtacula juſtis intervallis diſſita, in quæ ſonus directe offendat; is quaſi ex variis locis pluries repetitus audietur; ut cum machinarum bellicarum fragorem vel tonitru boatum circumjecta ædificia vel craſſiores nubes pluries referunt. Sæpe etiam obſtacula ſonum directum mutant, dum vehementiori aëris tremore concuſſa variè contremunt & aerem repercutiendo detonant.



325. Ex iiſdem principiis explicari poteſt tubæ vocalis ſeu ſtentorophonicæ efficacia ad vocem articulatam in loca maxime diſſita propagandam. Sunt hujuſmodi tubæ variarum figurarum, ſed omnes ſatis anguſtæ, oblongæ & intus perpolitæ; quo ſonus in arctum coactus in latius ſpatium ſeſe diffundere & virium detrimentum pati prohibeatur, ac radii ſonori in determinatam plagam confertiores dirigantur. Fabrefiunt ex materiâ ad concipiendum motum tremulum, quo ſonus producitur, aptâ, ut ſonus hoc partium tubæ & aëris ab ipſis agitati tremulo motu multiplicatus impetum majorem acquirat & longius progrediendi vim habeat. Optima tubarum vocalium figura, Auctore Clar. *Joh. Matthia Haſio*, illa cenſetur, quæ fit ex converſione parabolæ circa ipſius axem, orificio exiguo tubæ, quod os loquentis ſuſcipit, in ipſo foco parabolæ conſtituto. Hâc enim tubâ radii ſonori, ſaltem magnam partem, reflectuntur ad axem tubæ paralleli (194. *lib.* 2. & *Theor.* 3. *de parabola* lib. 1.). Idem Ha-

ſius,

SECTIO IX.

De motu circulari fluidorum.

HYPOTHESIS.

Reſiſtentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, proportionalem eſſe velocitati, quâ partes fluidi ſeparantur (e) *ab invicem.*

ſius, quo tubam longiorem, non nimium auctâ amplitudine, reddat, tubum ellipticum oblongum parabolico ita jungit, ut elliptici focus unus concidat cum foco parabolici, & os loquentis in altero elliptici foco conſtituatur; quâ ratione fit ut radii ſoni ab ore in tubo elliptico ad focum parabolici partim directi, partim reflexi dirigantur (*per theor. 4. de ellipſi*), & deinde in tubo parabolico, ut modò dictum eſt, progrediantur. Limbus tubæ, qua parte ampliſſima eſt, quâque ſonus emittitur, ad formam labiorum recurvandus eſt, quo minus effectum tubæ turbare poſſit aëris externi in tubam irruentis motus. Hæc omnia fusè & accuratè expoſita vides, in ipſa laudati Auctoris Diſſertatione Phyſico-Mathematicâ de tubis ſtentoreis.

* Tubis ſtentoreis annumerandæ ſunt omnes tubæ militares aut venatoriæ ſive rectæ ſive incurvæ, exiguus enim ſibilus quem edit tubicen conſtricto aëre inter labium & tubæ oram, in prodigioſum erumpit ſonum, & obſervabile videtur ea inſtrumenta ita à Parabolâ diſcrepare ut axis ſuæ reſpectu convexa potius ſit tuba 325.
quàm concava. Incrementum itaque ſoni non tam pendere videtur ex eo quod ſonus ſecundùm axis tubæ directionem parallelus exeat, quàm ex eo ipſo quod indicat NEWTONUS, nempe ex motus reciprocatione, ita ut forma tubæ ea eſſe debeat ut ſonus ab uno pariete ad alterum repellatur, extrinſecus ſonum derivando, ita tamen ut nonniſi per innumeras reflexiones ſive reciprocationes foras emittatur.

(e) * *Ab invicem.* Reſiſtentia quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, eſt ſemper eadem in ſpatiis æqualibus, quæcumque fuerit mobilis velocitas; cùm in omnibus ſpatiis æqualibus idem defectus lubricitatis ſuperandus ſit. Eſt igitur hæc reſiſtentia, cæteris paribus, ut ſpatium quod mobile deſcribit, hoc eſt, dato tempore, ut velocitas. Quia verò partes contiguæ quæ ſimul pari velocitate moventur, ſeſe mutuo non atterunt; capienda hic eſt velocitas partium relativa, quâ partes ſeparantur ab invicem. Sed de hâc hypotheſi vide Scholium ſequens.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XXXIX.

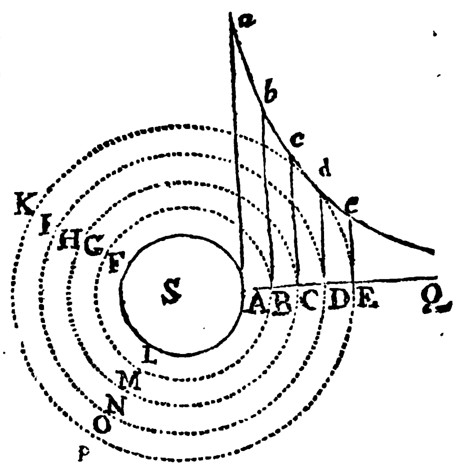
Si cylindrus ſolidus infinitè longus in fluido uniformi & infinito circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur fluidum in orbem, perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo; dico quod tempora periodica partium fluidi ſunt ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri.

Sit *AFL* cylindrus uniformiter circa axem *S* in orbem actus, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. diſtinguatur fluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos ſolidos ejuſdem craſſitudinis. Et quoniam homogeneum eſt fluidum, impreſſiones contiguorum orbium in ſe mutuo factæ erunt (per hypotheſin) ut (a) eorum tranſlationes ab invicem, & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in orbem aliquem major eſt vel minor ex parte concavâ quam ex parte convexâ; prævalebit impreſſio fortior, & motum orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unuſquiſque in motu ſuo uniformiter perſeveret, debent impreſſiones ex parte utrâque ſibi invicem æquari & fieri in re-

giones

(a) 326. * *Ut eorum tranſlationes ab invicem & ſuperficies contiguæ &c.* Si ſuperficies contiguæ nullâ velocitate relativâ inter ſe moverentur, aut ſi eſſent perfectè lubricæ, nulla foret earum frictio: at ſi ſuperficies ſint aſperæ & alia ſuper aliam incedat, naſcetur ex partium attritu reſiſtentia, quæ, dato tempore & cæteris paribus, velocitati ſuperficierum relativæ proportionalis eſt (*per hyp.*). Unde ſi ſuperficies contiguæ, homogeneæ & æqualis ubique aſperitatis ſe ſe viribus æqualibus premant, & præterea ſuperficies quæ ſuper alias ſibi contiguas incedunt, æquales ſint; reſiſtentiæ ex attritu dato tempore genitæ proportionales erunt tranſlationibus ſuperficierum contiguarum ab invicem, cùm hujuſmodi tranſlationes ſint ſpatia velocitatibus relativis dato tempore deſcripta. Si verò tranſlationes illæ ſeu velocitates relativæ ſuperficierum contiguarum ponantur æquales; reſiſtentiæ, cæteris paribus, erunt ut ſuperficies contiguæ quæ ſeſe mutuo atterunt. Quare ſi nec ſuperficies contiguæ, nec earum velocitates relativæ ſeu tranſlationes ab invicem æquantur; reſiſtentiæ, cæteris paribus, erunt in ratione compoſitâ ex ratione ſuperficierum contiguarum & ratione tranſlationum ab invicem dato tempore factarum. Impreſſiones verò contiguorum orbium in ſe mutuo factæ, ſunt ut reſiſtentiæ quibus producuntur.

giones contrarias. (b) Unde cum impreſſiones ſunt ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem, erunt tranſlationes inversè ut ſuperficies, hoc eſt, inversè ut ſuperficierum diſtantiæ ab axe. (c) Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directè & diſtantiæ inversè; hoc eſt, conjunctis rationibus, ut quadrata diſtantiarum inversè. Quarè ſi ad infinitæ rectæ *SABCDEQ* partes ſingulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. ipſarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. quadratis reciprocè proportionalia, & per terminos perpendicularium duci intelligatur (d) linea curva hyperbolica; erunt ſummæ differentiarum,



(b) * *Unde cùm* (per hyp.) orbis unuſquiſque in motu ſuo uniformiter perſeveret, & proinde impreſſiones ex utraque parte cujuſque orbis in plagas contrarias factæ æquales ſint; impreſſiones illæ, dato tempore, datæ ſunt, & ideo ratio compoſita ex rationibus tranſlationum & ſuperficierum contiguarum, quæ eſt ut impreſſio, data eſt. Tranſlationes igitur dato tempore factæ, ſunt inversè ut ſuperficies, hoc eſt, inversè ut ſuperficierum diſtantiæ ab axe: nam cylindrorum ejuſdem longitudinis ſuperficies ſunt ut diſtantiæ ab axe cylindri, & hic omnes ſuperficies cylindricæ; quæ circa axem infinitum revolvuntur, ſunt ejuſdem longitudinis infinitæ (per hyp.).

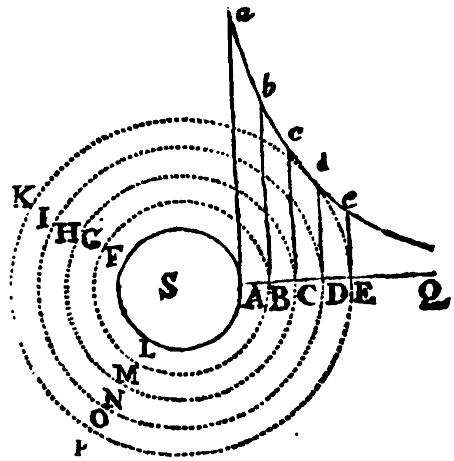
(c) * 327. *Sunt autem differentiæ motuum angularium &c.* Motus angulares dicuntur ii, quibus ſingula puncta A, B, C, D, E &c. radiis ad axem cylindri perpendiculariter ductis angulos deſcribunt. Sunt igitur anguli illi quaſi ſpatia unifor-
mi motu deſcripta, & ideo motus angula- 327.
res ſunt ut anguli deſcripti directè & tempora quibus deſcribuntur inversè, & dato tempore ſunt ut anguli deſcripti. Hinc, dato tempore, motuum angularium differentiæ ſunt ut differentiæ angulorum deſcriptorum, hoc eſt (154. *lib.* 1.) ut tranſlationes punctorum ſeu ſuperficierum ab invicem directè & diſtantiæ ab axe inversè: nam tranſlationes illæ ſunt arcus circulares quos ſingula puncta per ſuam velocitatem relativam deſcribunt, & diſtantiæ ab axe ſunt illorum arcuum radii. Sed tranſlationes dato tempore factæ, ſunt (*ex demonſtr.*) ut diſtantiæ ab axe inversè. Quarè differentiæ motuum angularium, dato tempore, ſunt ut quadrata diſtantiarum inversè.

(d) * *Linea curva hyperbolica.* Quoniam ordinatæ A a, B b, &c. ſunt inversè ut abſciſſarum S A, S B, &c. quadrata; creſcente abſciſsâ ac ſine fine productâ, correſpondens ordinata decreſcit &

num-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IX. PROP. LI. THEOR. XXXIX.

tiarum, (e) hoc eſt, motus toti angulares, ut reſpondentes ſummæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, id eſt, ſi ad conſtituendum medium uniformiter fluidum, orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut areæ hyperbolicæ his ſummis analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. Et (f) tempora motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Eſt igitur tempus periodicum particulæ cujuſvis *D* reciprocè ut area *DdQ*, hoc eſt (per notas curvarum quadraturas) (g) directè ut diſtantia *SD*. *Q.E.D.*



(h) *Corol.* 1. Hinc motus angulares particularum fluidi ſunt reci-

numquam evaneſcit, & ideo recta S Q eſt curvæ aſymptotus; & ſimili ratione patet rectam per S ductam normaliter ad S Q eſſe alteram curvæ aſymptotum.

(e) * *Hoc eſt, motus toti angulares.* Quoniam ſolo cylindri A F L impulſu agitur fluidum in orbem (*per hyp.*), neceſſe eſt ut motus angularis partium fluidi, creſcente earum diſtantia ab axe cylindri, continuo decreſcat, ac tandem ad diſtantiam infinitam evaneſcat. Unde motus totus angularis puncti A ſeu orbis A F L eſt omnium maximus, & motus totus angularis puncti cujuſlibet C æqualis eſt ſummæ omnium differentiarum motuum angularium punctorum D, E & ſequentium in infinitum (106. *lib.* 1.); ideoque motus toti angulares ſunt ut reſpondentes ſummæ linearum A a, B b, C c, D d, E e &c. in infinitum.

(f) * 328. *Tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia.* Motus angulares ſunt ut anguli deſcripti directè & tempora quibus deſcribuntur inversè (326); & propterea ſi anguli deſcripti capiantur æquales quatuor rectis, ut totus circulus deſcribatur & tempora fiant temporibus periodicis æqualia, motus angulares erunt ut tempora periodica inversè.

(g) * *Directè ut diſtantia SD.* Areæ D d Q momentum eſt D d × D E; & ideo, ob ordinatam D d quadrato abſciſſæ S D reciprocè proportionalem, momentum illud eſt ut $\frac{DE}{SD^2}$, & (*per caſ.* 4. *Lemm.* 2. *libri hujus*) area D d Q eſt ut $\frac{1}{SD}$; quæ quantitas negativa prodit, quia area D d Q abſciſſæ D S non adjacet, ſed ad partes contrarias vergit in infinitum. Eſt igitur tempus periodicum particulæ cujuſvis D reciprocè ut $\frac{1}{SD}$, hoc eſt, directè ut S D.

(h) * *Cor.* 1. Ex demonſtratis, motus angulares partium fluidi ſunt reciprocè ut tempora periodica, hoc eſt, reciprocè ut illa-

reciprocè ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri, & velocitates abſolutæ ſunt æquales.

Corol. 2. Si fluidum in vaſe cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, ſintque revolutionum tempora ut ipſorum ſemidiametri, & perſeveret fluidi pars unaquæque in motu ſuo: (i) erunt partium ſingularum tempora periodica ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quàm retardatur.

Corol. 4. Unde ſi toti cylindrorum & fluidi ſyſtemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, (k) habebitur motus fluidi in cylindro quieſcente.

Co-

illarum diſtantiæ ab axe cylindri. Velocitates verò abſolutæ, ut pote uniformes, ſunt ut circumferentiæ deſcriptæ, ſeu ut diſtantiæ ab axe cylindri directè & tempora periodica inversè, hoc eſt, ut diſtantiæ directè & diſtantiæ inversè, ideoque ſunt in ratione æqualitatis. Hinc verò (*per cor.* 5. *prop.* 4. *lib.* 1.) vires centrifugæ particularum æqualium fluidi ſunt reciprocè ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri; & propterea vis quâ tota ſuperficies cylindrica nititur ab axe cylindri recedere, eſt ut eadem ſuperficies directè & diſtantia ejus ab axe inversè, & ideo data eſt.

(i) * *Erunt partium ſingularum tempora periodica ut &c.* Patet, quia cylindrus exterior uniformi velocitate motus locum tenet ſuperficiei cylindricæ, quæ in demonſtratione adhibita eſt.

(k) * *Habebitur motus fluidi in cylindro quieſcente.* Sit EKP cylindrus exterior, cujus tempus periodicum in hypotheſi Corollarii 2i. dicatur t E; & quoniam in eadem hypotheſi velocitates particularum abſolutæ ſunt æquales (*per cor.* 1.), ſingulæ illæ particulæ ſpatia æqualia eodem tempore t E deſcribent, hoc eſt, ſpatia æqualia peripheriæ E K P, quam punctum E tempore t E percurrit. Jam ſi toti cylindrorum & fluidi ſyſtemati auferatur motus omnis angularis. Cylindri exterioris; Ex ſpatio E K P, quod ſingulæ particulæ tempore t E deſcribunt, auferenda erit integra circuli peripheria, quam particula quælibet ſeorſim deſcribit, ut habeatur ſpatium quod eadem particula eodem tempore t E percurrit in cylindro quieſcente. Erit igitur E K P—D I O ſpatium quod particula quævis D tempore t E deſcribit, poſtquam motus omnis angularis cylindri exterioris ablatus eſt. Quia verò particulæ ſingulæ revolvuntur æquabiliter (*per hyp.*), erit ſpatium EKP—DIO ad D I O, ſive SE—SD ad S D, ut tempus t E ad tempus perio- 327.

Corol. 5. Igitur ſi fluido & cylindro exteriore quieſcentibus; revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius deſinet augeri quam fluidi partes ſingulæ motum corollario quarto definitum (l) acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum ſuum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior niſi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus (m) quoad uſque tempora periodica cylindri utriuſque æquentur inter ſe. Quod ſi cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & niſi cylindrus interior vi aliquâ extrinſecus impreſsâ motum illum conſervet, efficiet ut idem paulatim ceſſet.

Quæ omnia in aquâ profundâ ſtagnante experiri licet.

riodicum particulæ D in cylindro quieſcente; & ideo ſi hoc tempus dicatur T D, erit $TD = \frac{SD \times tE}{DE}$; & ſimili modo tempus periodicum particulæ A in eâdem hypotheſi (quod dicatur T A) $= \frac{SA \times tE}{AE}$; unde habetur $tE = \frac{AE \times TA}{SA}$, & ideo $TD = \frac{SD \times AE \times TA}{SA \times DE}$. Dato igitur tempore periodico cylindri interioris, dabitur tempus periodicum particulæ cujuſvis fluidi in cylindro quieſcente. Quia verò A E, S A & T A datæ ſunt, erit T D ut $\frac{SD}{DE}$, hoc eſt, particularum fluidi tempora periodica ſunt ut diſtantiæ ipſarum ab axe cylindri interioris directè & diſtantiæ earumdem à ſuperficie cilindri quieſcentis inversè.

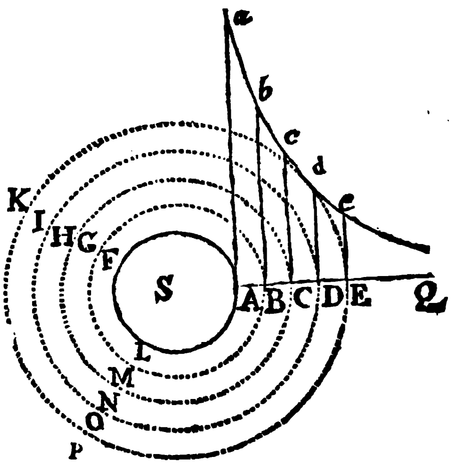
(l) * *Acquirant.* Patet per cor. 3.

(m) * *Quoadusque tempora periodica cylindri utriuſque æquentur.* Tamdiu enim cylindrus interior atterit & urget fluidi partes, motumque ipſis eâ actione communicat qui ad cylindrum exteriorem tranſit, quamdiu omnium partium contiguarum motus angulares inæquales ſunt, ſeu quamdiu tempora periodica non æquantur inter ſe.

PRO-

PROPOSITIO LII. THEOREMA XL.

Si ſphæra ſolida, in fluido uniformi & infinito, circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur fluidum in orbem; perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata diſtantiarum à centro ſphæræ.

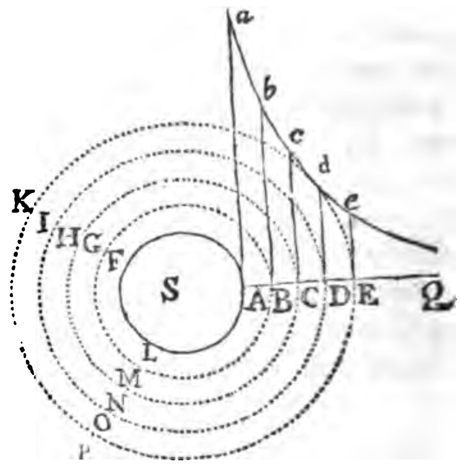


Caſ. 1. Sit *AFL* ſphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *GHN*, *DIO*, *EKP*, &c. diſtinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejuſdem craſſitudinis. Finge autem orbes illos eſſe ſolidos; & quoniam homogeneum eſt fluidum, impreſſiones contiguorum orbium in ſe mutuo factæ, erunt (per hypotheſin) ut eorum tranſlationes ab invicem & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in orbem aliquem major eſt vel minor ex parte concavâ quàm ex parte convexâ; prævalebit impreſſio fortior, & velocitatem orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unuſquiſque in motu ſuo perſeveret uniformiter, debebunt impreſſiones ex parte utrâque ſibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cùm impreſſiones ſint ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem; erunt tranſlationes inversè ut ſuperficies, hoc (n) eſt, inversè ut quadrata diſtantiarum ſuperficierum à centro. Sunt autem differen-

(n) * *Hoc eſt, inversè ut quadrata diſtantiarum ſuperficierum à centro.* Nam ſuperficies ſphæricæ, ut pote ſimiles, ſunt ut quadrata radiorum ſeu diſtantiarum à centro.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IX. PROP. LII. THEOR. XL.

rentiæ motuum angularium circa axem ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directè & diſtantiæ inversè; hoc eſt, conjunctis rationibus ut cubi diſtantiarum inverſe. Quare ſi ad rectæ infinitæ *SABCDEQ* partes ſingulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. ipſarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. cubis reciprocè proportionalia, erunt ſummæ differentiarum, hoc eſt, motus toti angulares, ut reſpondentes ſummæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*: id eſt (ſi ad conſtituendum medium uniformiter fluidum, numerus orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ hyperbolicæ his ſummis analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Eſt igitur tempus periodicum orbis cujuſvis *DIO* reciprocè ut area *DdQ*, hoc eſt, per notas curvarum quadraturas, (o) directè ut quadratum diſtantiæ *SD*. (p) Id quod volui primò demonſtrare.



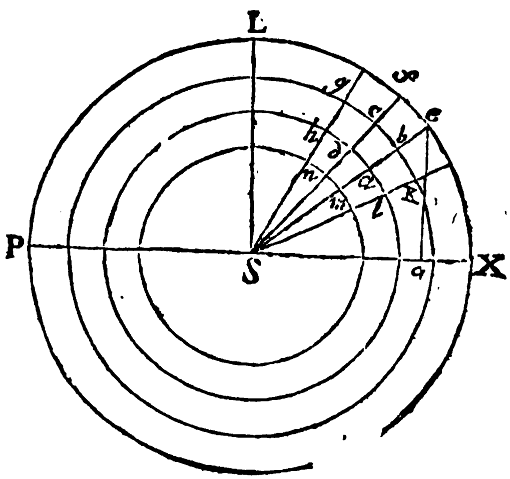
Caſ.

(o) * *Directè ut quadratum diſtantiæ SD.* Areæ DdQ momentum eſt $Dd \times DE$, ideoque, ob ordinatam Dd cubo abſciſſæ SD reciprocè proportionalem, momentum illud eſt ut $\frac{DE}{SD^3}$, & propterea (*per caſ. 4. Lem. 2. libri hujus*) area fluens DdQ eſt ut $\frac{1}{SD^2}$, quæ negativa prodit, quia non adjacet abſciſſæ DS, ſed in plagam contrariam DQ vergit. Eſt igitur tempus periodicum orbis cujuſvis DIQ reciprocè ut $\frac{1}{SD^2}$, hoc eſt; directè ut quadratum diſtantiæ SD.

(p) * *Id quod volui primò demonſtrare.* Caſûs primi demonſtratio valet, ſi medium ſphæræ circumfuſum ex innumeris orbibus ſolidis, tenuiſſimis ac concentricis conſtare fingatur. In caſibus ſecundo & tertio ſinguli illi orbes ſphærici in innumeros annulos, & annuli ſinguli in tenuiſſimas particulas, ad conſtituendum medium fluidum, dividuntur.

(q) *Caſ.* 2. A centro ſphæræ ducantur infinitæ rectæ quàm plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis ſe mutuo ſuperantes; & his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos innumeros ſecari; & annulus unuſquiſque habebit annulos quatuor ſibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non poteſt annulus unuſquiſque, niſi in motu juxta legem caſus primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonſtratione caſus primi. Et propterea annulorum ſeries quælibet à globo in infinitum rectà pergens, movebitur pro lege caſus primi, niſi quâtenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hâc lege facto attritus annulorum ad latera nullus eſt; neque ideo motum, quo minus hâc lege fiat, impediet. Si annuli qui à cen-

(q) * *Caſus* 2. A centro ſphæræ S ducantur rectæ quam plurimæ, longitudine infinitæ S k, S b, S c, S g &c., quæ æquales angulos k S b, b S c, c S g &c. complectantur; & his rectis circa axem P X revolutis & ſuperficies conicas deſcribentibus, concipe orbes in annulos innumeros ſecari. Nam cùm ſuperficies P f e X circa axem P X revolvitur, ſinguli arcus k b, b c, c g, e f, a l, &c. portiones ſuperficierum ſphæricarum annulares deſcribunt, & particula quælibet ut b c d a, deſcribit annulum ſolidum. Annulus unuſquiſque, ut ille qui revolutione ſuperficiei a b c d deſcribitur, habebit annulos quatuor ſibi contiguos, unum interiorem ex revolutione figuræ m a d n, alterum exteriorem ex revolutione figuræ b e f c, & duos laterales ex revolutione figurarum k b a l & c g h d. Attritu interioris & exterioris non poteſt annulus unuſquiſque niſi in motu juxta legem Caſûs primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Alioquin partes fluidi non perſeverarent in motu ſuo uniformiter, ſed intermedius iſte annulus (contra hyp.) in motu ſuo acceleraretur vel retardaretur, ut de orbibus integris oſtenſum eſt in Caſu primo. *Et propterea annulorum ſeries quælibet à globo in infinitum recta pergens* & inter duas proximas ſuperficies conicas comprehenſa, qualis eſt ſeries annulorum quos figuræ m a d n, a b c d, b e f c &c. circa axem P X rotatæ deſcribunt, *movebitur pro lege Caſûs primi, niſi* &c.



327.

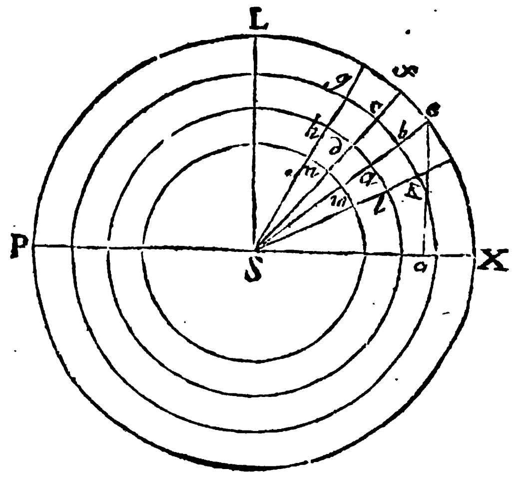
(r) centro æqualiter diſtant, vel citius revolverentur vel tardius (ſ) juxta polos quàm juxta eclipticam; tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & ſic vergerent ſemper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege caſûs primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat ſecundum legem caſus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc eſt, annulorum ſingulorum tempora periodica erunt ut quadrata diſtantiarum ipſorum à centro globi. Quod volui ſecundò demonſtrare.

Caſ. 3. Dividatur jam annulus unuſquiſque ſectionibus tranſverſis in particulas innumeras conſtituentes ſubſtantiam abſolutè & uniformiter fluidam; & quoniam hæ ſectiones non ſpectant ad legem motûs circularis, ſed ad conſtitutionem fluidi ſolummodo conducunt, perſeverabit motus circularis ut prius. His ſectionibus annuli omnes quam minimi aſperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt, (t) aut mutabunt æqualiter. Et manente cauſarum proportione manebit effectuum proportio, hoc eſt, proportio motuum & periodicorum temporum. *Q. E. D.* Cæterum cùm motus circularis, & inde orta vis cen-

(r) * *Qui à centro æqualiter diſtant*; ſeu qui ſunt ex eodem orbe reſecti, quales ſunt annuli ex figurarum l k b a, a b c d, d c g h & revolutione deſcripti.

(ſ) * *Juxta polos* X & P, quam juxta æquatorem, quem recta S E ad axem P X perpendicularis rotata deſcribit.

(t) * *Aut mutabunt æqualiter.* Quoniam enim hæ Sectiones non niſi ad fluiditatem ſingulis annulis conciliandam factæ ſunt, & fluidum homogeneum ſupponitur; ſi inde mutetur annulorum aſperitas & vis attritus mutui, mutabitur æqualiter ſeu in data ratione. Et idcirco manente reſiſtentiarum & impreſſionum, quæ ex mutuo partium attritu oriuntur, proportione, manebit effectuum inde productorum proportio, hoc eſt, proportio motuum & periodicorum temporum; & propterea partium ſingularum tempora periodica erunt, ut in ſuperioribus caſibus, proportionalia quadratis diſtantiarum ipſarum à centro globi.



centrifuga, major (u) ſit ad eclipticam quàm ad polos; debebit cauſa aliqua adeſſe quâ particulæ ſingulæ in circulis ſuis retineantur; ne materia, quæ ad eclipticam eſt, recedat ſemper à centro & per exteriora vorticis migret ad polos, indeque per axem ad eclipticam circulatione perpetuâ revertatur.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IX. PROP. LII. THEOR. XL.

(x) *Corol.* 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi, ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro globi, & velocitates abſolutæ reciprocè ut eadem quadrata applicata ad diſtantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quieſcente ſimilari & infinito circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem vorticis, & motus iſte paulatim propagabitur in infinitum; neque prius ceſſabit in ſingulis fluidi partibus accelerari, quam tempora periodica ſingularum partium ſint ut quadrata diſtantiarum à centro globi.

Corol. 3. Quoniam vorticis partes interiores ob (y) majorem ſuam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipſis eâ actione perpetuo communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores ſimul transferunt, eâque actione (z) ſervant quantitatem motûs ſui planè

(u) * *Major ſit ad eclipticam quàm ad polos.* Quoniam particularum E & e in eodem orbe conſtitutarum tempora periodica æquantur, ipſarum vires centrifugæ ſunt inter ſe ut radii circulorum quos deſcribunt (*per cor.* 3. *prop.* 4. *lib.* 1.), hoc eſt, ut perpendiculares ad axem E S & e q. Vis igitur centrifuga eo major eſt, quo magis particula accedit ad æquatorem ſeu eclipticam S E, & in æquatore maxima eſt, in polo nulla.

(x) 328. * *Cor.* 1. Motus angulares ſunt reciproce ut tempora periodica (327), ideoque (ex demonſtratis) reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro globi. Velocitates abſolutæ particularum ſunt ut peripheriæ circulorum quas deſcribunt, ſeu ut ipſarum diſtantiæ ab axe directè, & tempora periodica inversè; & propterea ſunt ut diſtantiæ ab axe directè & quadrata diſtantiarum à centro globi inversè, ac proinde ſunt reciprocè ut eadem quadrata applicata ad diſtantias ab axe. Unde velocitates abſolutæ particularum in æquatore ſunt reciprocè ut ipſarum diſtantiæ à centro globi, & earum vires centrifugæ reciproce ut cubi diſtantiarum à centro globi (*per cor.* 1. *prop. IV. lib.* 1.). 328.

(y) * *Ob majorem ſuam velocitatem &c.* Velocitates angulares orbium à centro globi minus diſtantium majores ſunt (*per cor.* 1.) quàm velocitates angulares orbium exteriorum & à centro vorticis remotiorum; ſed orbes interiores exceſſu velocitatis angularis, quo relative ad orbes exteriores moventur, hos atterunt & urgent, *motumque ipſis* &c.

(z) * *Servant quantitatem motûs ſui planè invariatam.* Quia (*per hyp.*) ea eſt vorticis conditio, ut unaquæque fluidi pars perſeveret in ſuo motu uniformiter, & in eâdem à centro diſtantia eodem

nè invariatam; patet quod motus perpetuo transfertur à centro ad circumferentiam vorticis, & per infinitatem circumferentiæ abſorbetur. Materia inter ſphæricas duas quaſvis ſuperficies vortici concentricas nunquam accelerabitur, eo quòd motum omnem à materia interiore acceptum transfert ſemper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conſervationem vorticis conſtanter in eodem movendi ſtatu, requiritur principium aliquod activum, à quo globus eandem ſemper quantitatem motûs accipiat, quam imprimit in materiam vorticis. Sine tali principio neceſſe eſt ut globus & vorticis partes interiores, propagantes ſemper motum ſuum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardeſcant paulatim & in orbem agi deſinant.

Corol. 5. Si globus alter huic vortici ad certam ab ipſius centro diſtantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliquâ conſtanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in vorticem: & primo revolveretur hic vortex novus & exiguus unà cum globo circa centrum alterius, & interea latius ſerperet ipſius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum vorticis primi. Et eâdem ratione, quâ hujus globus raperetur motu vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, ſic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, ſeque mutuo ob motum illum circularem fugerent, niſi per vim aliquam cohibiti. Poſtea ſi vires conſtanter impreſſæ, quibus globi in motibus ſuis perſeverant, ceſſarent, & omnia legibus mechanicis permitterentur, langueſceret paulatim motus globorum (ob rationem in corol. 3. & 4. aſſignatam) & vortices tandem conquieſcerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes poſitione

dem ſemper tenore moveatur; & tamen, propter orbium interiorum majorem velocitatem angularem attritumque continuum, orbes exteriores perpetuò urgentur & ad motum accelerandum incitantur; neceſſe eſt ut motus perpetuo transferatur à centro ad circumferentiam vorticis, & per infinitatem extimæ circumferentiæ abſorbeatur. Quâ ratione fit ut orbium ſingulorum, qui eamdem motûs quantitatem in alios exteriores ſimul & ſemper transferunt, idem ſit perpetuò motus.

ne datos certis cum velocitatibus conſtanter revolverentur, fierent vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi ſinguli eâdem ratione quâ unus aliquis motum ſuum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus ſuos in infinitum, adeo ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus reſultat. Unde vortices non definientur certis limitibus, ſed in ſe mutuo paulatim excurrent; globique per actiones vorticum in ſe mutuo, perpetuo movebuntur de locis ſuis, uti in corollario ſuperiore expoſitum eſt; neque certam quamvis inter ſe poſitionem ſervabunt, niſi per vim aliquam retenti. Ceſſantibus autem viribus illis quæ in globos conſtanter impreſſæ conſervant hoſce motus, materia ob rationem in corollario tertio & quarto aſſignatam, paulatim requieſcet & in vortices agi deſinet.

Corol. 7. Si fluidum ſimilare claudatur in vaſe ſphærico, ac globi in centro conſiſtentis uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem & vas in eamdem partem circa axem eundem revolvantur, ſintque eorum tempora periodica ut quadrata ſemidiametrorum: partes fluidi non prius perſeverabunt in motibus ſuis ſine acceleratione & retardatione, quàm ſint eorum tempora periodica ut quadrata diſtantiarum à centro vorticis. Alia (a) nulla vorticis conſtitutio poteſt eſſe permanens.

Corol. 8. Si vas, fluidum incluſum, & globus ſervent hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in ſe invicem, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium inter ſe pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quàm acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. (b) Unde ſi vas quieſcat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum tranſire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone ſummam temporis revo-

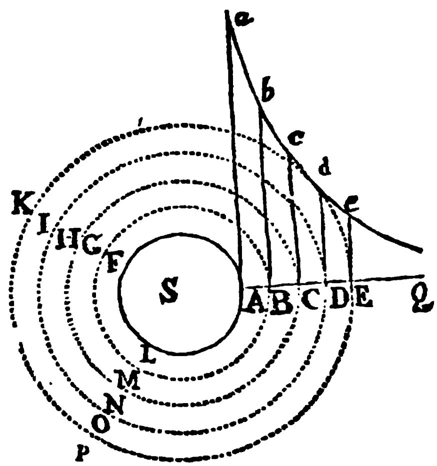
(a) * *Alia nulla vorticis conſtitutio poteſt eſſe permanens.* Nam (ex demonſtr.) ea debet eſſe vorticis conſtitutio, ut pars quælibet fluidi poſſit in ſuo motu uniformiter perſeverare, & ut attritu ex uno latere non magis tardetur quàm acceleratur attritu ex altero latere. 328

(b) * *Cor.* 9. Fluidum ſimilare in vaſe ſphærico E K P clauſum ita agatur in vorticem, ut tandem partes fluidi in motibus

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IX. PROP. LII. THEOR. XL.

volutionis hujus & revolutionis globi eſſe ad tempus revolutionis globi, ut quadratum ſemidiametri vaſis ad quadratum ſemidiametri globi : & tempora periodica partium fluidi, reſpectu plani hujus, erunt ut quadrata diſtantiarum ſuarum à centro globi.

tibus ſuis ſine acceleratione & retardatione perſeverent, quemadmodum in corollario 7. expoſitum eſt. In hâc hypotheſi velocitates particularum in æquatore exiſtentium ſunt ut diſtantiæ à centro S inversè (328), & ideo ut S D ad S E, ſive, ut peripheria D I O ad peripheriam E K P ita eſt peripheria E K P (quam particula E tempore ſuo periodico t E deſcribit) ad ſpatium quod alia quævis particula D eodem tempore conficit, quod proinde ſpatium erit $\frac{EKP^2}{DIO}$. Quieſcat jam vas ſphæricum, hoc eſt, toti ſyſtemati vorticis auferatur vaſis motus angularis, & particula D tempore t E deſcribet ſpatium $\frac{EKP^2}{DIO} - DIO$. Sed hoc ſpatium eſt ad circumferentiam D I O, aut quod idem eſt, $SE^2 - SD^2$ eſt ad SD^2, ut tempus t E ad tempus periodicum (TD) particulæ D in vaſe quieſcente, quod proinde tempus erit $\frac{SD^2 \times tE}{SE^2 - SD^2}$. Et ſimili modo tempus periodicum particulæ A, quod dicatur T A, erit in vaſe quieſcente $\frac{SA \times tE}{SE^2 - SA^2}$. Si itaque detur motus globi, ſeu tempus periodicum T A, dabitur tempus $tE = \frac{TA \times [SE^2 - SA^2]}{SA^2}$, & inde dabitur tempus periodicum $TD = \frac{SD^2 \times tE}{SE^2 - SD^2} = \frac{SD^2 \times TA \times [SE^2\ SA^2]}{SA^2 \times [SE^2 - SD^2]}$. Si igitur vas quieſcat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi ad quamlibet datam à centro diſtantiam. Concipe nunc planum tranſire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone ſummam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi eſſe ad tempus revolutionis globi, ut quadratum ſemidiametri vaſis ad quadratum ſemidiametri globi; ſive pone SA^2 ad SE^2 ut T A ad quartum, quod erit $\frac{SE^2 \times TA}{SA^2} = \frac{SE^2 \times tE}{SE^2 - SA^2}$; & tempus pe-



riodicum plani erit $\frac{SE^2 \times tE}{SE^2 - SA^2} - \frac{SA^2 \times tE}{SE^2 - SA^2} = tE$, quia $TA = \frac{SA^2 \times tE}{SE^2 - SA^2}$. Quare planum, quo hic utitur NEWTONUS, ita movetur ut revolutionem ſuam abſolvat eodem tempore t E, quo vas ſuam revolutionem perficit in hyp. cor. 7. Sit *X* tempus periodicum particulæ D reſpectu plani in vaſe quieſcente; & quia planum & vortex in regiones contrarias moventur, erit T D ad *X* ut circumferentia DIO, quam particula D tempore periodico T D deſcribit, ad ejuſdem circumferentiæ partem quam eadem particula tempore *X* percurrit; & ideo pars illa erit $\frac{X \times DIO}{TD} = \frac{X \times DIO \times [SE^2 - SD^2]}{SD^2 \times tE}$, & pars reſidua circumferentiæ D I O, quam planum eodem tempore *X* conficit, erit $DIO - \frac{DIO \times X}{TD} = \frac{SD^2 \times DIO \times tE - X \times DIO \times [SE^2 - SD^2]}{SD^2 \times tE}$. Quia verò planum tempore t E uniformi motu revolutionem ſuam D I O abſolvit,

eſt

Corol. 10. Proinde ſi vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diverſum aliquem datâ cum velocitate quâcumque moveatur, dabitur motus fluidi. Nam ſi ſyſtemati toti auferatur vaſis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter ſe qui prius, per corol. VIII. Et (c) motus iſti per corol. IX. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quieſcant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas niſi violenter detentum, neque prius deſinent fluidum & vas accelerari, quàm ſint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi.

Quod

eſt t E ad X ut D I O ad ſpatium modo inventum, ſeu ut $SD^2 \times tE$ ad $SD^2 \times tE - X \times [SE^2 - SD^2]$; unde habetur $SD^2 \times X \times tE = SD^2 \times tE^2 - X \times tE \times [SE^2 - SD^2]$, & ideo $SE^2 \times X = SD^2 \times tE$, ac proinde tempus $X = \frac{SD^2 \times tE}{SE^2}$. Cùm ergo t E & S E ſint quantitates datæ, tempus periodicum X particulæ fluidi D reſpectu plani prædicti eſt ut SD^2, ſive ut quadratum diſtantiæ à centro globi. Et quia omnium particularum in eodem orbe conſtitutarum tempora periodica æquantur inter ſe; earum omnium tempora periodica reſpectu plani ſunt ut quadrata diſtantiarum ſuarum à centro globi. Q. E. D.

(c) * *Et motus iſti per cor. 9. dabuntur*, proindeque ſi cum iis motibus datis componatur vaſis motus angularis datus, dabitur motus fluidi in vaſe data cum velocitate moto.

PROBLEMA.

329. Sphæra ſolida in fluido infinito & in eâdem à centro diſtantiâ ſimilari, ſed in diverſis diſtantiis in datâ quâvis diſtantiarum ratione inæqualiter denſo circà axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur & à ſphæræ impulſu ſolo agatur fluidum in orbem, perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo, ſitque reſiſtentia quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, in ratione compoſitâ ex ratione quâlibet denſitatis & ratione etiam quâcumque velocitatis relativæ, oportet invenire tempora periodica partium fluidi. 329.

Diſtinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejuſdem craſſitudinis ut in demonſtratione prop. 52. factum eſt; dicanturque A D $= x$, fluidi denſitas in loco D $= z$, tranſlatio orbium ab invicem tempore dato $= v$, denſitas z ſit proportionalis dignitati x^n, & reſiſtentia, cæteris paribus, ſit ut $z^m v^p$, ſeu ut $x^{mn} v^p$. Quia ſuperficies ſphærica D I O, eſt ut x^2, erit impreſſio orbis D I O, in orbem contiguum, ut $x^{2+mn} v^p$; ſed ut orbis unuſquiſque in motu ſuo uniformiter perſeveret, debent impreſſiones ex parte utrâque ſibi invicem æquari & fieri in regiones contrarias, ac proindè quantitas $x^{2+mn} v^p$, debet eſſe conſtans. Quarè erit v^p ut $\frac{1}{x^{2+mn}}$, & v ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}}}$. Sunt autem differentiæ motuum angularium circà axem ut tranſlationes orbium applicatæ ad diſtantias, hoc eſt, ut $\frac{v}{x}$, ſive ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}+1}}$. Sit jam D E $= dx$, & ordinata D d, ad curvam a b d e, ſit ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}+1}}$ erit ſum-

 mn

Quod ſi vas vi aliquâ detineatur vel revolvatur motu quovis conſtanti & uniformi, deveniet medium paulatim ad ſtatum motûs in corollariis VIII. IX. & X. definiti, nec in alio unquam ſtatu quocunque perſeverabit. Deinde verò ſi, viribus illis ceſſantibus quibus vas & globus certis motibus revolvebantur, permittatur ſyſtema totum legibus mechanicis; vas & globus in ſe invicem agent mediante fluido, neque motus ſuos in ſe mutuo per fluidum propagare prius ceſſabunt, quàm eorum tempora periodica æquentur inter ſe, & ſyſtema totum ad inſtar corporis unius ſolidi ſimul revolvatur.

Scho-

ma differentiarum, hoc eſt, motus totus angularis ut area D d Q, quæ eſt ut S. $\frac{dx}{x^{\frac{2+mn}{p}+1}} = -\frac{p}{2+mn} \times \frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}}}$; & tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia, ſunt ut $x^{\frac{2+mn}{p}}$, neglectâ quantitate conſtante $\frac{p}{2+mn}$. Q. E. I.

330. *Cor.* 1. Si reſiſtentia, cæteris paribus, ſit ut velocitas, & tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro, erit $p = 1$, & $\frac{2+mn}{p} = \frac{3}{2}$, ideóque $n = -\frac{1}{2m}$. Sed cùm reſiſtentia proportionalis ſupponatur denſitatis dignitati cujus index eſt m, & creſcente denſitate creſcat, neceſſe eſt ut m ſit numerus poſitivus, ac proindè n numerus negativus. Quarè denſitas, ut pote proportionalis dignitati x^n, creſcente diſtantiâ in hypotheſi corollarii hujus decreſcet. Hoc autem repugnat. Nam materia vorticis eò denſior eſſe debet quò longius diſtat à centro. Conatur enim materia per motum ſuum circularem recedere ab axe vorticis & proptereà premit materiam omnem ulteriorem, eamque condenſat, ſi condenſari poſſit. Præthereà velocitas abſoluta partium fluidi in æquatore vorticis eſt ut earum diſtantia à centro globi directè & tempus periodicum inversè, hoc eſt, in hypotheſi cor. hujus ut $\frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, ideóque vis centrifuga partium (*per cor.* 1. *prop.* 4. *lib.* 1.) cæteris paribus eſt ut $\frac{1}{xx}$, & proindè decreſcit in ratione duplicatâ diſtantiæ auctæ. Ut igitur vortex ad ſtatum permanentem reducatur, oportet ut partes denſiores à centro recedant & rariores ad illud accedant, quo vis centrifuga partium centro propiorum, quæ ob majorem velocitatem & minorem diſtantiam nimia eſt, per minorem denſitatem minuatur.

331. *Cor.* 2. Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro, hoc eſt, ſi $\frac{2+mn}{p} = \frac{3}{2}$, erit $p = \frac{4+2mn}{3}$, & ideò reſiſtentia, cæteris paribus, ut velocitatis dignitas cujus exponens eſt $\frac{4+2mn}{3}$. Sed (*ex dem. cor.* 1.) m & n ſunt numeri poſitivi. Quarè tempora periodica non poſſunt eſſe in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro, quin index $\frac{4+2mn}{3}$ ſit unitate major; & quin proindè reſiſtentia, cæteris paribus, in majori ratione creſcat quàm in ratione velocitatis auctæ.

332. *Cor.* 3. Si ſpatium quo vortex continetur ſit ubique plenum & proptereà medii denſitas uniformis ſupponatur, littera

Scholium.

In his omnibus ſuppono fluidum ex materiâ quoad denſitatem & fluiditatem uniformi conſtare. Tale eſt in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus ſimiles & æquales, ad æquales ſemper à ſe diſtantias, ubivis in fluido conſtitutus, propagare poſſit. Conatur quidem materia per motum ſuum circularem recedere ab axe vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Et hâc preſſione fit attritus partium fortior & ſeparatio ab invicem difficilior; & per conſequens diminuitur materiæ fluiditas. Rurſus ſi partes fluidi ſunt alicubi craſſiores ſeu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores ſuperficies in quibus partes ſeparentur ab invicem. In hujuſmodi caſibus deficientem fluiditatem vel lubricitate partium vel lentore aliâve aliquâ conditione reſtitui ſuppono. Hoc niſi fiat, materia ubi minus fluida eſt magis cohærebit & ſegnior erit, ideoque motum tardius recipiet & longius (d) propagabit quàm pro ratione ſuperius aſſignatâ. Si

tera $\bar{z}$ quæ denſitatem exponebat; ſignificet jam fluiditatis defectum, ſitque reſiſtentia, cæteris paribus, ut dignitas z^m. His poſitis oſtendetur ut in cor. 1. & 2. factum eſt, quod ſi tempora periodica ſtatuantur in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro, materia vorticis eò fluidior erit quò longius diſtat à centro, vel reſiſtentia augebitur in majori ratione quàm ea eſt in quâ velocitas relativa augetur.

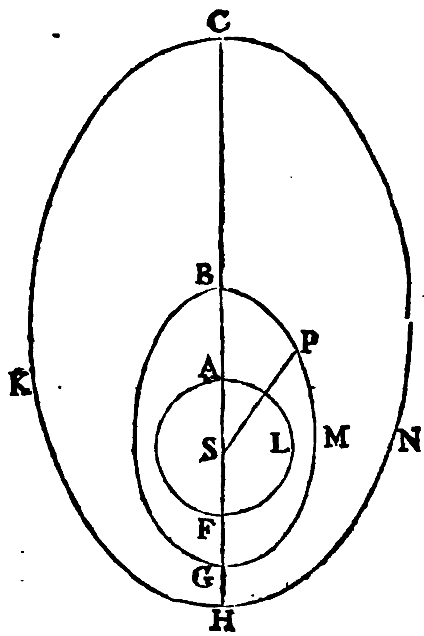
333. *Cor.* 4. Si reſiſtentia, cæteris paribus, augeatur in ratione minore quàm in ratione velocitatis, hoc eſt, ſi index p, ſit unitate minor, erit $\frac{2+mn}{p}$ binario major, & proindè tempora periodica partium vorticis erunt in majori ratione quàm duplicatâ ratione diſtantiarum à centro. Nam vel eſt $mn = 0$, quod contingit dùm eadem eſt ubique fluidi denſitas ac fluiditas, vel mn, eſt numerus poſitivus, quia defectus fluiditatis vel denſitas; auctis diſtantiis à centro augetur (*per cor.* 1.) 333.

(d) * *Et longius propagabit quàm pro ratione ſuperiùs aſſignatâ.* In ſuperioribus demonſtrationibus NEWTONUS ſuppoſuit fluidum homogeneum eſſe & preſſionem ubique æqualem; ſi verò in diverſis à vorticis centro diſtantiis aliqua ſit partium fluidi aut preſſionis inæqualitas, minorem vel majorem fluiditatem inde ortam, vel lubricitate partium vel lentore aliâve aliquâ conditione ad æqualitatem reſtitui ſupponit, ut vortex in eodem ſtatu juxtà leges præſcriptas, permaneat. Hoc niſi fiat, materia ubi minus fluida eſt, magis cohærebit & ſegnior erit, ideóque motum à globo centrali communicatum difficiliùs ac tardiùs, cæteris paribus, recipiet; ſed illum longius propagabit. Nam ſi vorticis partes ità inter ſe & cum globo cohærerent, ut nullâ vi poſſent ſeparari, non poſſet globus centralis circumvolvi, quin materia tota vorticis, tan-

Si figura (e) vaſis non ſit ſphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus ſed conformibus eidem vaſis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium diſtantiarum à centro quam proximè. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora ſunt ſpatia, tardiores erunt motus, ubi anguſtiora velociores, (f) neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim deſcribent minus curvos, & conatus recedendi à centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quàm augebitur per incrementum velo-

quam vectis rigidus, ſimul circumvolveretur. Undè quò magis partes illæ cohærent, eò longiùs motum à globo centrali acceptum propagant. Et ideò etiamſi materia verticis homogenea non ſit, & preſſio inæqualis ſupponatur, vim ſuam obtinent difficultates, quas contrà vorticum in naturâ poſſibilitatem NEWTONUS propoſuit in cor. 2. 4. 5. & 6. prop. 52.

(e) * *Si figura vaſis non ſit ſphærica.* Sit C N H K, figura vaſis in quo fluidum ſolo ſphæræ A L F impulſu agatur in orbem, & particulæ fluidi quæ vaſis ſuperficiem C N H K, contingunt, movebuntur in lineis non circularibus, ſed conformibus eidem vaſis figuræ, particulæ verò quæ ſphæræ A L F proximæ ſunt, circulos deſcribent. Undè quò magis particulæ fluidi à ſphærâ centrali diſtant, eò magis orbitarum quas deſcribunt, figura à circulari differt & ad vaſis figuram accedit. Quia verò particularum circulos deſcribentium tempora periodica erant (*prop.* 52.) ut quadrata diſtantiarum à centro S; erunt in hoc vaſe ut quadrata mediocrium diſtantiarum quam proximè. Sic particulæ P orbitam B P G B deſcribentis tempus periodicum erit quam proximè ut quadratum diſtantiæ P S, quæ eſt media arithmetica inter diſtantiam maximam B S, & minimam S G, ſivè erit ut tempus periodicum particulæ P, circulum deſcribentis, cujus radius P S. Nam tempus periodicum, cæteris paribus, creſcit ut velocitas abſoluta decreſcit; ſed cùm vortex ſupponatur eſſe in ſtatu permanenti, & eadem proindè materiæ quantitas per latiora ſpatia ut C A, & per anguſtiora ut F H, ſimul tranſeat; oportet ut materiæ velocitas in ſpatiis latioribus minuatur, & in anguſtioribus augeatur. Quo fit ut particula P, eodem ferè tempore deſcribat orbitam B P G B, quo velocitate mediocri deſcriberet circulum cujus eſſet radius P S.



(f) * *Neque tamen particulæ velociores.* Nam vortex non poteſt eſſe in ſtatu permanenti quin particula P, in ſpatiis anguſtioribus L N, F H, ad centrum S acce-

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. IX. Prop. LII. Theor. XL.

velocitatis. Pergendo à ſpatiis anguſtioribus in latiora recedent paulo longius à centro, ſed iſto receſſu tardeſcent; & accedendo poſtea de latioribus ad anguſtiora accelerabuntur, & ſic per vices tardeſcent & accelerabuntur particulæ ſingulæ in perpetuum. (g) Hæc ita ſe habebunt in vaſe rigido. Nam in fluido infinito conſtitutio vorticum innoteſcit per propoſitionis hujus corollarium ſextum.

Proprietates autem vorticum hâc propoſitione inveſtigare conatus ſum, ut pertentarem ſi quâ ratione phænomena cœleſtia per vortices explicari poſſint. Nam phænomenon eſt, quod planetarum circa jovem revolventium tempora periodica ſunt in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro jovis; & eadem regula obtinet in planetis qui circa ſolem revolvuntur. Obtinent autem hæ regulæ in planetis utriſque quam accuratiſſimè, quâtenus obſervationes aſtronomicæ hactenus prodidêre. Ideoque ſi planetæ illi à vorticibus circa jovem & ſolem revolventibus deferantur, debebunt etiam hi vortices eâdem lege revolvi. Verùm tempora periodica partium vorticis prodierunt in ratione duplicatâ diſtantiarum à centro motus: neque poteſt ratio illa diminui & ad rationem ſeſquiplicatam reduci, (h) niſi vel materia vorticis eo fluidior ſit quo longius diſtat à centro, vel reſi-

accedat; & ideò neceſſe eſt ut in iiſdem ſpatiis conatus recedendi à centro minùs augeatur per incrementum velocitatis, quàm diminuitur per decrementum curvaturæ. Eſt enim vis quâ particula P, in loco G, nititur à circumferentiâ M G recedere, ut quadratum velocitatis particulæ directè & radius circuli curvam oſculantis in G, inversè (*cor.* 1. *prop.* 4. & *not.* 121. *lib.* 1.)

(g) * *Hæc ità ſe habebunt*, in vaſe rigido aut in ſpatio aliis vorticibus circumdato, quo tanquam vaſe, juxtà *Carteſii* opinionem materia vorticis continetur. Ex his autem NEWTONI obſervationibus ſequitur. 1°. Planetarum qui circà *Carteſiani* vorticis centrum eâdem lege cum vorticis partibus moventur, orbitas eò magis ad circuli figuram accedere debere quo centro vorticis propiores ſunt; 333.
& propterea excentricitatem orbitæ Mercurii longè minorem eſſe excentricitate orbitæ Saturni & omnium ſuperiorum planetarum, contrà obſervationes aſtronomicas. Sequitur 2°. in *Carteſianâ* hypotheſi explicari non poſſe cur planetæ ellipſes accuratas, non verò circulos aut irregulares figuras deſcribant. Sequitur 3°. omnium orbitarum aphelia & perihelia à ſole ſpectata in iiſdem inter fixas locis eſſe poſita atquè immota manere; cùm tamen ex obſervationibus aſtronomicis certum ſit, planetarum aphelia à ſe invicem longe diſtare & lento motu agi.

(h) * *Niſi vel materia vorticis eò fluidior ſit.* (Per not. 332.)

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IX. PROP. LII. THEOR. XL.

reſiſtentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi; ex auctâ velocitate quâ partes fluidi ſeparantur ab invicem, augeatur in majore ratione quàm ea eſt in quâ velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi conſentaneum videtur. Partes craſſiores & minus fluidæ, niſi graves ſint in centrum, (i) circumferentiam petent; & veriſimile eſt quod, etiamſi demonſtrationum gratiâ hypotheſin talem initio ſectionis hujus propoſuerim, ut reſiſtentia velocitati proportionalis eſſet, tamen (k) reſiſtentia in minori ſit ratione quàm ea velocitatis eſt. Quo (l) conceſſo, tempora periodica partium vorticis erunt in majori quàm duplicatâ ratione diſtantiarum ab ipſius centro. Quod ſi vortices (uti aliquorum eſt opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tardius uſque ad certum limitem, tum denuo celerius juxta circumferentiam; certe nec ratio ſeſquiplicata neque alia quævis certa ac determinata obtinere poteſt. (m) Viderint itaque philoſophi quo pacto phænomenon illud rationis ſeſquiplicatæ per vortices explicari poſſit.

(i) * *Circumferentiam petent.* Id experientiâ conſtat; nam ſi aqua in vaſe contenta in vorticem agatur, paleæ & alia corpuſcula minùs fluida petunt circumferentiam.

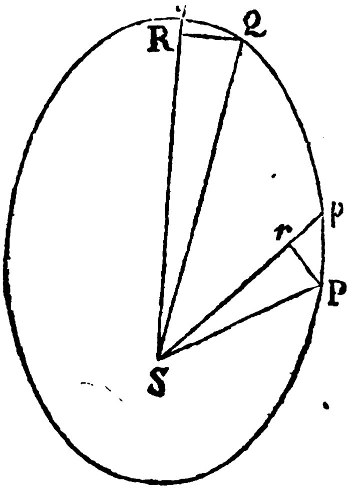
(k) * *Tamen reſiſtentia in minori ſit ratione.* (Vid. ultimam not. in hoc ſchol.).

(l) * *Quo conceſſo.* (per not. 333.)

(m) * *Viderint itaque Philoſophi.* Difficultas creſcit, ſi tria ſimul conjungantur, quæ primus omnium *Keplerus* mirâ ſagacitate ex obſervationibus Aſtronomicis deduxit. Primum eſt, planetas in ellipſibus, quarum umbilicum ſol occupat, revolutiones ſuas peragere. Secundum eſt planetas ſingulos radiis ad ſolem ductis, & ſatellites radiis ad ſuum primarium ductis, areas deſcribere temporibus proportionales. Tertium eſt, tempora periodica planetarum circà ſolem & ſatellitum circà primarium ſuum, eſſe in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro ſui motûs. Ex hâc proportione colligitur planetarum velocitates in mediocribus diſtantiis ab umbilico communi eſſe reciprocè in ratione ſubduplicatâ diſtantiarum illarum. Sint enim D, & d, mediocres planetarum diſtantiæ T & t, eorum tempora periodica, & quoniam in ſingulis planetarum orbitis parva eſt diſtantiæ maximæ & minimæ differentia, ſi conferatur cum differentiâ quæ inter diſtantias duorum planetarum intercedit, ſpatia temporibus T & t, deſcripta erunt quam proximè ut diſtantiæ D & d; unde velocitates erunt ut $\frac{D}{T}$ & $\frac{d}{t}$, hoc eſt, ut $\frac{D}{D^{\frac{3}{2}}}$, & $\frac{d}{d^{\frac{3}{2}}}$, ſivè ut $\frac{1}{D^{\frac{1}{2}}}$ & $\frac{1}{d^{\frac{1}{2}}}$, ſeu in ſubduplicatâ ratione mediocrium diſtantiarum inversè, in quâ etiam ratione ſunt velocitates partium vorticis circularis in diſtantiis D & d, à ſole (*per prop.* 53.). Verùm per alteram analogiam, arearum ſcilicet & temporum, velocitates partium vorticis circularis ſunt in ratione ſimplici diſtantiarum à ſole reciprocè. Nam ſi planeta P, orbitam ellipticam P Q q p deſcribat & radiis ad umbilicum S ductis areas æquales S P p, S Q q, tempuſculo dato verrat,

rat,

rat; centro S & radiis SP, SQ deſcribantur arcus circulares quam minimi Pr, QR, qui radiis SP, Sq, occurrant in r, & R, erit area SPp = SP × Pr = SQq = SQ × QR, & hinc Pr : QR = SQ : SP. Sed Pr & QR ſunt ut ſpatia circularia eodem tempore deſcripta ideóque ut velocitates circulares partium vorticis in P, & Q; Quarè velocitates illæ ſunt in ratione inverſâ diſtantiarum. Porrò quàm difficile ſit ab his aliiſque contradictionibus hypotheſim vorticum liberare, ex variis hâc de re eruditorum Diſſertationibus ſatis manifeſtum eſt. Vid. *Leibnitii* tentamen de motuum cæleſtium cauſis, *Villemotii* opus de vorticibus; Illuſtriſſimi Marchionis *Poleni* dialogum de eâdem materiâ; Diſſertationes Celeber. Virorum *Saurini* in Comm. Acad. Reg. Scient. an. 1709., *Bulffingeri* de cauſâ gravitatis, *Joan. Bernoulli* Cogitationes novas de Syſtemate Carteſii, ejuſdem Phyſicam Cœleſtem inter Academiæ Præmia, Domini *De Molieres* Lectiones Phyſicas.



Illuſtrium Authorum qui vorticum hypotheſim ſtrenuè vindicarunt, varias hâc de re Diſſertationes hic percurrere nimis longum foret, nec tantas componere lites noſtrum eſt. Eam enim NEWTONUS ſibi vel maximè impugnandam aſſumit vorticum hypotheſim quam *Carteſius* ipſe conſtituerat, nataſque poſt primi autoris mortem hujus ſyſtematis emendationes quam plurimas ſaltem directè non petit. At ſilentio prætermittere non licet Diſſertationem Doctiſſimi Viri *Joan. Bernoullii* ab Academiâ Regiâ Pariſ. præmio condecoratam, cui titulus eſt: *Cogitationes novæ de Syſtemate Carteſii.* Exiſtimat Clariſſ. Autor ſuperiorum propoſitionum demonſtrationes mero ſophiſmate laborare, eò quod NEWTONUS orbium contiguorum & ſeſe mutuo atterentium impreſſionem ſolùm definierit ex ſuperficierum magnitudine & velocitate relativâ quâ ab invicem ſeparantur; earum verò ſuperficierum preſſionem minimè conſideraverit, vimque vectis neglexerit quæ, cæteris paribus, major eſt in majoribus rotis & minor in minoribus. Verùm licet in ſuis demonſtrationibus preſſionem ubique æqualem ſuppoſuerit NEWTONUS, hujus tamen preſſionis inæqualitatem in ſcholio conſideravit, & quid ex illâ ſequatur, generatim oſtendit. Vim quidem vectis prorsùs neglexit, & meritò quidem, quantum intelligere poſſumus. 333. Quamvis enim in vecte rigido cujus partes ſimul eodem motu angulari circà hypomoclion revolvuntur, eò major ſit efficacia quo cæteris paribus longior eſt vectis; quod videlicet vectis partes eò celeriùs moveantur, quò major eſt earum ab hypomoclio diſtantia, id tamen ad partes medii fluidi quæ circà centrum aliquod revolvuntur, non videtur transferendum. Et licèt NEWTONUS orbes ſolidos, demonſtrationis gratiâ, primùm fingat, eos tamen diviſos ſupponit ac deindè in particulas innumeras ſubdividit ut demonſtratio ad naturam medii fluidi accommodetur. Quod ſi ob qualemcumque partium fluidi cohæſionum, aliqua habenda ſit ratio vis vectis, certè ea non videtur aſſumenda diſtantiæ à vorticis centro proportionalis, quemadmodùm ſit in vecte perfectè rigido, ſeu cujus partes vi quaſi infinitâ connexæ ſupponuntur & eodem motu angulari revolvuntur.

Cæterùm Celeber. *Joan. Bernoulli* aliam uſurpat hypotheſim quæ Mechanicis perſpecta nondùm eſt certòque explorata. Supponit enim cum D. *Amontons* in Monum. Pariſ. an. 1699. reſiſtentiam quæ oritur ex frictione ſuperficierum contiguarum utcumque inæqualium, manente earum dem

[illegible] in ſeſe mutuò preſſione, conſtantem eſſe; verùm hypotheſis illa minùs placuit Clariſſ. *Wolfio* qui de eâ his verbis loquitur in Elementis Mechanices num. 965.: Equidem *Amontons* regulam univerſalem dedit computandi vim ad frictionem in dato quolibet caſu ſuperandam; ſed cùm omnem frictionem à ſolâ appreſſione ex pondere ſuperincedentis derivet, ex antecedentibus ſatis apparet quod propoſito ſatisfacere nequeat: veram frictionis legem accuratiſſimis experimentis tentarunt Celeber. Philoſophi *Deſaguilliers* & *Muſchenbroek*; At eam haud ſatis conſtantem obſervarunt, ut patet ex iis quas *Muſchenbroek* tom. 1. Phyſices deſcripſit experimentorum tabulis. Nil ergò certi hâc de re pronuntiari poteſt. NEWTONUS tamen conjecturam fecit reſiſtentiam in minori eſſe ratione quàm ea velocitatis eſt, eo forſan ductus argumento quod in Hiſtoriâ Acad. Reg. an. 1709. hoc ferè modo exponitur: ſi concipiantur ſuperficies innumeris eminentiis aſperæ, dum alia ſuper aliam incedit, ſuperficiei ſuperioris eminentiæ intrà cavitates inferioris, dato tempore, preſſionis vi penetrant, fitque reſiſtentia major, ſi intrà ſuperficiei inferioris cavitates altiùs ingrediantur ſuperficiei ſuperioris eminentiæ, at verò ſi major ſit velocitas, ſuperior ſuperficies intrà inferiorem eodem dato tempore minùs penetrat. Hinc ſi Clariſſ. *Parentii* ratio valeat, ſatis patet reſiſtentiam in minori eſſe ratione quàm ea velocitatis eſt. Attamen Clariſſ. *Muſchenbroek*, factis experimentis, reſiſtentiam velocitati proportionalem in motibus tardioribus invenit, in celerioribus verò eam in majori quàm velocitatis ratione obſervavit.

Aſſumit D. *Bernoullius* impreſſiones orbium contiguorum in ſe mutuò factas, eſſe in ratione compoſitâ ex ratione ſummæ virium centrifugarum orbium omnium inferiorum ad centrum uſquè vorticis, ex ratione velocitatis quâ orbes contigui ab invicem ſeparantur, & ex ratione diſtantiæ orbium illorum à centro; undè per analyſim deducit tempora periodica partium vorticis ſphærici homogenei eſſe in ratione radicum cubicarum dignitatis quintæ diſtantiarum à centro; earum verò celeritatem ſub æquatore eſſe reciprocè in ratione radicis cubicæ quadrati diſtantiarum à centro. Si in hypotheſi *Bernoullii* negligatur vis vectis, eodem calculo quo uſus eſt, tempora periodica inveniuntur proportionalia radicibus cubicis dignitatis quartæ diſtantiarum à centro; Si verò ſupponamus impreſſiones orbium in ſe mutuò factas, eſſe in ratione compoſitâ ex ratione preſſionum, ratione velocitatum relativarum & ratione ſuperficierum, tempora periodica *Bernoulliano* calculo inveniuntur quadratis diſtantiarum proportionalia, uti NEWTONUS per ſuam hypotheſim invenerat; & ſi cum his tribus rationibus componatur ratio diſtantiæ à centro ut vis vectis exprimatur, tempora periodica reperiuntur proportionalia radicibus cubicis dignitatis ſeptimæ diſtantiarum à centro. Hæ verò analogiæ omnes à regulâ illâ *Keplerianâ*, quâ tempora periodica ſtatuuntur eſſe in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum, diſſentiunt. Ut ergò vorticis ſphærici leges cum *Kepleri* ſancitis conciliet *Bernoullius*, ſupponit denſitatem vorticis eſſe in ratione ſubduplicatâ diſtantiæ centro reciprocè, planetas verò non eſſe ejuſdem prorſus denſitatis cum medio fluido in quo primùm collocati ſunt, ideòque ob majorem vel minorem ſuam denſitatem in eo medio ſucceſſivè deſcendere & aſcendere, intereadùm circulari motu vorticis abripiuntur, ex quibus motibus ſimul compoſitis naſcuntur ellipticæ planetarum trajectoriæ & apheliorum lentiſſimi motus. Sed medium illud in quo planeta, cùm denſior eſt, deſcendit, & ubi rarior eſt, aſcendit, vel grave eſt in centrum vorticis vel non. Si grave non ſit, planeta in medio rariori poſitus, eodemque cum medio illo gyrationis motu actus, majori vi à centro recedere & ſpiralem trajectoriam deſcribendo in infinitum abire debet; & contrà, planeta in medio denſiori primùm collocatus, ad centrum per ſpiralem lineam perpetuò accederet, quod medii denſioris major eſſe debeat vis centrifuga quàm planetæ rarioris. Si medium grave ſit in centrum vorticis, ipſiuſque denſitas, decreſcentibus diſtantiis à centro, creſcat, cœleſtis materiæ denſitas, ob parvam orbitarum quas planetæ deſcribunt, excentricitatem, æqualis aſſumi poteſt den-

ſitati

PROPOSITIO LIII. THEOREMA XLI.

Corpora, quæ in vortice delata in orbem redeunt, ejuſdem ſunt denſitatis cum vortice, & eâdem lege cum ipſius partibus quoad velocitatem & curſus determinationem moventur.

Nam ſi vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ ſeu puncta phyſica datum ſervant ſitum inter ſe, congelari ſupponatur: hæc, quoniam neque quoad denſitatem ſuam, neque quoad vim inſitam aut figuram ſuam mutatur, movebitur eâdem lege ac prius: & contra, ſi vorticis pars congelata & ſolida ejuſdem ſit denſitatis cum reliquo vortice, & reſolvatur in fluidum, movebitur hæc eâdem lege ac prius, niſi quâtenus ipſius particulæ jam fluidæ factæ moveantur inter ſe. Negligatur igitur motus particularum inter ſe, tanquam ad totius motum progreſſivum nil ſpectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum vorticis partium à centro æqualiter diſtantium, propterea quod ſolidum in fluidum reſolutum fit pars vorticis cæteris partibus conſimilis. Ergo ſolidum, ſi ſit ejuſdem denſitatis cum materiâ vorticis, eodem motu cum ipſius partibus movebitur, in materiâ proximè ambiente relativè quieſcens. Sin denſius ſit, (n) jam magis conabitur recedere à centro vorticis quàm prius; ideoque vorticis vim illam, quâ prius in orbitâ ſuâ tanquam in æquilibrio conſtitutum retinebatur, jam ſuperans, recedet à centro & revol-

ſitati cujuſque planetæ huic materiæ innatantis; atque adeò denſitas cæleſtis materiæ ad diſtantiam ſaturni æqualis erit denſitati ſaturni, ad diſtantiam Jovis, Martis &c. æqualis erit denſitati horum planetarum, & omnes illæ denſitates erunt inter ſe in ratione ſubduplicatâ diſtantiarum à ſole reciprocè. Si itaque telluris denſitas mediocris ſupponatur æqualis denſitati aquæ, materia cæleſtis inter ſolem & tellurem conſtituta aquâ denſior erit & corporum motui maximè reſiſtet. Sed ut ex Cometarum motibus, aliiſque obſervationibus conſtat, materia cæleſtis inter ſolem & tellurem motui corporum 333.
minimè reſiſtit. Nam Cometarum motus ſunt ſummè regulares, & eaſdem leges cum planetarum motibus obſervant, & in omnes cæli plagas liberrime feruntur, atque ad ſolem uſque ferè penetrant ſine reſiſtentiâ.

(n) * *Jam magis conabitur.* Nam vis centrifuga motrix, cæteris paribus, augetur vel minuitur in ratione quantitatis materiæ (*per def.* 8. *lib.* 1.) & materiæ quantitas, dato corporis volumine, augetur vel minuitur in ratione denſitatis (2. *lib.* 1.).

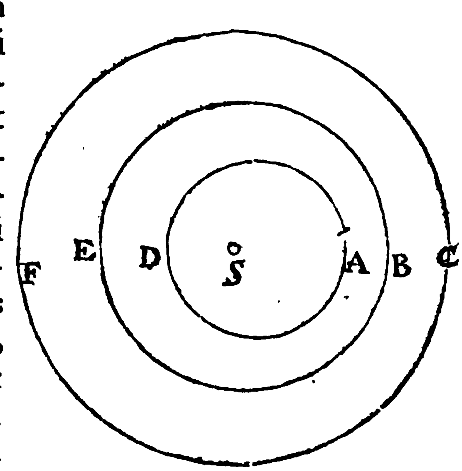
volvendo deſcribet ſpiralem, non amplius in eundem orbem rediens. Et eodem argumento ſi rarius ſit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem orbem niſi ſit ejuſdem denſitatis cum fluido. Eo autem in caſu oſtenſum eſt, quod revolveretur eâdem lege cum partibus fluidi à centro vorticis æqualiter diſtantibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo ſolidum quod in vortice revolvitur & in eundem orbem ſemper redit, relativè quieſcit in fluido cui innatat.

Corol. 2. Et ſi vortex ſit quoad denſitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet à centro vorticis diſtantiam revolvi poteſt.

Scholium.

Hinc liquet planetas à vorticibus corporeis non deferri. Nam planetæ ſecundum hypotheſin *Copernicæam* circa ſolem delati revolvuntur in ellipſibus umbilicum habentibus in ſole, & radiis ad ſolem ductis areas deſcribunt temporibus proportionales. At partes vorticis tali motu revolvi nequeunt. Deſignent *AD*, *BE*, *CF*, orbes tres circa ſolem *S* deſcriptos, quorum extimus *CF* circulus ſit ſoli concentricus, & interiorum duorum aphelia ſint *A*, *B* & perihelia *D*, *E*. Ergo corpus quod revolvitur in orbe *C F*, radio ad ſolem ducto areas temporibus proportionales deſcribendo, (°) movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in Orbe *B E*, tardius



(°) * *Movebitur uniformi cum motu.* Æqualibus enim temporibus æquales areas & proinde æquales arcus, hoc eſt, æqualia ſpatia deſcribuntur.

dius movebitur in Aphelio *B* & velocius in Perihelio *E*, (p) ſecundum leges Aſtronomicas; cùm tamen (q) ſecundum leges Mechanicas materia Vorticis in ſpatio anguſtiore inter *A* & *C* velocius moveri debeat quàm in ſpatio latiore inter *D* & *F*; id eſt, in Aphelio velociùs quàm in Perihelio. Quæ duo repugnant inter ſe. Sic in principio Signi Virginis, ubi Aphelium Martis jam verſatur, diſtantia inter orbes Martis & Veneris eſt ad diſtantiam eorundem orbium in principio Signi Piſcium ut tria ad duo circiter, & propterea materia Vorticis inter Orbes illos in principio Piſcium debet eſſe velocior quàm in principio Virginis in (r) ratione trium ad duo. Nam quò anguſtius eſt ſpatium per quod eadem Materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore tranſit, eo majori cum velocitate tranſire debet. Igitur ſi Terra in hâc Materiâ cœleſti relativè quieſcens ab eâ deferretur, & unà circa Solem revolveretur, (ſ) foret hujus velocitas in principio Piſcium ad ejuſdem velocitatem in principio Virginis in ratione ſeſquialterâ. (t) Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major eſſet quàm minutorum primorum ſeptuaginta, & in principio

(p) * *Secundùm leges Aſtronomicas.* Quoniam axis ellipſeos per aphelium B & perihelium E tranſit, eſtque ellipſi normalis, area quam radius vector S B tempore quam minimo deſcribit, erit æqualis rectangulo ex diſtantiâ S B in arcum quam minimum à corpore in B deſcriptum; & ſimiliter area æqualis quam radius vector S E eodem tempore quam minimo deſcribit, æquatur rectangulo ex diſtantiâ S E ductâ in arcum à corpore in E deſcriptum, & ideò prior arcus eſt ad poſteriorem, hoc eſt, velocitas in B, eſt ad velocitatem in E, ut diſtantia S E, ad diſtantiam majorem S B.

(q) * *Secundùm leges mechanicas.* Nam cùm vortex ſupponatur eſſe in ſtatu permanenti, æquales materiæ quantitates per ſpatium anguſtius A C, & per ſpatium latius D F, ut fit in fluviis, eodem tempore tranſeunt, & propterea materia vorticis in ſpatio anguſtiore inter A & C, velociùs movetur quàm in ſpatio latiore inter D & F. Quantitas autem materiæ, quæ dato tempore tranſit per ſpatium A C, vel D F, eſt ut ſpatium hoc directè & materiæ velocitas mediocris inversè, & ideò mediocris velocitas materiæ inter A & C, eſt ad mediocrem velocitatem materiæ inter D & F, ut F D ad A C. 333

(r) * *In ratione trium ad duo.* (per not. præced.).

(ſ) * *Foret hujus velocitas.* Ex obſervationibus Aſtronomicis conſtat terram inter Veneris & Martis orbes poſitam eſſe.

(t) * *Undè ſolis motus diurnus apparens.* Hic motus eſt angulus quem ſol, radiis ad terram ductis, proprio motu ab occidente in orientem unoquoque die deſcribere nobis videtur, quem quidem angulum terra, radiis ad ſolem ductis, in hypotheſi *Copernicea*, conficit. Porrò notiſſimum eſt, circulum illum quem ſol inter fixas motu annuo deſcribere videtur, ab

cipio Piſcium minor quàm minutorum quadraginta octo: & cùm tamen (experientiâ teſte). apparens iſte Solis motus major ſit in principio Piſcium quàm in principio Virginis, & propterea Terra velocior in Principio Virginis quàm in Principio Piſcium. (u) Itaque Hypotheſis Vorticum cum Phænomenis Aſtronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandos quàm ad perturbandos motus cœleſtes conducit. Quomodo verò motus iſti in ſpatiis liberis abſque Vorticibus peraguntur, intelligi poteſt ex Libro primo, & in Mundi Syſtemate plenius docebitur.

ab Aſtronomis dividi in partes duodecim æquales, ſeu ſigna quorum hæc duo virgo & piſces ſunt directè oppoſita, ità ut dum terra in hypotheſi *Copernici*, eſt in principio Piſcium, ſol appareat in principio Virginis & contrà. Cùm igitur angularis velocitas terræ in principio Piſcium ſit ad ejus velocitatem angularem in principio Virginis ut 3 ad 2, ſolis motus diurnus apparens in principio Virginis eſt ad ejus motum apparentem in principio Piſcium in eâdem ratione 3 ad 2. Solis motus diurnus apparens medius eſt minutorum primorum 59 & ſecundorum 8, ſeu ſecundorum 3548, qui numerus dicatur M; Quarè ſi ſolis motus diurnus apparens in principio Virginis, ponatur $= M + X$, & in principio Piſcium $= M - X$, erit $M + X : M - X = 3:2$, unde invenitur $X = \frac{1}{5} M = 707''$ quam proximè, ac proindè erit $M + X = 4255'' = 70' + 55''$, & $M - X = 2841'' = 47' + 21''$. Ergò ſolis motus diurnus apparens in principio Virginis major eſſet quàm minutorum primorum ſeptuaginta, & in principio Piſcium minor quàm minutorum quadraginta octo; cùm tamen ex obſervationibus Aſtronomicis ſol in principio Virginis è tellure viſus motu diurno conficere videatur minuta prima 58 tantùm in principio piſcium minuta prima 60 ſeu gradum unum.

(u) * *Itaque hypotheſis vorticum*. Quoniam vorticis materia circulos deſcribit æquatori vorticis parallelos, neceſſe eſt (*per hanc prop.* 53.) ut planetæ omnes ferantur in orbitis æquatori parallelis, ſed obſervatum eſt nullum planetam in orbitâ æquatori parallela revolutiones ſuas abſolvere, & cometas variis directionibus in omnes cœli plagas ferri. Eadem eſt difficultas ſi per vim centrifugam partium vorticis explicetur vis centripeta ſeu gravitas corporum quæ ad axem vorticis perpendiculariter tendere deberent, non verò ad vorticis centrum dirigi. Sed de his vid. Acta Erudit. Lipſ. an. 1686. & 1695.; Diaria Erudit. 1703. 1707. Monumenta Acad. Pariſ. 1709. Diſſertationes Clar. *Hugenii* & *Bulffingeri* de causâ gravitatis.

FINIS TOMI II.